SÉMINAIRE BRELOT-CHOQUET-DENY.
THÉORIE DU POTENTIEL

GUSTAVE CHOQUET

L'intégrale d'énergie en théorie du potentiel

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 3 (1958-1959), exp. n° 3, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1958-1959__3__A3_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-:-
Séminaire de
THÉORIE DU POTENTIEL
Année 1958/59
-:-:-:-:-

L'INTÉGRALE D'ÉNERGIE EN THÉORIE DU POTENTIEL (1)

par Gustave CHOQUET

Depuis GAUSS la notion d'énergie a été un outil important en théorie du potentiel ; GAUSS l'utilisa pour résoudre, à la rigueur près, les problèmes d'équilibre, de balayage, et le problème de Dirichlet. Ses successeurs apportèrent la rigueur et une plus grande généralité en ce qui concerne l'espace et le noyau.

Ces dernières années a été commencée une étude axiomatique féconde : on se préoccupe de savoir quelles relations logiques relient diverses propriétés de base que peut posséder un noyau. Dans ces études le noyau est, soit une fonction, soit une diffusion (c'est-à-dire en termes plus évocateurs, un noyau-mesure) ; lorsque c'est une fonction, on la suppose toujours semi-continue inférieurement ; ce choix est justifié actuellement par des raisons de commodité ; il est possible qu'il reçoive un jour une meilleure justification, si l'on démontre que tout noyau-fonction satisfaisant à tous les grands principes de la théorie du potentiel est semi-continu inférieurement.

Pour l'instant il est intéressant d'avoir des énoncés débarrassés d'hypothèses et de continuité inutiles. C'est ce genre de travail que nous allons faire ici pour étendre un énoncé intéressant de N. NINOMIYA reliant les principes du maximum et de domination, et le principe de l'énergie ; en outre nous formulerons les résultats non seulement pour le principe du maximum, mais aussi pour le principe du maximum k-dilaté.

DÉFINITIONS. - Par la suite, E désignera un espace localement compact quelconque, Δ la diagonale de $E \times E$; on appelera <u>noyau</u> sur E toute application N semi-continue inférieurement, et symétrique, de $E \times E$ dans $[0, \infty]$.

---

(1) Ce travail développe une partie d'une des conférences du Séminaire.

L'espace des mesures de Radon sur E, muni de la topologie faible est $\mathfrak{M}$; l'espace des mesures positives est $\mathfrak{M}^+$; le support fermé d'une mesure μ est $S\mu$.

Pour toute $\mu \in \mathfrak{M}^+$, le potentiel $N\mu$ de μ est la fonction :

$$N\mu(x) = \int N(x , y) \, d\mu(y) \quad .$$

Pour $\mu , \nu \in \mathfrak{M}^+$, l'énergie mutuelle de μ , ν est

$$[\mu , \nu] = \int N\mu \, d\nu = \int N\nu \, d\mu \quad .$$

L'énergie de μ est $[\mu , \mu]$.

L'application $(\mu , x) \to N\mu(x)$ de $\mathfrak{M}^+ \times E$ dans $[0 , \infty]$ est semi-continue inférieurement ; il en est de même de l'application $(\mu , \nu) \to [\mu , \nu]$ de $\mathfrak{M}^+ \times \mathfrak{M}^+$ dans $[0 , \infty]$; c'est immédiat en remarquant que N est limite croissante de noyaux finis et continus à support compact.

<u>Définition des principes</u>.

1° <u>Maximum k-dilaté</u> (où $k \geqslant 1$). - On dit que N satisfait à ce principe si pour toute $\mu \geqslant 0$ à support compact,

$$(N\mu \leqslant 1 \text{ presque partout pour } \mu) \Longrightarrow (N\mu \leqslant k \text{ partout})$$

Notons que la relation du premier membre équivaut, à cause de la semi-continuité de $N\mu$ à $(N\mu \leqslant 1 \text{ sur } S\mu)$.

L'implication s'étend aisément aux mesures à support non compact. Le principe du maximum classique correspond à $k = 1$.

