G. Pisier

Semi-groupes holomorphes et *K*-convexité (suite)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1980-1981), exp. n° 7, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1980-1981____A7_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E

1980-1981

SEMI-GROUPES HOLOMORPHES ET K-CONVEXITE (Suite)

G. PISIER

Exposé No VII

15 Mai 1981

Cet exposé est la suite d'un exposé précédent (exposé No II) de ce même séminaire.

Le principal résultat est le suivant :

Théorème 1 : Soit X un espace de Banach possédant une base de Schauder (ou seulement une propriété plus faible, cf. remarque 2.ii ci-dessous). Supposons que X est de cotype q et X' de cotype q_* avec $\frac{1}{q}+\frac{1}{q_*}>\frac{1}{2}$. Alors X est K-convexe.

Remarques 2 : i) Le théorème précédent généralise un résultat de [2] : dans le cas particulier $q=q_*=2$, on a démontré dans [2] que si X a seulement la propriété d'approximation, il est nécessairement isomorphe à un Hilbert.

ii) La démonstration du théorème 1 est de nature finidimensionnelle. Elle s'applique en fait plus généralement si l'on suppose seulement l'existence d'une famille filtrante croissante $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces de dimension finie de X, uniformément complémentés et tels que $\overline{\bigcup_{i\in I} E_i}=X$.

iii) Nous conjecturons que le théorème reste vrai sans la restriction $\frac{1}{q}+\frac{1}{q_*}>\frac{1}{2}$. Il suffirait pour le démontrer de savoir améliorer le lemme 3 ci-dessous (voir la remarque 8 plus loin).

Pour la démonstration du théorème 1, nous reprenons les notations de l'exposé II que nous rappelons brièvement : on note $D=\{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$ et (ε_n) les applications coordonnées sur D. On note μ la probabilité uniforme sur D (i.e. la mesure de Haar normalisée sur le groupe compact D). Pour tout ε avec $-1\le\varepsilon\le 1$, on note $\mu(\varepsilon)$ la mesure de probabilité $\mu(\varepsilon)=\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}(1+\varepsilon\varepsilon_k)\mu$ (la limite étant prise au sens vague).
On note $T(\varepsilon)$ l'opérateur de $L^2(D,\mu)$ dans lui-même correspondant à la convolution par $\mu(\varepsilon)$, i.e.

$$\forall f\in L^2(\mu) \qquad Tf = f*\mu(\varepsilon) .$$

On posera $T_t=T(e^{-t})$.
Soit X un espace de Banach, on notera simplement $L^2(X)$ l'espace $L^2(D,\mu;X)$ et $B(L^2(X))$ l'espace des opérateurs bornés sur $L^2(X)$ muni de

sa norme naturelle. Rappelons que les opérateurs $(T_t \otimes Id_X)_{t\geq 0}$ définissent un semi-groupe de contractions sur $L^2(X)$.

Soit $(S_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe d'opérateurs sur un espace de Banach Y.

Soit $\varphi > 0$ et $M < \infty$.

On pose $V_\varphi = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 0,\ |\mathrm{Arg}\, z| < \varphi\}$.

On dira (comme à l'exposé II) que $(S_t)_{t\geq 0}$ est (φ,M)-holomorphe si $t \to S_t$ admet une extension holomorphe $\zeta \to S_\zeta$ définie sur V_φ et telle que :

$$\sup_{\zeta\in V_\varphi} \|S_\zeta\| \leq M \quad .$$

Pour toute partie finie A de $\mathbb{N}$, on pose

$$w_A = \prod_{n\in A} \varepsilon_n \quad .$$

Les fonctions $\{w_A \mid A \subset \mathbb{N},\ |A| < \infty\}$ forment une base orthonormale (les caratères sur le groupe compact D !) de $L^2(D,\mu)$.

