Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

G. Godefroy

Nouvelles classes d'espaces de Banach à prédual unique

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1980-1981), exp. n° 6, p. 1-28
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1980-1981____A6_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941 82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E   F O N C T I O N N E L L E

1980-1981

NOUVELLES CLASSES D'ESPACES DE BANACH A PREDUAL UNIQUE

G. GODEFROY

(d'après G. GODEFROY et M. TALAGRAND)

Exposé No VI

27 Mars 1981

L'objet de ce travail est de préciser et de développer les résultats énoncés dans une précédente Note aux Comptes Rendus [10]. L'étude réalisée permet d'unifier et d'étendre des résultats portant sur les propriétés topologiques des éléments du bidual d'un espace de Banach [4], [21], [6] - et sur l'unicité de certains préduaux voir [8], [10], [16], [3], [1].

Soit E un espace de Banach ; la boule unité de E sera notée E_1. L'espace E sera dit espace dual s'il existe un espace de Banach X dont le dual X' est <u>isométrique</u> à E. L'espace X sera alors appelé un prédual de E. On dira que X est l'unique prédual de E si tout espace Y tel que Y' soit <u>isométrique</u> à E, est <u>isométrique</u> à X.

I. <u>CADRE D'UN ESPACE DE BANACH E DANS SON BIDUAL E"</u>.

<u>Définition 1</u> : ([13] p.99) : Soit E un Banach et $\{x_n\}$ une suite d'éléments de E. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ est dite faiblement inconditionellement convergente si on a $\sum_{n=1}^{+\infty} |x(x_n)| < +\infty$ pour tout x dans E'. La suite $\{x_n\}$ est dite faiblement inconditionellement convergente (f.i.c.) si la série $\{u_n = x_n - x_{n-1}\}_{n \geq 1}$ est f.i.c.

Pour tout espace X, on notera $\mathcal{L}\mathcal{S}(X)$ le sous-espace vectoriel de X" formé des limites strictes d'éléments de X, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $t \in E''$ qui s'écrivent $t = \lim_{n\to+\infty} x_n$ pour $\sigma(X'',X')$, où (x_n) est une suite f.i.c. dans X.

L'importance des suites f.i.c. dans l'étude de la dualité est montrée par le lemme suivant :

<u>Lemme 2</u> : Soit E un espace de Banach. Soit $\{x_n\}$ une suite f.i.c. de E' qui tend vers 0 dans $(E',\sigma(E',E))$. On a alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ dans $(E',\sigma(E',G))$ pour tout prédual G de E'.

<u>Démonstration</u> : On pose $u_o = x_o$, et $u_n = x_n - x_{n-1}$ pour $n \geq 1$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=o}^{n} u_i = 0$ dans E', $\sigma(E',E)$. La série $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ étant f.i.c., il existe une constante K telle que $\|\sum\limits_{i=o}^{n} \alpha_i\, u_i\| \leq K$ pour tout n et pour toute famille $(\alpha_i)_{o\leq i\leq n}$ telle que $|\alpha_i| \leq 1$ pour tout $i \leq n$. Soit G un prédual de E'. Il faut démontrer que pour tout ultra-filtre non trivial $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{\mathcal{U}} \sum\limits_{i=o}^{n} u_i = 0$ dans E', $\sigma(E',G)$. Posons $\xi = \lim\limits_{\mathcal{U}} \sum\limits_{i=o}^{n} u_i$ dans E', $\sigma(E',G)$. Soit $n_1 < n_2 < \dots < n_{2\ell}$ une famille ordonnée de 2ℓ indices. On a

$$\Big\| \sum_{i=n_1}^{n_2} u_i + \sum_{i=n_3}^{n_4} u_i + \dots + \sum_{i=n_{2\ell-1}}^{i=n_{2\ell}} u_i \Big\| \leq K.$$

Faisons tendre $n_{2\ell}$ vers $+\infty$ suivant $\mathcal{U}$. La norme étant $\sigma(E',G)$-s.c.i., on obtient

$$\Big\| \sum_{i=n_1}^{n_2} u_i + \sum_{i=n_3}^{n_4} u_i + \dots + \sum_{i=n_{2\ell-3}}^{n_{2\ell-2}} + \xi - \sum_{i=o}^{n_{2\ell-1}-1} u_i \Big\| \leq K.$$

En faisant tendre $n_{2\ell-1}$ vers $+\infty$ et en employant cette fois que la norme est $\sigma(E',E)$ -s.c.i., on obtient

$$\Big\|\xi + \sum_{i=n_1}^{n_2} u_i + \dots + \sum_{n_{2\ell-3}}^{n_{2\ell-2}} u_i\Big\| \leq K.$$

en itérant ℓ fois le procédé, on obtient $\|\ell\xi\| \leq K$, et ceci pour tout ℓ ; par conséquent $\xi = 0$.

C.Q.F.D.

Le lemme 2 nous invite à définir l'objet suivant

<u>Définition 3</u> : Soit E un espace de Banach. On appelle <u>cadre de E</u>, et on note C(E), le sous-espace de E'' formé des éléments f qui vérifient

$$(*) \quad : \quad \{x_n\} \subseteq E' \text{ f.i.c.}, \lim_{n\to+\infty} x_n = 0 \text{ dans } E',\sigma(E',E) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$$

On note $\chi(E')$ la topologie, définie sur E', de la convergence simple sur C(E).