2° <u>Principe de domination</u>. - On dit que N satisfait à ce principe si, pour toutes μ et $\nu \in \mathfrak{M}^+$ et à support compact, avec μ d'énergie finie, on a :

$$(N\mu \leqslant N\nu \text{ presque partout pour } \mu) \Longrightarrow (N\mu \leqslant N\nu \text{ partout})$$

3° <u>Type positif et type positif k-dilaté</u>. - On dit que N est de type positif k-dilaté $(k \geqslant 1)$ si pour toutes $\mu , \nu \in \mathfrak{M}^+$ <u>d'énergie finie</u> et de supports <u>compacts disjoints</u>, on a :

$$[\mu , \nu]^2 \leqslant k^2[\mu , \mu] \times [\nu , \nu] \quad . \tag{1}$$

Le noyau est de type positif si $k = 1$.

LEMME 1. - Si N est de type positif k-dilaté, l'inégalité (1) est valable pour toutes $\mu , \nu \in \mathfrak{M}^+$ d'énergie finie.

DÉMONSTRATION.

a) La relation (1) s'étend aux mesures $\mu , \nu \geqslant 0$ d'énergie finie, et étrangères car elles sont alors limites croissantes de mesures à supports compacts disjoints.

b) Soient $\mu , \nu \geqslant 0$ quelconques d'énergie finie ; on peut poser $\mu = \mu' + \lambda$, $\nu = \nu' + \lambda$, où $\lambda = \inf(\mu , \nu)$; les mesures μ' et ν' sont alors étrangères. On vérifie l'identité :

$$2[\mu , \nu] + [\mu' , \mu'] + [\nu' , \nu'] = 2 [\mu' , \nu'] + [\mu , \mu] + [\nu , \nu] \quad .$$

Tous les termes de cette égalité sont finis, sauf peut-être $[\mu , \nu]$; donc ce terme est aussi fini.

Il en résulte que

$$\int N(\mu - \nu)\, d(\mu - \nu) \quad \text{a un sens et vaut} \quad [\mu , \mu] + [\nu , \nu] - 2[\mu , \nu] \ ;$$

on peut alors à ce stade démontrer de façon classique que si $k = 1$, cette intégrale est toujours positive, et que l'inégalité (1) s'étend à toutes μ , ν, positives ou non, d'énergie finie.

Mais pour démontrer la relation générale, nous allons suivre un chemin plus long.

c) Soient $\mu , \nu \geq 0$ d'énergie finie et soit x un nombre ≥ 0, On peut écrire :

$$\mu - x\nu = \mu' - x\nu' , \tag{2}$$

où μ' et ν' sont étrangères et $\mu' \leqslant \mu$, $\nu' \leqslant \nu$.

Posons $[\mu , \mu] = a^2$, $[\nu , \nu] = b^2$, $[\mu' , \mu'] = a'^2$, $[\nu' , \nu'] = b'^2$.

La relation (2) donne :

$$a^2 - 2x[\mu , \nu] + x^2 b^2 = a'^2 - 2x[\mu' , \nu'] + x^2 b'^2 \quad . \tag{3}$$

Or

$$[\mu' , \nu'] \leqslant k\, a'b' \qquad \text{(relation (1))} \ .$$

Donc

$$a'^2 - 2x[\mu' , \nu'] + x^2 b'^2 \geqslant a'^2 - 2x\, k\, a'b' + x^2 b'^2 \quad .$$

Comme $0 \leqslant a' \leqslant a$, on vérifie aisément que le second membre est plus grand que $a^2 - k^2 a^2$.

Donc (3) donne

$$x^2 b^2 - 2x[\mu , \nu] + k^2 a^2 \geqslant 0 \qquad \text{pour tout } x > 0 . \tag{4}$$

Si on écrit que le discriminant de ce trinôme est $\leqslant 0$, on obtient :

$$[\mu , \nu] \leqslant k\, ab ,$$

ce qui est la relation cherchée.

Nous allons maintenant énoncer trois lemmes utiles dans l'étude de l'énergie, sous une forme assez générale pour prévoir des généralisations éventuelles.

Pour abréger, nous appellerons <u>forme affine positive</u> sur un ensemble convexe X d'un espace vectoriel, toute application f de X dans $[0 , \infty]$, telle que

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

pour tous $x_1 , x_2 \in X$, et $\alpha_1 \alpha_2$ scalaires positifs de somme 1. Nous n'excluons pas le cas (fréquent en analyse) où f prendrait la valeur $+\infty$.