Nous aurons besoin de plusieurs lemmes, le premier est une variante d'un résultat bien connu de Kwapień (cf. [3] exposé 8) :

<u>Lemme 3</u> : Notons P_n l'ensemble des 2^n parties de $\{1,2,\dots,n\}$. Soit X un espace de type p et de cotype q (cf. page II.2) avec $1 \leq p \leq 2 \leq q < \infty$. Alors, on a :

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, \{x_A \mid A \in P_n\} \subset X$

$$\Big\|\sum_{A\in P_n} w_A\, x_A\Big\|_{L^2(X)} \leq T_p(X)C_q(X)2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\Big(\sum_{A\in P_n} \|x_A\|^2\Big)^{1/2} \quad .$$

<u>Démonstration</u> (esquisse) : Soit $\{g_A \mid A \in P_n\}$ une suite de variables gaussiennes indépendantes standard. Puisque X est de type p, on a :

$$\Big(\mathbb{E}\,\Big\|\sum_{A\in P_n} g_A\, x_A\Big\|^2\Big)^{1/2} \leq T_p(X)\ 2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\ \Big(\Sigma\, \|x_A\|^2\Big)^{1/2} \quad ,$$

d'autre part, puisque X est de cotype q, on a (pour plus de détails, cf. e.g. [4] exposé X, prop. 2.1 et remarque 4.1),

$$\Big\|\sum_{A\in P_n} w_A\, x_A\Big\|_{L^2(X)} \leq C_q(X)\ 2^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}\ \Big(\mathbb{E}\,\Big\|\sum_{A\in P_n} g_A\, x_A\Big\|^2\Big)^{1/2} \quad .$$

Le lemme 3 résulte immédiatement de ces deux inégalités.

Nous aurons aussi besoin du lemme suivant qui n'est qu'une reformulation plus explicite du résultat de Beurling-Kato discuté page II.5.

Lemme 4 : Soit Y un espace de Banach et soit $(S_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de contractions fortement continu sur Y. Supposons qu'il existe $\beta < 1$ et $C \geq 1$ tels que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+ \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \|(1-S_t)^n\| \leq C\, 2^{\beta n} .$$

Il existe alors $\varphi(\beta) > 0$ et K_β ne dépendant que de β, tels que $(S_t)_{t\geq 0}$ soit $(\varphi(\beta), K_\beta C)$-holomorphe.

Démonstration : Il suffit de relire soigneusement (par exemple) la démonstration présentée aux pages 6 à 9 de l'exposé II. Pour faciliter la tâche du lecteur, indiquons rapidement la marche à suivre :
Posons $\rho_o = (2^\beta \cdot 2)^{1/2}$ et $\rho = (\rho_o \cdot 2)^{1/2}$ de sorte que

$$2^\beta < \rho_o < \rho < 2 .$$

On notera que l'on a aussi :

$$(1) \qquad \frac{2}{\rho} < \frac{\rho_o}{2^\beta} .$$

Choisissons $N \geq 1$ minimal tel que $C^{1/N}\, 2^\beta \leq \rho_o$.
On a alors $\|(1-S_t)^N\| \leq \rho_o^N$ et on peut appliquer la démonstration donnée pages II.6 à II.9 :

Soit θ comme indiqué à la page II.8. Noter que θ ne dépend que de ρ, donc que de β. On pose $\varphi = \frac{\theta}{2}$. Après quelques calculs élémentaires, les arguments des pages II.6 à II.9 donnent une extension holomorphe $\zeta \to S_\zeta$ de $(S_t)_{t\geq 0}$ telle que :

$$(2) \qquad \sup_{\zeta \in V_\varphi} \|S_\zeta\| \leq M'\left(1 \vee \frac{1}{\rho}\right) \sqrt{2}\, \pi\, J$$

où $J = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \left| e^{-z\zeta} \frac{dz}{|z|} \right|$ et $M' = \frac{2^N - \rho^N}{\rho^N - \rho_o^N} \cdot \frac{2}{2-\rho}$.

Noter que J et ρ ne dépendent que de β (et pas de C).