Remarque : La notation $\chi(E')$ indique que cette topologie ne dépend pas du prédual de E' choisi. C'est en effet le contenu du lemme 2.

Le théorème ci-dessus décrit les premières propriétés de l'espace C(E) et de la topologie $\chi(E')$ définies ci-dessus. Rappelons qu'un sous-ensemble A d'un compact K est dit avoir la propriété de Baire faible s'il existe un ensemble maigre M tel que $A \Delta M$ soit un ouvert de K ; on dit que A a la propriété de Baire forte si pour tout fermé F de K, l'ensemble $A \cap F$ a la propriété de Baire faible dans F. Les ensembles qui ont la propriété de Baire faible - resp. forte - forment une tribu ; une fonction réelle définie sur K a la propriété de Baire faible -resp. forte - si elle est mesurable pour cette tribu. D'autre part, tout filtre $\mathfrak{F}$ sur $\mathbb{N}$ est identifié à une partie de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, muni de sa topologie canonique ; $\mathfrak{F}$ est dit analytique s'il s'identifie à une partie analytique du compact $\mathcal{P}(\mathbb{N})$; c'est la cas en particulier si $\mathfrak{F}$ est à base dénombrable.

Théorème 4 : Soit E un espace de Banach. On a les propriétés suivantes :

1) Si G est un prédual de E', on a C(G) = C(E). En particulier, tout prédual de E' est contenu dans C(E).

2) Si $\{y_n\}$ est une suite dans C(E) qui converge vers f dans E'', $\sigma(E'',E')$ suivant un filtre $\mathfrak{F}$ analytique sur $\mathbb{N}$, on a $f \in C(E)$. En particulier, C(E) est séquentiellement fermé dans E'', $\sigma(E'',E')$.

3) Tout élément $f \in E''$ qui a la propriété de Baire forte sur $(E', \sigma(E',E))$ appartient à C(E).

4) Toute bijection isométrique de E' est continue pour la topologie $\chi(E')$.

5) Si E est un Banach réticulé, l'espace C(E) s'identifie à la bande engendrée par E dans E''.

6) Si E est séparable et sous-espace d'un Banach réticulé avec une norme continue en ordre, $C(E) = \mathcal{L}\mathcal{Y}(E)$.

7) Si F est un sous-espace fermé de E, on a $C(F) \subseteq F'' \cap C(E)$.

Démonstration :

1) Le lemme 2 montre que l'implication (*), qui définit l'appartenance à C(E), ne dépend pas du prédual choisi ; on en déduit que C(E) = C(G). Il est clair, par ailleurs, que $G \subseteq C(G)$ et donc que $G \subseteq C(E)$.

2) Soit (y_n) une suite de C(E) qui converge dans E'', $\sigma(E'',E')$ vers y suivant un filtre analytique $\mathfrak{F}$. Soit $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite f.i.c. qui

tend vers 0 dans $(E', \sigma(E',E))$. Il faut montrer que $\lim_{i\to+\infty} y(u_i) = 0$.
La suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ étant f.i.c. on peut définir une application linéaire continue φ par

$$\varphi : E \longrightarrow \ell^1(\mathbb{N})$$
$$x \longrightarrow x(u_{i+1}-u_i)$$

Il est facile de vérifier que φ est continue. On considère sa transposée $\varphi' : \ell^\infty(\mathbb{N}) \longrightarrow E'$. Montrons l'implication

$$t \in C(E) \Longrightarrow t\circ\varphi' \in \ell^1(\mathbb{N}).$$

En effet, soit $A = \{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\}$ une partie infinie de $\mathbb{N}$, et soit pour tout k

$$z_k = \varphi'(\chi_{A\cap[n_k,+\infty[}) = \sum_{\substack{i\in A\\ i\geq n_k}} (u_{i+1}-u_i)$$

L'application φ' étant continue pour les topologies préfaibles, il est clair que $\lim_{k\to+\infty} z_k = 0$. Par ailleurs, on a

$$z_{k+1} - z_k = u_{n_k+1} - u_{n_k}$$

ce qui montre que la suite (z_k) est f.i.c. On a donc
$\lim_{k\to+\infty} t(z_k) = \lim_{k\to+\infty} t\circ\varphi'(\chi_{A\cap[n_k,+\infty[}) = 0$, et ceci pour toute partie infinie A de $\mathbb{N}$. Il est clair que ceci implique $t\circ\varphi' \in \ell^1(\mathbb{N})$.

Notons maintenant que la suite $(y_n \circ \varphi')$ tend vers $(y \circ \varphi')$ dans l'espace $(\ell^{\infty\prime}, \sigma(\ell^{\infty\prime}, \ell^\infty))$ suivant le filtre analytique $\mathfrak{F}$. Les fonctions $(y_n \circ \varphi')$ sont continues sur $(\ell^\infty, \sigma(\ell^\infty, \ell^1))$; or, la limite d'une suite de fonctions continues sur un souslinien suivant une filtre analytique est une fonction borelienne ; un théorème de Christensen [4] montre alors que $y \circ \varphi' \in \ell^1(\mathbb{N})$. On en déduit que

$$\lim_{k\to+\infty} y \circ \varphi'(\{k, k+1, \ldots\}) = 0$$

or on a

$$y \circ \varphi'(\{k,k+1,\dots\}) = y(-u_k)$$

et par conséquent $y \in C(E)$.