A cette notion est associée de façon évidente celle de forme bi-affine positive sur le produit de deux convexes.

LEMME 2. - <u>Soit</u> X <u>une partie convexe d'un espace vectoriel sur</u> R , <u>et soit</u> f <u>une forme bi-affine symétrique positive sur</u> $X \times X$.

<u>Si</u> $f(x , x)$ <u>n'est pas identiquement</u> $+\infty$ <u>sur</u> X , <u>et s'il existe un</u> $x_0 \in X$ <u>qui minimise</u> $f(x , x)$, <u>on a</u> :

$$f(x_0 , x) \geqslant 2\, f(x_0 , x_0) \quad \text{pour tout } x \in X \text{ tel que } f(x , x) \neq \infty .$$

DÉMONSTRATION. - Pour tout nombre $h > 0$ et pour tout $x \in X$ on a :

$$f\left(\frac{x_0 + hx}{1 + h} , \frac{x_0 + hx}{1 + h}\right) \geqslant f(x_0 , x_0)$$

ou encore

$$f(x_0 , x) + hf(x , x) \geqslant 2\, f(x_0 , x_0) + hf(x_0 , x_0) \quad .$$

On a par hypothèse $f(x_0, x_0) \neq \infty$; si donc $f(x, x) \neq \infty$, on peut passer à la limite quand $h \to 0$, d'où la relation cherchée.

Notons que si h n'était pas symétrique, on se ramènerait à ce cas en remplaçant $f(x, y)$ par $\frac{1}{2}(f(x, y) + f(y, x))$; cette remarque s'applique aussi aux deux énoncés qui suivent.

LEMME 3. - Soit à nouveau X un convexe d'un espace vectoriel et soient f , g deux formes bi-affines symétriques positives sur $X \times X$ telles que $f(x, x)$ et $g(x, x)$ ne soient pas simultanément égales à 0 (ou à $+\infty$) en aucun point de X .

Si le rapport $r(x) = f(x, x)/g(x, x)$ n'est pas identiquement $+\infty$ sur X et s'il existe un $x_0 \in X$ qui minimise $r(x)$, on a :

$$g(x_0, x_0)\ f(x_0, x) \geq f(x_0, x_0)\ g(x_0, x)$$

pour tout $x \in X$ tel que $f(x, x) \neq \infty$.

DÉMONSTRATION. - Ici encore on écrit que $r\left(\dfrac{x_0 + hx}{1 + h}\right) \geq r(x_0)$.

Ceci s'écrit

$$g(x_0, x_0)\ (f(x_0, x) + hf(x, x)) \geq f(x_0, x_0)\ (g(x_0, x) + hg(x, x)) .$$

Lorsque $f(x, x) \neq \infty$, on peut passer à la limite quand $h \to 0$, d'où la relation cherchée.

Lorsque $g \equiv 1$, on retrouve comme cas particulier le lemme 2.

LEMME 4. - Soient X et Y deux convexes de deux espaces vectoriels ; soient f , g deux formes bi-affines symétriques positives sur $X \times X$ et $Y \times Y$ respectivement, et soit h une forme bi-affine positive sur $X \times Y$.

On suppose f , g , h telles que le rapport

$$I(x, y) = f(x, x)\ g(y, y)/h^2(x, y)$$

soit partout défini sur $X \times Y$, et non identique à ∞ .

S'il existe $(x_0, y_0) \in X \times Y$ qui minimise $I(x, y)$ on a :

$$h(x_0, y_0)\ f(x_0, x) \geq f(x_0, x_0)\ h(x, y_0)$$

pour tout $x \in X$ tel que $f(x, x) \neq \infty$, et une relation analogue en remplaçant f, x par g, y.

En effet, il suffit d'appliquer le lemme 3 à $I(x, y_0)$ (puis à $I(x_0, y)$).

COROLLAIRE. - Soit f une forme bi-affine symétrique positive sur un convexe X, telle que

$$I(x, y) = f(x, x)\, f(y, y)/f^2(x, y)$$

soit partout défini sur $X \times X$.

