Séminaire Brelot-Choquet-Deny.
Théorie du potentiel

LINDA NAIM

Application de la frontière de R. S. Martin à l'étude axiomatique du problème de Dirichlet

Séminaire Brelot-Choquet-Deny. Théorie du potentiel, tome 1 (1957), exp. nº 4, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SBCD_1957__1__A4_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire de
THÉORIE DU POTENTIEL
Année 1957
-:-:-:-

12 mars 1957

APPLICATION DE LA FRONTIÈRE DE R.S. MARTIN
À L'ÉTUDE AXIOMATIQUE DU PROBLÈME DE DIRICHLET

par Mlle Linda NAIM

I. Etude axiomatique du problème de Dirichlet.

1. Rappel d'une première axiomatique.

Rappelons d'abord les bases d'une forme élargie d'une ancienne axiomatique du problème de Dirichlet, forme développée dans [2].

Soit Ω un espace de Green supposé sous-espace partout dense d'un espace métrique complet $\check{\Omega}$, donc de frontière $\check{\Omega} - \Omega$, et soit h une fonction harmonique > 0 fixée dans Ω , le cas $h = 1$ ayant été traité antérieurement [1].

Pour toute fonction f réelle sur $\check{\Omega} - \Omega$, on considère les fonctions u dans Ω , qui sont sousharmoniques ou égales à $-\infty$, et satisfont chacune aux conditions : $\frac{u}{h}$ bornée supérieurement, et $\limsup \frac{u}{h} \leq f$ en tout point-frontière ; leur enveloppe supérieure vaut partout $+\infty$ ou $-\infty$, ou est harmonique ; on la note $\underline{\mathcal{H}}_{f,h}$. Définition analogue de $\overline{\mathcal{H}}_{f,h}$, égale à $-\underline{\mathcal{H}}_{(-f),h}$.

Le développement du problème de Dirichlet pour l'espace Ω et la frontière $\check{\Omega} - \Omega$ repose sur l'existence dans Ω d'une famille de filtres $\mathfrak{F}$ convergeant vers des points-frontière, et satisfaisant aux deux conditions axiomatiques suivantes :

A_h. Si u sousharmonique dans Ω satisfait à $\frac{u}{h}$ bornée supérieurement et $\limsup_{\mathfrak{F}} \frac{u}{h} \leq 0$ quel que soit $\mathfrak{F}$, alors $u \leq 0$.

B_h. Pour chaque $\mathfrak{F}$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ du point de convergence x_0 et une fonction surharmonique $v > 0$ dans $\mathcal{V} \cap \Omega$ tels que $\frac{v}{h} \xrightarrow[\mathfrak{F}]{} 0$, et que $\frac{v}{h}$ admette une borne inférieure > 0 hors de tout voisinage de x_0 . Cette condition équivaut à ce que pour les voisinages ouverts δ assez petits de x_0 , $\frac{1}{h} \mathcal{E}_h^{\delta \cap \Omega} \xrightarrow[\mathfrak{F}]{} 0$, et il s'ensuit l'existence d'un v surharmonique > 0 dans tout Ω .

Grâce à A_h, on voit que $\underline{\mathcal{H}}_{f,h} \leq \overline{\mathcal{H}}_{f,h}$. L'égalité avec une fonction finie caractérise la $\check{h}$-résolutivité de f, la valeur commune étant la solution $\mathcal{H}_{f,h}$. Les f bornées continues sont $\check{h}$-résolutives, et, pour cette famille de fonctions, la fonctionnelle $\mathcal{H}_{f,h}(x)$ définit, pour x fixé, une mesure de Daniell $d\check{\mu}_h^x$ sur $\check{\Omega} - \Omega$, dite $\check{h}$-mesure harmonique en x. La $\check{h}$-résolutivité d'une f quelconque équivaut à la sommabilité $d\check{\mu}_h^x$ de f (pour un ou tout point x), et la solution s'écrit

$$\mathcal{H}_{f,h}(x) = \int f \, d\check{\mu}_k^x \ .$$

2. Nouvelle axiomatique.

Une nouvelle axiomatique du problème de Dirichlet a été développée [2] lorsque l'espace $\check{\Omega}$ de l'ancienne axiomatique est compact, autrement dit lorsque l'espace de Green Ω est un sous-espace partout dense d'un espace compact métrisable $\overline{\Omega}$, il a la frontière $\Gamma = \overline{\Omega} - \Omega$.