3) On reprend le début de la démonstration de 2). Si y a la propriété de Baire forte sur $(E',\sigma(E',E))$. La technique employée par le second auteur dans [20] montre que $y \circ \varphi'$ appartient à $\ell^1(\mathbb{N})$, et on termine comme dans 2). (Il n'est pas possible d'appliquer directement le résultat de Christensen, car on ne sait pas à priori que $y \circ \varphi'$ possède la propriété de Baire forte, comme il est montré dans [20]).

4) Il suffit de montrer que pour toute bijection isométrique T de E', on a $T'(C(E)) \subseteq C(E)$. Or, l'espace $T'(E)$ est un prédual de E ; le lemme 2 nous montre donc que si (x_n) est une suite f.i.c. qui tend vers 0 dans $E',\sigma(E',E)$, alors (x_n) tend vers zéro dans $E', \sigma(E',T'(E))$. Donc (Tx_n) tend vers zéro dans $E', \sigma(E',E)$; il est clair que (Tx_n) est également f.i.c. ; on a donc $\lim_{n\to\infty} g(Tx_n) = 0$ pour tout $g \in C(E)$, donc $T'(g) \in C(E)$ par définition de $C(E)$.

5) Il est bien connu ([17], p. 80) que la bande engendrée par E dans E" s'identifie à l'espace des formes linéaires continues en ordre sur E'. Soit $f \in E''$; une méthode classique permet de montrer que f est continue en ordre sur E' si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 0$ pour toute suite (x_n) d'éléments de E'^+ disjoints avec $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ dans $E', \sigma(E',E)$. Cette suite étant en particulier f.i.c., on en déduit que tout $g \in C(E)$ est continu en ordre sur E'. La réciproque se montre, comme dans le 2) ci-dessus, en se ramenant au cas de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ et en utilisant le fait ([14], p.35) qu'un Banach réticulé contient un sous-espace isomorphe à $c_o(\mathbb{N})$ si et seulement si il contient un sous-espace réticulé isomorphe à $c_o(\mathbb{N})$ ordonné.

6) En effet, pour tout espace de Banach E, on a $\mathcal{L}\mathcal{S}(E) \subseteq C(E)$. Supposons que E soit sous-espace d'un espace de Banach X ayant une norme continue en ordre. Soit $r_E : X' \longrightarrow E'$ l'application canonique de restriction à E ; il est clair que : $f \in C(E) \Rightarrow f \circ r_E \in C(X)$. L'espace E étant séparable, on peut supposer X séparable ; la bande $C(X)$ engendrée par X dans X" s'identifie alors à $\mathcal{L}\mathcal{S}(X)$ (voir par exemple [6]) ; on a donc $C(E) \subseteq \mathcal{L}\mathcal{S}(X) \cap E''$, et une méthode classique ([14], p.32) montre que $C(E) \subseteq \mathcal{L}\mathcal{S}(E)$.

7) On déduit aisément de la définition de $C(E)$ que $C(E)$ est l'orthogonal dans E" du sous-espace $\mathcal{L}\mathcal{S}(E') \cap E^\perp$ de E"'(Le lemme 2 signifie que la trace sur $\mathcal{L}\mathcal{S}(E')$ de $G^\perp$ ne dépend pas du prédual G de E' choisi). Soit

F un sous-espace fermé de E, soit $r_F : E' \longrightarrow F'$ l'application canonique, et $r_F'' : E''' \longrightarrow F'''$ sa bitransposée ; il est clair que $r_F''(E^\perp) = F^\perp$ et que $r_F''(\mathcal{L}\mathcal{S}(E')) \subseteq \mathcal{L}\mathcal{S}(F')$. On en déduit que $C(F) \subseteq C(E) \cap F''$. L'exemple de $\ell^1(\mathbb{N})$, sous-espace de $\mathcal{C}([0,1])$, montre que l'inclusion peut être stricte.

C.Q.F.D.

Remarques :

1) L'exemple de $E = \mathcal{C}([0,1])$ montre que la réciproque de 3) est fausse, autrement dit qu'il existe en général des éléments de $C(E)$ qui n'ont pas la propriété de Baire forte. En effet, d'après 5), on a dans ce cas $C(E) = E''$.

2) Dans 6), on peut supprimer l'hypothèse "E séparable" à condition de considérer des limites strictes de familles et non de suites d'éléments de E.

3) Le 6) et le 4) montrent que si E est séparable et sous-espace d'un réticulé avec une norme continue en ordre, toutes les bijections isométriques de E' sont de première classe de Baire pour la topologie $\sigma(E',E)$. En particulier, s'il existe des bijections isométriques de E' qui ne sont pas $\sigma(E',E)$ de première classe, E n'est pas sous-espace d'un espace à base inconditionelle (exemple : $E=\mathcal{C}([0,1])$).

La topologie $\chi(E')$ est une topologie intermédiaire entre $\sigma(E',E)$ et $\sigma(E',E'')$. Elle peut être identique à $\sigma(E',E'')$, par exemple dans le cas des espaces $\mathcal{C}(K)$. Nous allons à présent nous intéresser au cas où cette topologie est la moins fine possible, c'est-à-dire égale à $\sigma(E',E)$.