Pour m grand, $\dfrac{2^m - \rho^m}{\rho^m - \rho_o^m} \sim \left(\dfrac{2}{\rho}\right)^m$, par conséquent il existe un entier $N(\beta) > 1$ tel que :

(3) $\forall\ m \geq N(\beta)$ on a : $\dfrac{2^m - \rho^m}{\rho^m - \rho_o^m} \leq 2\left(\dfrac{2}{\rho}\right)^m$.

Il y a alors deux cas :

Si $N < N(\beta)$, alors M' peut être majoré par une fonction de β seul et nous avons terminé puisque $C \geq 1$. Si, au contraire $N \geq N(\beta)$, alors (3) donne

$$M' \leq \frac{4}{2-\rho}\left(\frac{2}{\rho}\right)^N \quad ; \tag{4}$$

mais la minimalité de N entraîne $C^{1/N-1}\ 2^{\beta} > \beta_o$ soit $N - 1 < \dfrac{\operatorname{Log} C}{\operatorname{Log}(\rho_o\ 2^{-\beta})}$.

On déduit donc de (4) :

$$M' \leq A(\beta)\ C^{m(\beta)}$$

où $A(\beta)$ ne dépend que de β et où $m(\beta) = \dfrac{\operatorname{Log}(2/\rho)}{\operatorname{Log}(\rho_o\ 2^{-\beta})}$; d'après (1), $m(\beta) \leq 1$ et on a donc finalement aussi dans ce cas d'après (2) :

$$\sup_{\zeta \in V_\varphi} \|S_\zeta\| \leq K_\beta\ C$$

où K_β et $\varphi > 0$ ne dépendent que de β. cqfd.

Le point crucial de la démonstration résulte des deux lemmes précédents :

<u>Lemme 5</u> : Soit X un espace de Banach pour lequel il existe $\alpha < 1$ et une constante $B \geq 1$ tels que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ \{x_A \mid A \in P_n\} \subset X$, on a :

$$\|\Sigma\ x_A\ w_A\|_{L^2(X)} \leq B\ 2^{\alpha n} \sup\{\|x_A\|,\ A \in P_n\} \quad .$$

Il existe alors $\psi(\alpha) > 0$ et C_α, ne dépendant que α, tels que le semi-groupe $(T_t \otimes Id_X)_{t\geq 0}$ est $(\psi(\alpha), C_\alpha B)$-holomorphe sur $L^2(X)$.

<u>Démonstration du lemme 5</u> : Posons $Y = L^2(X)$ et $\tilde{T}_t = T_t \otimes Id_X$. D'après le lemme 4, il nous suffit de montrer que l'on a :

$$\forall\, t>0,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad \|(1-\tilde{T}_t)\|_{B(L^2(X))} \leq B\ 2^{\beta n}$$

avec $\beta < 1$ ne dépendant que de α.

Soit $t>0$ et n fixés. Rappelons que, d'après l'argument utilisé dans la démonstration du théorème 3.1 de l'exposé II, on peut écrire

$$\tilde{T}_t = \int \pi(\omega)\ d\mathbb{P}(\omega) \tag{5}$$

où les $\pi(\omega)$ sont des projections contractantes sur Y définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

De plus, $\forall\, \omega_1,\ldots,\omega_n \in \Omega$ les projections $\pi(\omega_1),\ldots,\pi(\omega_n)$ commutent entre elles.

D'après l'hypothèse du lemme 5, on a : $\forall\, y \in Y$

$$\left(\int \Big\|\prod_{i=1}^{n} (1+\varepsilon_i\ \pi(\omega_i))y\Big\|^2 d\mu\right)^{1/2} \leq B\ 2^{\alpha n}\ \|y\| \ , \tag{6}$$

quel que soit $(\omega_i)_{i\leq n}$ dans Ω^n.