Alors, sans aucun axiome, les enveloppes précédentes, notées $\underline{\mathcal{D}}_{f,h}$, $\overline{\mathcal{D}}_{f,h}$, satisfont à $\underline{\mathcal{D}}_{f,h} \leq \overline{\mathcal{D}}_{f,h}$; s'il y a égalité avec une fonction finie (en un point, donc partout), on dit que f est h-résolutive, et la valeur commune, notée $\mathcal{D}_{f,h}$, est la h-solution. Aussi $f = 1$ est h-résolutive, la solution étant h.

Un ensemble frontière e est dit h-négligeable si $\overline{\mathcal{D}}_{\varphi_e,h} = 0$ (φ_e fonction caractéristique de e); il est dit faiblement h-négligeable si $\underline{\mathcal{D}}_{\varphi_e,h} = 0$. Le changement de f sur un ensemble h-négligeable n'altère ni les enveloppes ni la h-résolutivité.

Le développement ultérieur de la théorie repose sur l'axiome suivant, qui admet diverses formes équivalentes :

Axiome $\mathcal{A}_h$. - Toute fonction finie continue sur Γ est h-résolutive.

Alors, sous la condition $\mathcal{A}_h$, la fonctionnelle $\mathcal{D}_{f,h}(x)$ définit, pour x fixé, une mesure >0 de Radon $d\mu_h^x$ sur Γ, dite h-mesure harmonique en x. La h-résolutivité d'une fonction f quelconque équivaut à la sommabilité $d\mu_h^x$ de f (pour un ou tout point x), et la solution s'écrit

$$\mathcal{D}_{f,h}(x) = \int f \, d\mu_h^x \ .$$

Enfin la condition que e soit h-négligeable (ou faiblement h-négligeable) signifie que sa h-mesure harmonique extérieure (resp. intérieure) est nulle.

Lorsque l'espace $\check{\Omega}$ de l'ancienne axiomatique (avec A_h et B_h) est compact, la condition $\mathcal{A}_h$ est satisfaite, et les éléments relatifs aux deux axiomatiques sont les mêmes. S'il n'est pas compact, on peut le compactifier selon $\bar{\Omega}$ métrisable où Ω est partout dense ; pour cet espace $\bar{\Omega}$, l'axiome $\mathcal{A}_h$ est vérifié, et la nouvelle axiomatique donne une mesure $d\mu_h^x$ dont la restriction à $\check{\Omega} - \Omega$ est $d\check{\mu}_h^x$, $\bar{\Omega} - \check{\Omega}$ étant de mesure $d\mu_h^x$ nulle, c'est-à-dire h-négligeable. On peut ainsi dire que la nouvelle axiomatique contient l'ancienne.

Dans l'espace de Martin $\hat{\Omega}$, pour toute fonction harmonique $h > 0$, l'axiome $\mathcal{A}_h$ est vérifié, et l'ensemble des points non minimaux est h-négligeable. La h-mesure harmonique $d\mu_h^y(Z)$ vaut $K(Z, y)\, d\mu_h^{y_0}(Z)$, et

$$\mathcal{H}_{f,h}(y) = \int K(Z, y)\, f(Z)\, d\mu_h^{y_0}(Z) ,$$

ce qui pour $f = 1$ inclut la représentation intégrale de Martin

$$h(y) = \int K(Z, y)\, d\mu_h^{y_0}(Z) \quad ;$$

la mesure-$d\mu_h^{y_0}$, portée par l'ensemble Δ_1 des points minimaux, est la mesure canonique associée à h, dont le théorème de Martin établit directement l'existence et l'unicité.