II LA PROPRIETE (X)

Définition 5 : Soit E un espace de Banach, et soit $C(E)$ le cadre de E dans E''. On dira que l'espace E a la propriété (X) si on a $E = C(E)$.

La propriété (X) signifie que le sous-espace $\mathcal{L}\mathcal{S}(E')$ de E''' est "assez grand", c'est-à-dire que $\mathcal{L}\mathcal{S}(E') \cap E^\perp$ est $\sigma(E''',E'')$ dense dans $E^\perp$. On a :

Théorème 6 : Soit E un espace de Banach qui possède la propriété (X). On a les propriétés suivantes :

1) L'espace E est l'unique prédual de son dual E'.

2) Tout élément $f \in E''$ qui possède la propriété de Baire forte sur $(E',\sigma(E',E))$ appartient à E. En particulier, E est faiblement séquentiellement complet.

3) Toute bijection isométrique de E' est la transposée d'une isométrie de E.

4) La propriété (X) est stable par isomorphisme et héréditaire.

5) Tout espace non réflexif qui possède la propriété (X) contient un facteur direct isomorphe à $\ell^1(\mathbb{N})$.

<u>Démonstration</u> : Si G est un prédual de E' on a $G \subseteq C(G) = C(E) = E$ et donc $G \subseteq E$, d'où $G = E$ puisque G est un prédual. Tout élément de E'' qui a la propriété de Baire forte sur E', $\sigma(E',E)$ appartient à C(E), donc à E. La topologie $\chi(E')$ s'identifie à $\sigma(E',E)$, d'où le 3). La stabilité de la propriété (X) par isomorphisme se déduit de la définition, et l'héridité par le 7) du théorème. Enfin, si E est non réflexif et possède la propriété (X), on a $E^{\perp} = E^{\perp} \cap \mathcal{L}\mathcal{J}(E')^{\sigma(E',E)}$ et donc $\mathcal{L}\mathcal{J}(E') \setminus E' \neq \{0\}$. On en déduit que E' contient $c_0(\mathbb{N})$ ([13], p.98), donc que E contient $\ell^1(\mathbb{N})$ complémenté ([13], p. 103). C.Q.F.D.

Montrons à présent que de nombreux espaces possèdent la propriété (X).

<u>Théorème 7</u> : Les espaces qui appartiennent à l'une des classes suivantes ont la propriété (X).

1) Espaces faiblement séquentiellement complets, facteurs directs dans un Banach réticulé.

2) Espaces f.s.c., sous-espaces d'un Banach réticulé avec une norme continue en ordre.

3) Espaces $\mathcal{L}^1$.

4) Espaces duaux d'espaces séparables ayant la propriété (U) [15] et ne contenant pas $\ell^1(\mathbb{N})$.

5) Préduaux d'algèbres de Von Neumann.

6) Espace $L^1(\mathbb{T})/H_1(\mathbb{T})$

7) Espaces à structure locale inconditionelle qui ne contiennent pas ℓ^∞_n uniformément.

<u>Démonstration</u> : Si E est f.s.c. et facteur direct dans un Banach

réticulé, alors E est isomorphe à un sous-espace d'un Banach réticulé avec une norme continue en ordre [12]. Sous cette hypothèse, on a $C(E) = \mathcal{L}\mathcal{Y}(E)$ par le théorème 2, 6). On en déduit 1) et 2). Les cas 3) et 7) se déduisant immédiatement du cas 2).

Si E séparable a la propriété (U) et ne contient pas $\ell^1(\mathbb{N})$, on a $\mathcal{L}\mathcal{Y}(E) = E''$. Si $C(E') \neq E'$, il existe $f \neq 0$ dans $C(E') \cap E^{\perp}$. Soit $x \in E''$; il existe un sous-espace X de E, isomorphe à $c_0(\mathbb{N})$, tel que $x \in X''$; l'élément x est donc la limite pour $\sigma(E'',E')$ d'une suite f.i.c. de E ; on en déduit que $f(x) = 0$, ce qui est absurde.

Le cas des préduaux d'algèbres de Von Neumann se déduit du lemme suivant [18] : Une forme linéaire φ sur une algèbre de Von Neumann A agissant sur un Hilbert H appartient au prédual A_* si et seulement si on a $\sum_{\lambda\in\Lambda} \varphi(P_\lambda) = \varphi(Id_H)$ pour toute famille orthogonale de projections $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ dans A telle que $\sum_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda = Id_H$ pour la topologie faible des opérateurs. Il est clair que la famille (P_λ) forme une série faiblement inconditionellement convergente.