Posons

$$A_\varepsilon^+ = \{i \in \{1,\ldots,n\} \quad \varepsilon_i = +1\}$$

et

$$A_\varepsilon^- = \{i \in \{1,\ldots,n\} \quad \varepsilon_i = -1\} \ .$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned}\Big\|\prod_{i=1}^{n} (1+\varepsilon_i\ \pi(\omega_i))y\Big\| &\geq \Big\|\prod_{i\in A_\varepsilon^+} (-\pi(\omega_i))\ \Big[\prod_{i=1}^{n} (1+\varepsilon_i\ \pi(\omega_i))y\Big]\Big\| \\ &= \Big\|\prod_{i\in A_\varepsilon^+} (-2\,\pi(\omega_i)) \prod_{i\in A_\varepsilon^-} (1-\pi(\omega_i))y\Big\| \ .\end{aligned}$$

D'où en intégrant (6) et en utilisant (5) :

$$
\begin{aligned}
B2^{\alpha n}\,\|y\| &\geq \int \Big\| \prod_{i\in A_\varepsilon^+} (-2\,\pi(\omega_i)) \prod_{i\in A_\varepsilon^-} (1-\pi(\omega_i))y\Big\|\, d\mu\, d\mathbb{P}(\omega_1)\ldots d\mathbb{P}(\omega_n) \\
&\geq \int \Big\| \int \Big[\prod_{i\in A_\varepsilon^+} (-2\,\pi(\omega_i)) \prod_{i\in A_\varepsilon^-} (1-\pi(\omega_i))y\Big]\, d\mathbb{P}(\omega_1)\ldots d\mathbb{P}(\omega_n)\Big\|\, d\mu \\
&= \int \|(-2\widetilde{T}_t)^{|A_\varepsilon^+|}\,(1-\widetilde{T}_t)^{|A_\varepsilon^-|}\, y\|\, d\mu(\varepsilon) \\
&\geq \Big\|\int (-2\widetilde{T}_t)^{|A_\varepsilon^+|}\,(1-\widetilde{T}_t)^{|A_\varepsilon^-|}\, y\, d\mu(\varepsilon)\Big\| \\
&= \Big\|2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-2\widetilde{T}_t)^k(1-\widetilde{T}_t)^{n-k}\,y\Big\| \\
&= 2^{-n}\,\|(1-3\widetilde{T}_t)^n y\| \quad .
\end{aligned}
$$

Soit finalement :

$$
(7) \qquad \|(1-3\widetilde{T}_t)^n\| \leq B\,2^{(\alpha+1)n} \quad , \quad \forall\, n\in\mathbb{N}\,.
$$

On peut alors écrire :

$$
3^n(1-\widetilde{T}_t)^n = [2+(1-3\widetilde{T})]^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}(1-3\widetilde{T}_t)^k
$$

donc

$$
\|(1-\widetilde{T}_t)^n\| \leq 3^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\,\|(1-3\widetilde{T}_t)^k\|
$$

d'où, d'après (7) :

$$
\begin{aligned}
&\leq 3^{-n}\,B\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\,2^{(\alpha+1)k} \\
&\leq 3^{-n}\,B(2+2^{(\alpha+1)})^n \quad .
\end{aligned}
$$

Soit $\beta(\alpha)$ le nombre défini par l'égalité

$$
2^{\beta(\alpha)} = 3^{-1}(2+2^{(\alpha+1)}) \quad .
$$

On a : $\qquad \|(1-\widetilde{T}_t)^n\| \leq B\,2^{\beta(\alpha)n} \quad , \quad \forall\, n\in\mathbb{N}\ ;$

et $\alpha<1$ implique $\beta(\alpha)<1$. Cela termine la démonstration.

Le lemme suivant est bien connu (cf. e.g. [5], p. 71).