S'il existe $(x_0, y_0) \in X \times X$ qui minimise $I(x, y)$, on a :

$$f(x_0, y_0)\, f(x_0, x) \geqslant f(x_0, x_0)\, f(x, y_0)$$

pour tout $x \in X$ tel que $f(x, x) \neq \infty$, et la relation analogue obtenue en remplaçant x_0, y_0, x par y_0, x_0, y.

LEMME 5. - Soit N un noyau sur E ; soient A, B deux compacts disjoints de E tels que l'application $(x, y) \to N(x, y)$ de $A \times B$ dans $[0, \infty]$ soit finie et continue, et tels que $[\mu, \mu]$ et $[\nu, \nu]$ soient $\neq 0$ pour toute mesure $\mu > 0$ sur A et toute mesure $\nu > 0$ sur B.

On pose

$$I(\mu, \nu) = [\mu, \mu] \times [\nu, \nu]/[\mu, \nu]^2$$

où $\mu \in \mathfrak{M}^+(A)$ et $\mu \neq 0$, $\nu \in \mathfrak{M}^+(B)$ et $\nu \neq 0$.

Si $I(\mu, \nu)$ n'est pas identique à ∞, il existe un couple (μ_0, ν_0) qui minimise $I(\mu, \nu)$, et pour chacun de ces couples on a :

$$b\, N\mu_0 = a\, N\nu_0 \quad \text{presque partout pour } \mu_0$$

$$b\, N\nu_0 = c\, N\mu_0 \quad \text{presque partout pour } \nu_0 ,$$

où $a = [\mu_0, \mu_0]$, $b = [\mu_0, \nu_0]$, $c = [\nu_0, \nu_0]$.

Ces trois quantités sont finies et non nulles.

DÉMONSTRATION. - Par raison d'homogénéité évidente, nous pouvons supposer μ et ν de masse totale 1 ; soient respectivement X et Y l'ensemble de ces μ et de ces ν.

Comme $[\mu , \mu]$ et $[\nu , \nu]$ sont semi-continues inférieurement sur X et Y, et $\neq 0$, et comme $[\mu , \nu]$ est fini et continu sur $X \times Y$, $I(\mu , \nu)$ est défini et semi-continu inférieurement sur $X \times Y$, donc atteint un minimum $(\neq \infty)$ pour un couple (μ_0 , ν_0) ; le fait que ce minimum est fini entraîne en particulier que a et c sont finis ; b l'est aussi ; comme par hypothèse a et $c \neq 0$ et $ac/b^2 \neq \infty$, on a aussi $b \neq 0$. Le corollaire du lemme 4 montre que :

$$b \int N\mu_0 \, d\mu \geqslant a \int N\nu_0 \, d\mu \quad \text{pour toute } \mu \geqslant 0 \text{ d'énergie finie portée par } A .$$

Donc $b\, N\mu_0 \geqslant a\, N\nu_0$ sur A sauf sur un ensemble qui est de μ-mesure nulle pour toute mesure μ d'énergie finie sur A.

Cette inégalité a lieu en particulier pour $\mu = \mu_0$; donc comme

$$b \int N\mu_0 \, d\mu_0 = a \int N\nu_0 \, d\mu_0 ,$$

on a bien

$$b\, N\mu_0 = a\, N\nu_0 \quad \text{presque partout pour } \mu_0 .$$

La seconde inégalité s'établit de la même façon.

LEMME 6. - Pour tout noyau N sur E, l'ensemble F des x de E tels que $N\varepsilon_x \equiv 0$, est fermé (on l'appelle la partie impropre de E) ; tout potentiel s'annule sur F.

Si μ' désigne la restriction d'une mesure $\mu \geqslant 0$ au complémentaire de F, on a :

$$N\mu = N\mu' \quad \text{et} \quad [\mu , \mu] = [\mu' , \mu'] .$$

En outre $(N \equiv 0) \iff (\mu' = 0)$.

Ce lemme est immédiat ; il permettra de toujours supposer par la suite que le noyau N est tel que $N\varepsilon_x \not\equiv 0$ quel que soit x (il suffit de remplacer E par le complémentaire de F, qui est aussi un espace localement compact) ; un tel noyau sera dit effectif.

LEMME 7. - Soit N un noyau effectif.

Si N satisfait, soit au principe de domination, soit au principe du maximum k-dilaté, toute mesure positive non nulle a une énergie non nulle.