Le cas de l'espace $L^1(\mathbb{T})/_{H_1(\mathbb{T})}$ se déduit du lemme énoncé par Ando dans [1] : Soit $\hat{m}$ la mesure sur le spectre Ω de $L^\infty(\mathbb{T}; dx)$ qui correspond à la mesure de Lebesgue. Une mesure ν sur Ω est étrangère à $\hat{m}$ si et seulement si il existe un compact A de Ω et une série f.i.c. (g_n) dans $H^\infty(\mathbb{T})$ tels que

1) $$|\nu|\ (\Omega \setminus A) = 0.$$

2) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \hat{g}_n(\omega) = \chi_A(\omega) \quad (\omega \in \Omega)$$

3) $$\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(\zeta) = 0$$

presque partout sur $\mathbb{T}$ où $\hat{g}_n \in \mathcal{C}(\Omega)$ est la transformée de Guel'fand de g_n. Le résultat se déduit aisément du lemme et de l'identification de $H^\infty(\mathbb{T})$ avec le dual de $L^1(\mathbb{T})/_{H_1(\mathbb{T})}$. C.Q.F.D.

<u>Remarques</u> : 1)Le théorème ci-dessus montre que de nombreux espaces f.s.c. ont la propriété (X). Cependant, l'espace E construit par

J. Bourgain dans [2] est f.s.c. mais n'a pas la propriété (X) puisqu'il ne contient pas $\ell^1(\mathbb{N})$ complémenté. Plus précisément, on a $\mathcal{L}\mathcal{Y}(E') = E'$ puisque E' est un espace $\mathcal{L}^1$ et donc C(E) = E". Ceci confirme l'aspect profondément pathologique de cet espace.

2) On peut se demander s'il existe un analogue de théorème 6.2) pour la propriété de Baire <u>faible</u>. Ce n'est pas le cas ; on peut montrer en fait le résultat suivant : Si E est séparable, ou dual d'un séparable, il existe une norme sur E telle que tous les éléments de E" aient la propriété de Baire faible sur $(E'_1, \sigma(E',E))$. A titre d'exemple, on peut prendre sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$ la norme usuelle, et sur $\ell^1(\mathbb{N})$ une norme duale d'une norme ℓ.u.c. sur $c_0(\mathbb{N})$. Notons le contraste avec la norme usuelle de $\ell^1(\mathbb{N})$, pour laquelle tous les éléments de $\ell^{1''}$ qui ont la propriété de Baire faible sur $[-1,+1]^{\mathbb{N}}$ appartiennent à $\ell^1(\mathbb{N})$ [19].

3) Le 4) du théorème 7 peut se généraliser comme suit. Appelons "fonction de classe de Baire $\frac{1}{2}$" sur un polonais P toute limite uniforme d'une suite de fonctions (f_n) qui sont chacune limite <u>stricte</u> d'une suite de fonctions continues. On montre comme dans 4) ci-dessus : Si tous les éléments de E" sont de classe de Baire $\frac{1}{2}$ sur $(E'_1, \sigma(E',E))$, alors E' a la propriété (X). On en déduit que E' est l'unique prédual de E" ; mais on peut démontrer [9] par d'autres méthodes que si E ne contient pas $\ell^1(\mathbb{N})$, E' est l'unique prédual de E".

III. <u>ESPACES RETICULES DUAUX.</u>

Le théorème 4 montre que si X est un espace réticulé dual, pour la norme et pour l'ordre, d'un espace réticulé E, alors tout prédual de X sera contenu dans l'espace des formes linéaires continues en ordre sur X. Nous allons voir qu'on peut se passer ici de l'hypothèse "X dual d'un espace réticulé". On a en effet

<u>Théorème 8</u> : Soit E un espace de Banach réticulé, dual d'un espace de Banach X. L'espace X est alors un sous-espace de l'espace des formes linéaires continues en ordre sur E.

<u>Démonstration</u> : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de E^+, avec $\|x_1\| = 1$ et inf $x_n = 0$ dans E. Notons $\pi_n : E'' \longrightarrow E''$ la projection sur la bande engendrée par x_n dans E". On peut supposer que pour tout

$z \in E^+$, la suite $\pi_n(z)$ n'est minorée par aucun élément de $E^+\setminus\{0\}$ (exemple : $\mu \in \mathcal{C}(K)'$ est normale si et seulement si $\lim_{n\to\infty} \mu(f_n) = 0$, pour toute suite $(f_n) \in \mathcal{C}(K)^+$ telle que $\inf f_n = \chi_F$, où F est un fermé <u>rare</u>). Soit $y = \lim_{\mathcal{U}} x_n$ pour $\sigma(E,X)$, où $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$. Il faut montrer que $y = 0$. On a le

<u>Lemme</u> : Soient $p \leq q$. On a $\|2n(1-\pi_p)\ |y|+x_q\| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En effet, on a $\|x_q\| \leq \|x_1\| \leq 1$, d'où l'inégalité pour $n = 0$. Supposons que $\|2n(I-\pi_p)|y| + x_q\| \leq 1$.

On a alors
$\forall\ z \in E,\ |z| \leq (I-\pi_p)|y| \Rightarrow \|2n\ z + x_q\ \| \leq 1.$

Soient r et ℓ tels que $q \leq r \leq \ell$. On a $x_q \geq x_q - x_r + x_\ell \geq 0$. Par conséquent

$$\|2\ n\ z + x_q - x_r + x_\ell\ \| \leq 1.$$

En faisant tendre ℓ vers $+\infty$, suivant $\mathcal{U}$, on a

$$\|2\ n\ z + x_q - x_r + y\ \| \leq 1.$$

Ecrivons

$$y = (I-\pi_p)\ (y) + \pi_p(y) = (I-\pi_p)\ (y) + \pi_p(y) - \pi_q(y) + \pi_q(y)$$

On a donc

$$\|[2nz+(I-\pi_p)(y)]+[(\pi_p-\pi_q)(y)]+[\pi_q(y)+x_q-x_r]\| \leq 1.$$

pour tout $z \in E$ tel que $|z| \leq |I-\pi_p(y)|$.