II. Allure à la frontière de la solution et comparaison des deux axiomatiques.

3. Notions diverses de h-régularité.

Rappelons d'abord quelques définitions et propriétés [2], pour aborder l'étude de l'allure à la frontière des enveloppes et de la solution $\mathcal{H}_{f,h}$ dans le cas de la frontière générale Γ de la deuxième axiomatique, et d'une fonction harmonique $h > 0$ dans Ω.

Un filtre $\mathfrak{F}$ sur Ω, convergeant vers un point-frontière x_0, est dit fortement h-régulier s'il existe un voisinage ouvert δ de x_0 et une fonction surharmonique $v > 0$ sur $\delta \cap \Omega$ tels que $\frac{v}{h} \xrightarrow[\mathfrak{F}]{} 0$ et que $\frac{v}{h}$ admette une borne inférieure > 0 hors de tout voisinage de x_0, autrement dit si $\mathfrak{F}$ satisfait à la condition B_h de la première axiomatique, et il existe alors dans tout Ω une fonction surharmonique $v > 0$ satisfaisant aux conditions locales précédentes.

Un filtre $\mathfrak{F}$ convergeant vers x_o est dit h-<u>régulier</u> si pour toute fonction f bornée supérieurement sur Γ,

$$\lim_{\mathfrak{F}} \sup \frac{1}{h} \bar{\omega}_{f,h} \leq \lim \sup \text{ de } f \text{ en } x_o \ ;$$

dans l'hypothèse $\mathfrak{a}_h$, cela équivaut à ce que pour toute f finie continue

$$\frac{1}{h} \omega_{f,h} \underset{\mathfrak{F}}{\rightarrow} f(x_o)$$

Un filtre $\mathfrak{F}$ sur Ω est dit <u>faiblement</u> h-<u>régulier</u> si $\frac{G_{y_o}}{h} \underset{\mathfrak{F}}{\rightarrow} 0$, ce qui est indépendant de y_o, et équivaut à l'existence d'une fonction surharmonique $v > 0$ dans Ω telle que $\frac{v}{h} \underset{\mathfrak{F}}{\rightarrow} 0$.

Un <u>point-frontière</u> x_o est dit <u>fortement</u> h-<u>régulier</u>, h-<u>régulier</u>, ou <u>faiblement</u> h-<u>régulier</u> s'il en est ainsi de la trace sur Ω du filtre des voisinages de x_o.

Dans le cas particulier de frontière euclidienne avec $h = 1$ (problème de Dirichlet ordinaire), ces trois notions coïncident avec la notion classique de régularité, et l'ensemble des points-frontière irréguliers est de mesure harmonique nulle, c'est-à-dire 1-négligeable.

Dans le cas général, la h-régularité forte d'un filtre $\mathfrak{F}$ convergeant vers un point-frontière x_o entraîne de façon immédiate la h-régularité de $\mathfrak{F}$; celle-ci entraîne la h-régularité faible de $\mathfrak{F}$ lorsque le complémentaire de $\{x_o\}$ n'est pas h-négligeable, mais peut ne plus l'entraîner si $\Gamma - \{x_o\}$ est h-négligeable, Inversement, la h-régularité faible n'entraîne pas en général la h-régularité et les trois notions précédentes ne sont pas en général équivalentes, ce qui justifie leur introduction. Enfin la question se pose de savoir si l'axiome $\mathfrak{a}_h$ entraîne que l'ensemble des points-frontière non fortement h-réguliers, non h-réguliers, ou non faiblement h-réguliers, est h-négligeable.