Lemme 6 : Soient $\psi > 0$ et $M < \infty$. Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe (ψ, M)-holomorphe sur un espace de Banach Y. Soit $(S(\zeta))_{\zeta \in V_\psi}$ l'extension holomorphe de $(S_t)_{t>0}$.
Posons, pour $\varphi \leq \psi$, $M(\varphi) = \mathrm{Sup}\{\|S(\zeta)\|, \zeta \in V_\varphi\}$. On a alors

$$\forall\, \theta \in]0,1[\qquad M(\theta\psi) \leq M(\psi)^\theta \left(\sup_{t\geq 0} \|S(t)\|\right)^{1-\theta} .$$

Démonstration : Soit φ tel que $|\varphi| < \psi$ et soit $r > 0$. Notons que, pour $0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1$, $r\exp(i\varphi z) \in V_\psi$; on peut donc poser $\Phi(z) = S(r\exp(i\varphi z))$.
La fonction Φ est holomorphe et bornée sur la bande $\{0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1\}$.
Soit $\mathcal{M}(\theta) = \mathrm{Sup}_{t\in\mathbb{R}} \|\Phi(\theta + it)\|$ pour $0 < \theta < 1$. D'après le lemme des trois droites, on a :

$$\mathcal{M}(\theta) \leq \mathcal{M}(1)^\theta\, \mathcal{M}(0)^{1-\theta} ,$$

d'où :

$$\|S(r\exp(i\varphi\theta))\| \leq M(\psi)^\theta \left(\sup_{t\geq 0} \|S(t)\|\right)^{1-\theta}$$

soit finalement :

$$M(\theta\psi) \leq M(\psi)^\theta \sup_{t\geq 0} \|S(t)\|^{1-\theta} . \qquad \text{cqfd.}$$

Nous pouvons maintenant compléter la

Démonstration du théorème 1 : Soit X comme au théorème 1. Supposons tout d'abord que X est de dimension finie. Soit K(X) la constante de K-convexité de X (cf. exposé II, page II.2).
On sait (cf. proposition 1.4 de l'exposé II) que l'on a :

$$(8) \quad \text{si } \frac{1}{q_*'} + \frac{1}{q_*} = 1 \qquad T_{q_*'}(X) \leq K(X)\, C_{q_*}(X') .$$

Observons que $\frac{1}{q} + \frac{1}{q_*} > \frac{1}{2}$ équivaut à : $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{q_*'} - \frac{1}{q} < 1$. De plus, rappelons que les constantes $K(X)$, $C_q(X)$, $T_{q_*'}(X)$ (resp. $C_{q_*}(X')$) restent inchangées si l'on remplace X par $L^2(X)$. On peut donc appliquer le lemme 3, le lemme 5 et (8) à l'espace $L^2(X)$; on en déduit que $(\tilde{T}_t)_{t>0}$ est un semi-groupe $(\psi(\alpha), M)$-holomorphe avec $M = C_\alpha K(X)\, C_q(X)\, C_{q_*}(X'))$. On utilise alors le lemme 6 : Soit θ fixé tel que $0 < \theta < 1$. Le semi-groupe $(\tilde{T}_t)_{t\geq 0}$

est aussi $(\theta\psi(\alpha),M^{\theta})$-holomorphe. D'après la proposition 3.3 de l'exposé II, il en résulte que

$$K(X) \leq C(\alpha,\theta)\, M^{\theta}$$

où $C(\alpha,\theta)$ est une constante ne dépendant que de $\alpha<1$ et de θ. (On peut prendre $C(\alpha,\theta)=\exp(\frac{\pi}{\operatorname{tg}\theta\,\varphi(\alpha)})$.) D'où en remplaçant M par sa valeur

$$K(X) \leq C_{\alpha}^{\theta}\, C(\alpha,\theta)\, K(X)^{\theta}\, (C_q(X)\, C_{q_*}(X'))^{\theta}$$

ce qui implique finalement :

$$K(X) \leq [C_{\alpha}^{\theta}\, C(\alpha,\theta)\, C_q(X)^{\theta}\, C_{q_*}(X')^{\theta}]^{\frac{1}{1-\theta}} \quad . \tag{9}$$