Les trois crochets ci-dessus représentent des éléments <u>disjoints</u> de E''. La norme de E'' étant réticulée, on a

$$\|(2n+1)(I-\pi_p)|y|+(\pi_p-\pi_q)(y) - \pi_q(y) \quad -x_q + x_r\| \leq 1$$

d'où à nouveau, pour tout $z \in E$ tel que $|z| \leq I-\pi_p|y|$.

$$\|(2n+1)z + (\pi_p-\pi_q)\ (y) - \pi_q(y) -x_q+x_r\| \leq 1.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe des suites $(t_\alpha), (u_\alpha)$ dans E qui vérifient les propriétés suivantes :

$$\lim_\alpha (I-\pi_p)\,(t_\alpha) = 0$$

$$\lim_\alpha \pi_q(t_\alpha) = 0$$

$$\lim_\alpha t_\alpha = (\pi_p-\pi_q)\,(y)$$

$$\lim_\alpha (I-\pi_q)\,(u_\alpha) = 0$$

$$\lim_\alpha u_\alpha = \pi_q(y)$$

$$\forall\alpha,\ \|\,(2n+1)\,z + t_\alpha - u_\alpha - x_q + x_r\,\| \leq 1+\varepsilon$$

où les limites ci-dessus sont prises au sens de la topologie $\sigma(E'',E')$. Faisons tendre r vers $+\infty$ suivant $\mathcal{U}$. On a pour tout α

$$\|\,(2n+1)\,z+t_\alpha - u_\alpha - x_q + y\,\| \leq 1+\varepsilon$$

En décomposant y, t_α et u_α dans E'', on en déduit

$$\|[(2n+1)z+(I-\pi_p)(y)]+[(\pi_p-\pi_q)(t_\alpha)+(\pi_p-\pi_q)(y)]+(I-\pi_p)(t_\alpha)+\pi_q(t_\alpha)$$

$$-\pi_q(u_\alpha) + \pi_q(y) + (\pi_q-I)(u_\alpha) - x_q\,\| \leq 1+\varepsilon$$

La norme de E'' étant réticulée, on peut sans changer la norme, changer de signe les éléments qui sont dans la bande engendrée par (x_q). D'où

$$\|[(2n+1)z+(I-\pi_p)(y)]+[(\pi_p-\pi_q)(t_\alpha)+(\pi_p-\pi_q)(y)]+(I-\pi_p-\pi_q)(t_\alpha)$$

$$-[\pi_q(y)-\pi_q(u_\alpha)] + (I-\pi_q)\,(u_\alpha) + x_q\,\| \leq 1+\varepsilon$$

En prenant la limite suivant α, on en déduit

$$\|[(2n+1)z+(I-\pi_p)(y)] + 2(\pi_p-\pi_q)(y) + x_q\| \leq 1+\varepsilon$$

ceci pour tout $z \in E, |z| \leq (I-\pi_p)\,|y|$. On a donc

$$\|(2n+2)(I-\pi_p)|y|+2(\pi_p-\pi_q)(y)+x_q\| \leq 1+\varepsilon$$

Les trois termes de la somme ci-dessus sont disjoints ; donc à fortiori on a

$$\|(2n+2)(I-\pi_p)|y| + x_q\| \leq 1+\varepsilon$$

Ceci pour tout ε ; d'où le lemme.

Le lemme implique clairement que $(I-\pi_p)|y| = 0$, donc que $|y| = \pi_p|y|$. Or la suite $\pi_p|y|$ n'est minorée par aucun élément de $E^+ \setminus \{0\}$, et $|y| \in E^+$. On a donc $|y| = 0 = y$. C.Q.F.D.

Remarque : La démonstration ci-dessus est beaucoup plus simple si on suppose E complètement réticulé. Dans le cas général, la difficulté provient de ce que les bandes de E ne sont pas toujours complémentées dans E ; il faut alors se placer dans E" et utiliser des arguments d'approximation.

Dans l'énoncé ci-après, la norme réticulée sur E' est supposée réticulée pour l'ordre dual de l'ordre sur E, et duale en tant que norme d'espace de Banach. On a

Corollaire 9 : Soit E un Banach f.s.c. réticulé. Toute norme sur E' réticulée et duale est la norme duale d'une norme réticulée sur E.

Démonstration : D'après le théorème 8, le prédual G de E' est contenu dans l'espace des formes linéaires continues en ordre sur E', c'est-à-dire E ; on a donc G = E. La norme de E" est réticulée et E est une bande de E" ; on en déduit que E est réticulé pour la norme induite, qui est la norme pré-duale. C.Q.F.D.

Exemples : Il est connu ([17],p.124) que si E est un espace $\mathcal{C}(K)$ muni de sa norme canonique, alors E est isométrique à un dual si et seulement si E est isométrique, pour la norme et pour l'ordre, au dual d'un réticulé. Le corollaire 9 étend ce résultat à toutes les normes sur $\mathcal{C}(K)$ réticulées pour l'ordre canonique (et plus généralement à toutes les normes réticulées pour un ordre dual d'un ordre sur un Banach f.s.c.

réticulé).