On sait seulement que, dans le cas de l'espace de Martin $\hat{\Omega}$, l'ensemble des points-frontière non faiblement h-réguliers est h-négligeable (voir l'exposé n° 2, Corollaire 1 au Théorème 7), mais on ne sait rien du cas général. Aussi cherche-t-on à satisfaire à la condition A_h de l'ancienne axiomatique étendue avec des filtres convenables fortement h-réguliers, au lieu des traces sur Ω des filtres des voisinages des points fortement h-réguliers.

4. <u>Cas de l'espace de Martin</u> $\hat{\Omega}$.

Dans le cas particulier de l'espace de Martin $\hat{\Omega}$, la notion de pseudo-limite va se substituer à la limite ordinaire, et permettre d'adapter le résultat classique fondamental sur les points irréguliers.

Appelons pseudo-fortement h-régulier un point x_0 minimal tel que le filtre formé par les ensembles de complémentaire effilé en x_0 (ou trace sur Ω du filtre des voisinages fins de x_0) soit fortement h-régulier. Alors, en s'appuyant sur le théorème 7 du précédent exposé, et sur son corollaire 2, on démontre le :

THÉORÈME 1. - Les points minimaux non pseudo-fortement h-réguliers forment un ensemble h-négligeable.

Grâce au principe général du maximum pour Ω et la frontière Δ, on en déduit le

COROLLAIRE. - Les filtres, traces sur Ω des filtres des voisinages fins des points pseudo-fortement h-réguliers, satisfont aux conditions A_h et B_h de l'ancienne axiomatique étendue.

Cela inclut donc dans l'ancienne axiomatique le problème de Dirichlet avec la frontière de Martin, et caractérise la solution $\mathcal{O}_{f,h}$ correspondant à une donnée f finie continue sur Δ comme l'unique fonction u harmonique dans Ω telle que $\frac{u}{h}$ soit bornée et admette, en tout point pseudo-fortement h-regulier, une pseudo-limite égale à f .

5. Cas de l'espace $\bar{\Omega}$ général.

L'étude du cas général d'un espace $\bar{\Omega}$ compact métrisable quelconque est plus délicate, et nécessite la considération simultanée de la frontière de Martin Δ et de la frontière $\Gamma = \bar{\Omega} - \Omega$, par l'intermédiaire de la notion de pôle d'une fonction minimale.

Soit x un point minimal $\in \Delta$, et soit $\dot{\mathcal{F}}_x$ (et brièvement $\dot{\mathcal{F}}$) le filtre formé par les ensembles de complémentaire effilé en x , ou encore, d'après le critère fondamental d'effilement, par les ensembles sur lesquels l'extrémisation de K_x ne conserve pas cette fonction. Un point x minimal et le filtre $\dot{\mathcal{F}}_x$ qu'il définit sont dits associés.

On démontre que la convergence du filtre $\dot{\mathcal{F}}_x$ dans l'espace compact $\bar{\Omega}$ équivaut à ce que la fonction minimale K_x vérifie l'axiome $\mathcal{A}_{K_x}$ relatif à $\bar{\Omega}$, et le point-limite de $\dot{\mathcal{F}}_x$ est dit pôle unique de K_x dans $\bar{\Omega}$ (ou sur Γ). Il est évident que dans l'espace de Martin $\hat{\Omega}$, toute fonction minimale K_x admet le point x pour pôle unique.

On note Δ_1' le sous-ensemble de Δ formé des points x minimaux pour lesquels K_x possède un pôle unique sur Γ, c'est-à-dire des points x associés aux filtres $\tilde{\mathfrak{F}}_x$ convergents dans $\bar{\Omega}$, et Γ_1 le sous-ensemble de Γ formé des pôles correspondants. En faisant correspondre à chaque point $x \in \Delta_1'$ le pôle unique de K_x sur Γ, on définit une application Φ de Δ_1' dans Γ, sur le sous-ensemble Γ_1, dont on voit assez facilement qu'elle est borélienne, mais en général ni biunivoque ni continue.