Soit maintenant un espace X de dimension inifnie mais possédant une base (ou seulement la propriété indiquée à la remarque 2.ii). Il existe alors une famille filtrante croissante $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces de dimension finie de X et des projections $P_i : X \to E_i$ avec $\lambda = \sup_{i\in I} \|P_i\| < \infty$ et aussi $\overline{\bigcup_{i\in I} E_i} = X$. On a alors : $C_{q_*}(E_i') \leq \lambda\, C_{q_*}(X')$, d'où d'après (5) :

$$K(E_i) \leq (C_{\alpha}^{\theta}\, C(\alpha,\theta)\, \lambda^{\theta}\, C_q(X)\, C_{q_*}(X')]^{\frac{1}{1-\theta}} \quad ,$$

et puisque $\bigcup_{i\in I} E_i$ est dense, on a :

$$K(X) \leq \sup_{i\in I} K(E_i) \quad ,$$

ce qui prouve que X est K-convexe. cqfd.

<u>Remarques 7</u> : Le lecteur notera que, en combinant les lemmes 3 et 5 du présent exposé, on obtient une démonstration de la conjecture 5.7 de l'exposé II dans le cas particulier d'un espace de type p et de cotype p' avec $p>4/3$ (auquel cas, on a $\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}<\frac{1}{2}$).

<u>Remarque 8</u> : i) Nous conjecturons que la conclusion du lemme 3 peut être améliorée de la façon suivante :
$\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\forall\, \{x_A \mid A\in P_n\}\subset X$, $\forall\, \alpha>\frac{1}{p}-\frac{1}{2}$

$$\|\sum_{A\in P_n} w_A\, x_A\|_{L^2(X)} \leq A(\alpha,p)\, T_p(X)\, C_q(X)\, 2^{n\alpha}\, (\sum_{A\in P_n} \|x_A\|^2)^{1/2}$$

où $A(\alpha,p)$ est une constante ne dépendant que de p et de $\alpha>\frac{1}{p}-\frac{1}{2}$.

D'après [4] exposé 17 cette conjecture est vraie pour les treillis de Banach.

ii) Si la conjecture précédente est correcte (il suffit même qu'elle le soit pour seulement un α tel que $\frac{1}{p}-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$) alors la méthode du présent exposé permet de démontrer le théorème 1 sans la restriction $\frac{1}{q}+\frac{1}{q_*}>\frac{1}{2}$, mais en supposant seulement $q<\infty$ et $q_*<\infty$.

<u>Remarque 9</u> : Par un argument en tous points semblable à celui donné pour le lemme 5, on peut montrer que si $u : X \to Y$ est un opérateur de type p et si $v : Y \to Z$ est de cotype q avec $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}<\frac{1}{2}$, alors le composé $v \circ u$ est un "opérateur K-convexe". Plus précisément, la famille d'opérateurs $(T_t \otimes vu)_{t\geq 0}$ admet une extension holomorphe dans un secteur V_φ pour un $\varphi > 0$.

Nous ignorons si de tels opérateurs (de la forme vu avec v et u comme ci-dessus) se factorisent par un espace K-convexe.

En suivant la méthode de [2] et en utilisant la remarque 9, on peut démontrer le théorème 1 pour des espaces de Banach possédant seulement la propriété d'approximation bornée.

<u>Remarque</u> : La démonstration du lemme 5 s'applique aussi bien aux semi-groupes plus généraux considérés dans [1] (cf. le théorème 3.9 de l'exposé II).

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Pisier : Holomorphic semi-groups and the geometry of Banach spaces, Annals of Maths. A paraître.

[2] G. Pisier : Un théorème sur les opérateurs linéaires entre espaces de Banach qui se factorisent par un espace de Hilbert, Annales Scientifiques de l'E.N.S. 13 (1980) 23-43.

[3] Séminaire Maurey-Schwartz 1972-73, Ecole Polytechnique, Paris.

[4] Séminaire d'Analyse Fonctionnelle 1978-79, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

[5] E.M. Stein : Topics on the Littlewood-Paley theory, Annals of Maths. Studies, Princeton Univ. Press (1971).