- On déduit du corollaire 9 qu'une norme sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$ réticulée pour l'ordre canonique est une norme duale (en tant que Banach) si et seulement si on a $\|\sup(f_n)\| = \sup\|f_n\|$ pour toute suite (f_n) croissante dans $\ell^\infty(\mathbb{N})^+$. Par exemple, la norme $|||(u_n)||| = \|u_n\|_\infty + \lim\sup(|u_n|)$ n'est pas une norme duale.

- Soit K un compact stonien . Si $\mathcal{C}(K)$ admet une norme réticulée pour l'ordre canonique qui soit une norme duale, alors par le théorème 8 K est hyperstonien, donc la norme canonique est une norme duale.

<u>Corollaire 10</u> : Soit E un espace de Banach réticulé, dual d'un espace de Banach X. Alors l'espace des formes linéaires continues en ordre sur E norme E. En particulier, si (x_n) est une suite croissante dans E^+ et si $\sup(x_n)$ existe dans E, on a $\|\sup(x_n)\|=\sup\|x_n\|$.

Soit (X,Σ,μ) un espace fini mesuré à tribu séparable. Il est connu ([14],p. 121) que si une norme réticulée sur $L^\infty(X,\mu)$ qui est invariante par réarrangement - i.e. $\|f\|$ ne dépend que de la distribution de la fonction f - et duale est la norme duale d'une norme sur $L^1(X,\mu)$. Nous allons montrer ce résultat sans hypothèse de réticulation de la norme.

<u>Proposition 11</u> : Soit (X,Σ,μ) un espace mesuré fini à tribu séparable. Soit $|||\cdot|||$ une norme sur $L^\infty(X,\mu)$ telle que les automorphismes de l'espace (X,Σ,μ) induisent des isométries de $(L^\infty, |||\cdot|||)$. Alors $|||\cdot|||$ est une norme duale si et seulement si c'est la norme duale d'une norme sur $L^1(X,\mu)$.

<u>Démonstration</u> : Si $|||\cdot|||$ est une norme duale, le prédual E est unique. Il est donc invariant par les endomorphismes de $L^\infty(X,\mu)'$ qui sont induits par les automorphismes de (X,Σ,μ). Supposons que $f \in E \setminus L^1(\Sigma,\mu)$. On peut écrire $f = g+h$, où $g \in L^1(\Sigma,\mu)$, et où h est dans la bande étrangère à $L^1(\Sigma,\mu)$. Pour simplifier, on n'expose la méthode que si la mesure est diffuse. Il existe une suite décroissante (X_n) de Σ telle que

$\mu(x_n) = 2^{-n}$ et $|h|(\chi_{x_n}) = 1$ pour tout n. Soit S l'ensemble des suites finies de 0 et de 1. Pour s t S, soit $|s|$ sa longueur. Il existe des parties $(A_s)_{s\in S}$ de X avec $\mu(A_s) = 2^{-|s|}$ et $A_{s,0} \subset A_s, A_{s,1} \subset A_s$. Il est facile de voir que pour toute suite $\sigma \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, il existe un automorphisme T_σ de (X,Σ,μ) tel que si on pose $\sigma|n=(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ on ait $T_\sigma(X_n) = A_{\sigma/n}$ pour tout n. Pour $\sigma \neq \tau$, on a: $T_\sigma(h)$ et $T_\tau(h)$ sont étrangers. En effet si n est tel que $\sigma/n \neq \tau/n$, on a

$$|T_\sigma(h)|(A_{\sigma/n}) = 1, \quad |T_\tau(h)(A_{\tau/n})| = 1$$

Puisque la boule B de $L^\infty(\Sigma,\mu)$ est $\sigma(L^\infty,E)$ compacte, il est alors facile de voir que l'image de l'application $\varphi : B \longrightarrow \mathbb{R}^{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$ qui envoie k sur $(T_\sigma(f)(k))_{\sigma\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$ contient $[-|h|,|h|]^{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$. Ceci est absurde pour des raisons de cardinalité. Q.E.D.

<u>Remarque</u> : Déduisons de la proposition 11 une caractérisation de la norme canonique de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Considérons l'ensemble $\mathcal{N}$ des normes équivalentes sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$ telles que $\|(1,1,1,\dots)\| = 1$. Alors la norme canonique de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ est la plus petite norme de $\mathcal{N}$ duale et invariante par les permutations de $\mathbb{N}$; en d'autres termes, le cube $[-1,+1]^{\mathbb{N}}$ est la plus grande boule unité de dual invariante par permutation, et telle que $\|(1,1\dots,1,\dots)\| = 1$ pour normaliser.

IV. <u>ESPACES A DEGRE DE NON-REFLEXIVITE FINI.</u>

Pour tout Banach X, appelons R(X) l'espace $X''/_X$. On dit [5] que X a un degré de non-réfléxivité fini s'il existe un entier k_o tel que $R^{(k_o)}(X) = \{0\}$. La notation $E^{(i)}$ $(i \geq 0,\ i \in \mathbb{N})$ désigne le dual d'ordre i de $E = E^{(o)}$.