THÉORÈME 2. - <u>Equivalence de l'axiome</u> $\mathcal{O}_h$. <u>Pour qu'une fonction harmonique</u> $h > 0$ <u>dans</u> Ω <u>satisfasse à l'axiome</u> $\mathcal{O}_h$ <u>relatif à</u> $\bar{\Omega}$, <u>il faut et il suffit que</u> $\Delta - \Delta_1'$ <u>soit</u> h-<u>négligeable, c'est-à-dire que les points</u> x <u>minimaux pour lesquels</u> K_x <u>ne vérifie pas l'axiome</u> $\mathcal{O}_{K_x}$ <u>relatif à</u> $\bar{\Omega}$ (<u>points associés aux filtres</u> $\dot{\mathfrak{F}}$ <u>non convergents dans</u> $\bar{\Omega}$) <u>forment un ensemble</u> h-<u>négligeable</u>.

COROLLAIRE. - <u>Si</u> $\mathcal{O}_h$ <u>est vérifié, l'ensemble</u> $\Gamma - \Gamma_1$ <u>est</u> h-<u>négligeable relativement à</u> $\bar{\Omega}$.

THÉORÈME 3. - <u>Si</u> h <u>harmonique</u> >0 <u>dans</u> Ω <u>satisfait à l'axiome</u> $\mathcal{O}_h$ <u>relatif à</u> $\bar{\Omega}$, <u>les points minimaux associés aux filtres</u> $\dot{\mathfrak{F}}$ <u>convergents dans</u> $\bar{\Omega}$ <u>et non fortement</u> h-<u>réguliers pour</u> $\bar{\Omega}$ <u>forment un ensemble</u> h-<u>négligeable</u>.

COROLLAIRE. - <u>Dans l'hypothèse</u> $\mathcal{O}_h$, <u>les filtres</u> $\dot{\mathfrak{F}}$ <u>convergents dans</u> $\bar{\Omega}$ <u>et fortement</u> h-<u>réguliers pour</u> $\bar{\Omega}$ <u>satisfont aux conditions</u> A_h <u>et</u> B_h <u>de l'ancienne axiomatique étendue, ce qui complète la comparaison des deux axiomatiques et en établit l'équivalence</u>.

La condition B_h vient du choix même de ces filtres ; A_h vient de ce que les points minimaux associés aux filtres $\dot{\mathfrak{F}}$ qui ne font pas partie de la famille considérée forment, d'après les 2 théorèmes précédents, un ensemble h-négligeable et du principe général du maximum dans $\hat{\Omega}$.

Cela caractérise de plus la solution $\mathcal{D}_{f,h}$ pour donnée f finie continue comme l'unique fonction u harmonique dans Ω telle que $\frac{u}{h}$ soit bornée et admette, selon tout filtre $\dot{\mathfrak{F}}$ fortement h-régulier pour $\bar{\Omega}$, convergent vers $z \in \Gamma_1$, une limite égale à $f(z)$.

III. <u>Comparaison des problèmes correspondants à</u> $\bar{\Omega}$ <u>et à l'espace de Martin</u>.

6. La considération simultanée des deux frontières Δ et Γ par l'intermédiaire de la notion de pôle, et les propriétés qui en découlent vont permettre de

ramener tout problème de Dirichlet relatif à $\bar{\Omega}$ à un problème analogue relatif à l'espace de Martin $\hat{\Omega}$. Outre les résultats précédents, on utilisera de manière essentielle le fait que pour chacun des espaces $\bar{\Omega}$ et $\hat{\Omega}$, et moyennant $\mathcal{A}_h$, les enveloppes fondamentales de la théorie du problème de Dirichlet restent les mêmes quand les conditions-frontière sont prises selon les filtres $\dot{\mathfrak{F}}$ convergents dans $\bar{\Omega}$.