En effet

$$(\int N\mu \, d\mu = 0) \implies (N\mu = 0 \text{ sur } S\mu)$$

Si N satisfait au principe de domination, la relation $(N\mu \leq N0$ sur $S\mu)$ entraîne $N\mu = 0$ partout.

Si N satisfait au principe du maximum k-dilaté, la relation $(N\mu = 0$ sur $S\mu)$ entraîne aussi $N\mu = 0$ partout.

Dans les deux cas ceci entraîne $\mu = 0$ puisque N est effectif.

LEMME 8. - *Soit* N *un noyau sur* E *et soient* A , B *deux compacts disjoints de* E .

Il existe des noyaux $N' \leq N$ *tels que*

1) $N' = N$ *sur* $A \times A$ *et* $B \times B$,
2) *La restriction de* N' *à* $A \times B$ *est finie et continue.*
L'ensemble de ces N' *est ordonné filtrant croissant et a pour limite* N .

En effet, soit φ une application symétrique continue de $E \times E$ dans $[0 , 1]$, nulle hors d'un compact, valant 1 sur $A \times B$ et valant 0 sur $A \times A$, $B \times B$ (il en existe).

Comme N est limite de l'ordonné filtrant croissant des noyaux Φ finis et continus $\leq N$, et comme $(1 - \varphi) \geq 0$, N est aussi limite de l'ordonné filtrant croissant des noyaux N' suivants :

$$N' = \varphi\Phi + (1 - \varphi)\, N \quad .$$

Ces noyaux N' satisfont aux conditions imposées.

LEMME 9. - *Soit* N *un noyau sur* E ; *soient* A , B *deux compacts disjoints de* E ; *et soient* μ , ν *deux mesures* ≥ 0 *quelconques portées par* A *et* B *respectivement.*

Si N *satisfait au principe de domination, on a*

$$[\mu , \nu]^2 \leq [\mu , \mu] \times [\nu , \nu] \quad .$$

Si N *satisfait au principe du maximum k-dilaté, on a*

$$[\mu , \nu]^2 \leq k^2 [\mu , \mu] \times [\nu , \nu] \quad .$$

DÉMONSTRATION. - D'après le lemme 6, on peut supposer que N est effectif ; soit alors N' un noyau $\leq N$, tel que la restriction de N' à $A \times B$ soit continue, et tel que $N' = N$ sur $A \times A$ et $B \times B$.

Les conditions du lemme 5 sont réalisées pour N' , A , B ; désignons par $I'(\mu , \nu)$ le rapport introduit dans ce lemme, et relatif à N' .

On peut avoir $I'(\mu , \nu)$ identique à ∞ ; sinon il existe (lemme 5) un couple μ_0 , ν_0 minimisant $I'(\mu , \nu)$; si l'on définit les a' , b' , c' , relatifs à N' , μ_0 , ν_0 , on a d'après le lemme 5 :

$$b' N'\mu_0 = a' N'\nu_0 \quad \text{presque partout pour } \mu_0 \quad .$$

Donc comme la restriction de $N'\nu_0$ à A est continue et que $N'\mu_0$ est semi-continue inférieurement, on a

$$b' N'\mu_0 \leq a' N'\nu_0 \qquad \text{partout sur } S\mu_0 \text{ ; et de même :}$$

(5)

$$b' N'\nu_0 \leq c' N'\mu_0 \qquad \text{partout sur } S\nu_0 \text{ .}$$

Ces relations montrent (puisque a' , b' , c' sont finies et non nulles) que :

Sur $S\mu_0$, $N'\mu_0$ ($= N\mu_0$) est borné

(6)

Sur $S\nu_0$, $N'\nu_0$ ($= N\nu_0$) est borné .

D'autre part, d'après les hypothèses faites sur N' et N , les relations (5) entraînent aussi

$$b' N\mu_0 \leq a' N\nu_0 \qquad \text{sur } S\mu_0$$

(7)

$$b' N\nu_0 \leq c' N\mu_0 \qquad \text{sur } S\nu_0 \quad .$$

Si N satisfait au principe de domination, les inégalités (7) sont valables partout, d'où par multiplication :

$$b'^2 \leq a'c'$$

Si N satisfait au principe du maximum k-dilaté, comme d'après (7) $N\mu_0$ est borné sur $S\mu_0$, $N\mu_0$ est partout borné ; de même pour $N\nu_0$. Posons alors

$$u = \sup N\mu_0 \quad \text{sur} \quad S\nu_0 \qquad \text{et} \qquad v = \sup N\nu_0 \quad \text{sur} \quad S\mu_0 \quad .$$

Les relations (7) et le principe du maximum k-dilaté donnent $(b'N\mu_0 \leq a'v$ sur $S\mu_0)$ donc $(b' N\mu_0 \leq k\, a'v$ partout$)$, donc enfin

$$b'u \leq k\ a'v$$

et de même

$$b'v \leq k\ c'u$$

d'où la multiplication

$$b'^2 \leq k^2\ a'c' \quad .$$

On a donc dans ces deux cas, et pour toutes μ , ν , ou bien $I(\mu , \nu) =$, ou bien

$$I(\mu , \nu) \geq b'^2/a'c' \quad .$$

Autrement dit

$$\left(\int N'\mu\, d\nu\right)^2 \leq k^2\left(\int N'\mu\, d\nu\right) \left(\int N'\nu\, d\nu\right) \quad (\text{où} \quad k = 1 \quad \text{éventuellement}).$$

Quand $N' \to N$, les deux membres tendent vers les intégrales relatives à N , d'où les relations cherchées.

THÉORÈME ([2]). - *Soit* N *un noyau sur* E , *et soient* μ , ν *deux mesures positives quelconques sur* E .

Si N *satisfait au principe de domination, on a*

$$[\mu , \nu]^2 \leq [\mu , \mu] \times [\nu , \nu] \quad .$$

Si N *satisfait au principe du maximum* k*-dilaté, on a*

$$[\mu , \nu]^2 \leq k^2\ [\mu , \mu] \times [\nu , \nu] \quad .$$

DÉMONSTRATION. - Si μ et ν sont d'énergie finie, ces inégalités sont conséquences des lemmes 1 et 9.

([2]) Ce théorème étend le résultat de NINOMIYA ; celui-ci supposait $N > 0$ et continu hors de la diagonale, et $k = 1$. On pourrait, dans le même esprit, généraliser d'autres résultats analogues de NINOMIYA.

Si μ est d'énergie non nulle et ν d'énergie infinie, les inégalités sont immédiates (de même en intervertissant μ et ν)

Si μ est d'énergie nulle, c'est que μ est portée par la partie impropre de E (lemme 6) et alors $N\mu = 0$, donc $[\mu , \nu] = 0$ et les inégalités sont vérifiées (de même si ν est d'énergie nulle).

REMARQUE 1. - Pour démontrer l'inégalité relative aux noyaux satisfaisant au principe du maximum k-dilaté on pourrait, au lieu de se ramener au cas d'un noyau effectif en supprimant la partie impropre de E , opérer ainsi :

On remarque que si N satisfait à ce principe, il en est de même de $N + \varepsilon$ quelle que soit la constante $\varepsilon > 0$; on établit l'inégalité pour $N + \varepsilon$ qui est > 0 donc effectif, puis on passe à la limite pour $\varepsilon \to 0$.

REMARQUE 2. - Le théorème qu'on vient d'établir suppose essentiellement que N est semi-continu inférieurement ; nous montrerons dans un autre travail, par une méthode plus compliquée, qu'il s'étend à tout noyau-fonction ; nous montrerons également qu'il s'étend à tout noyau-mesure de convolution.

BIBLIOGRAPHIE

[1] NINOMIYA (Nobuyuki). - Etude sur la théorie du potentiel pris par rapport au noyau symétrique, J. Inst. Polytechn., Osaka City Univ., Series A, t. 8, p. 147-179.

[2] NINOMIYA (Nobuyuki). - Méthode de variation du minimum dans la théorie du potentiel, Séminaire Brelot : Théorie du potentiel, t. 3, 1958/59, n° 5, 9p.

[3] NINOMIYA (Nobuyuki). - Sur le principe du maximum et le balayage, Séminaire Brelot : Théorie du potentiel, t. 3, 1958/59, n° 8, 10 p.

(Manuscrit reçu en octobre 1960)