THÉORÈME 4. - Soit f une fonction réelle sur Γ, et soit f_1 sur Δ égale en chque point $x \in \Delta_1'$ à la valeur de f au point $\Phi(x)$ (pôle unique de K_x), et définie de façon quelconque ailleurs. Alors sous la condition $\mathcal{A}_h$, en introduisant l'indice (Δ) pour les notions relatives à Δ, c'est-à-dire à l'espace $\hat{\Omega}$,

$$\underline{\mathcal{D}}_{f,h} = \underline{\mathcal{D}}^{(\Delta)}_{f_1,h} \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathcal{D}}_{f,h} = \overline{\mathcal{D}}^{(\Delta)}_{f_1,h} .$$

Donc, dans le cas le plus général d'un $\bar{\Omega}$ satisfaisant à $\mathcal{A}_h$, la solution générale $\mathcal{D}_{f,h}$ est égale à la solution correspondante $\mathcal{D}^{(\Delta)}_{f_1,h}$ du problème relatif à la frontière de Martin.

D'après $\mathcal{A}_h$, l'ensemble $\Delta - \Delta_1'$ est h-négligeable, donc le changement de f_1 sur cet ensemble n'altère pas les enveloppes $\underline{\mathcal{D}}^{(\Delta)}_{f_1,h}$, $\overline{\mathcal{D}}^{(\Delta)}_{f_1,h}$, qui se trouvent déterminées par la seule connaissance de f_1 sur Δ_1'.

Alors toute fonction u sousharmonique ou égale à $-\infty$, telle que $\frac{u}{h}$ soit bornée supérieurement et que, dans $\bar{\Omega}$, $\limsup \frac{u}{h} \leq f$ en tout point de Γ (ou même seulement de Γ_1), satisfait, pour tout $x \in \Delta_1'$, à la condition $\limsup_{\mathfrak{F}} \frac{u}{h} \leq f(x)$, donc minore $\underline{\mathcal{D}}^{(\Delta)}_{f_1,h}$, d'où $\underline{\mathcal{D}}_{f,h} \leq \underline{\mathcal{D}}^{(\Delta)}_{f_1,h}$.

De même, toute fonction u sousharmonique on égale à $-\infty$, telle que $\frac{u}{h}$ soit bornée supérieurement et que, dans $\hat{\Omega}$, $\limsup \frac{u}{h} \leq f_1$ en tout point de Δ (ou même seulement de Δ_1'), satisfait à la condition $\limsup_{\mathfrak{F}} \frac{u}{h} \leq f(z)$ pour tout point $z \in \Gamma_1$ et tout filtre $\mathfrak{F}$ convergent vers z, donc minore $\underline{\mathcal{D}}_{f,h}$, d'où $\underline{\mathcal{D}}^{(\Delta)}_{f_1,h} \leq \underline{\mathcal{D}}_{f,h}$.

On en déduit l'égalité $\underline{\mathcal{D}}^{(\Delta)}_{f_1,h} = \underline{\mathcal{D}}_{f,h}$, entrainant $\overline{\mathcal{D}}_{f,h} = \overline{\mathcal{D}}^{(\Delta)}_{f_1,h}$, et si l'une des fonctions f, f_1 est h-résolutive ; il en est de même de l'autre avec l'égalité des solutions correspondantes $\mathcal{D}_{f,h}$, $\mathcal{D}^{(\Delta)}_{f_1,h}$.

Comme l'application Φ n'est pas nécessairement biunivoque, on voit que la frontière de Martin affine le problème de Dirichlet par décomposition effective de certains points-frontière. Il serait donc important de savoir si l'espace de Martin est, à un homéomorphisme près, le seul $\bar{\Omega}$ où $\mathfrak{A}_h$ est vérifié quel que soit h (c'est-à-dire où toute fonction minimale admet un pôle unique), et pour lequel il y a correspondance biunivoque entre les fonctions minimales et leurs pôles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRELOT (M.) et CHOQUET (G.). - Espaces et lignes de Green, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 3, 1951, p. 199-263.

[2] BRELOT (Marcel). - Le problème de Dirichlet, Axiomatique et frontière de Martin, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 35, 1956, p. 297-335.