Il est montré dans [5] que tout espace de Banach B-convexe- c'est-à-dire qui ne contient pas les espaces $\ell^1_n (n \in \mathbb{N})$ uniformément - a un degré de non-réfléxivité fini. On a le

<u>Théorème 12</u> : Soit E un espace de Banach à degré de non-réfléxivité fini. On a :

1) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'espace $E^{(i)}$ est l'unique prédual de $E^{(i+1)}$.

2) Toute bijection isométrique de $E^{(i)}$ est la i-transposée d'une isométrie de E.

Démonstration : Il est montré dans [7] (théorème 10) que si E' ne contient pas de sous-espace isomorphe à $\ell^1(\mathbb{N})$, alors E est l'unique prédual de E' et toute bijection isométrique de E' est la transposée d'une isométrie de E. Il suffit donc de montrer que si E a un degré de non-réfléxivité fini, alors $\ell^1(\mathbb{N}) \not\subset E^{(i)}$ pour tout $i \geq 0$. Or, si X est un sous-espace de E, l'espace $X''/_X$ s'identifie à un sous-espace de $E''/_E$ et donc la propriété "avoir un degré de non-réfléxivité fini" est héréditaire. On en déduit que $\ell^1(\mathbb{N}) \not\subset E$, et avec la même démonstration que $\ell^1(\mathbb{N}) \not\subset E^{(2n)}$ pour tout n. Mais on a toujours $\ell^1(\mathbb{N}) \not\subset Y' \Rightarrow \ell^1(\mathbb{N}) \not\subset Y$, et donc $\ell^1(\mathbb{N}) \not\subset E^{(i)}$ pour tout $i \geq 0$.

C.Q.F.D.

Notons que chacune des hypothèses suivantes, de nature locale, implique que l'espace E est l'unique prédual de E' :

1) E ne contient pas ℓ^1_n uniformément.

2) E a une structure locale inconditionelle et ne contient pas ℓ^∞_n uniformément.

3) E est un espace $\mathcal{L}^1$.

V. UNE QUESTION OUVERTE.

Les résultats démontrés dans ce travail, joints à ceux qui ont été obtenus précédemment [7],[8],[9] amènent à se poser la question centrale suivante : Soit E un espace de Banach qui ne contient pas $c_o(\mathbb{N})$. L'espace E est-il l'unique prédual de son dual E' ?

Cette question n'est pas résolue. Nous présentons ci-dessous quelques résultats partiels dans cette direction.

Théorème 13 : Soit E un espace de Banach. Soit G un prédual de l'espace E', distinct de E. Si la codimension de $E \cap G$ dans E est finie, alors l'espace $E \cap G$ contient un sous-espace isomorphe à $c_o(\mathbb{N})$.

Démonstration : Si $E \neq G$, le théorème de Banach-Dieudonné montre qu'il existe un ensemble filtrant (y_α) dans E'_1, qui tend vers 0 dans $(E'_1, \sigma(E',E))$, et qui tend vers $y \neq 0$ dans $(E'_1, \sigma(E',G))$. Soit $x \in E$, $\|x\| < 1$, tel que $y(x) > \beta > 0$. On va montrer que pour tout n, il existe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans $E \cap G$ tels que

$$\|x_i\| > \beta \text{ pour tout } i \leq n$$

$$\|x + \sum_{i\in I} x_i\| < 1 \ \forall\ I \subset \{0,\dots,n\}$$

Il est standard d'en déduire que $c_o(\mathbb{N}) \subset E \cap G$. Supposons la construction réalisée à l'ordre n. Soient $z_1, z_2, \dots, z_q \in E'$ tels que $E \cap G = \bigcap_{j=1}^{q} \operatorname{Ker}(z_j)$. Soit H l'espace engendré par x et les $(x_i)_{i \leq n}$. Le principe de réfléxivité locale montre qu'il existe un opérateur $T_1 : H \longrightarrow G$ tel que $H_1 = T_1(H)$ soit une $(1+\varepsilon)$ -copie de H, et tel que

a) T_1 soit l'identité sur $H_1 \cap E = H \cap G$.

b) $T_1'(z_j) = z_j\ \forall j,\ 1 \leq j \leq q$; $T_1'(y) = y$.

Comme $y(T_1(x)) = y(x)$, il existe α_o tel que $y_{\alpha_o}(T_1(x)) > \beta$, et $|y_{\alpha_o}|_H| < \varepsilon'$.

En appliquant à nouveau le principe de réfléxivité locale, il existe un opérateur $T_2 : H_1 \longrightarrow E$ tel que $H_2 = T_2(H_1)$ soit une $(1+\varepsilon)$-copie de H_1, et tel que

1) T_2 soit l'identité sur $H_1 \cap E = H_2 \cap G$

2) $(T_2)'(z_j) = z_j$; $(T_2)'(y_{\alpha_o}) = y_{\alpha_o}$.

Soit T_3 l'opérateur $T_2 \circ T_1$. L'opérateur T_3 laisse les (x_i) $(i \leq n)$ invariants. On a de plus $z_j(T_3(x)) = z_j(x)$ pour tout j, $1 \leq j \leq q$. Enfin, on a $y_{\alpha_o}(T_3(x)) > \beta$ et $|y_{\alpha_o}(x)| < \varepsilon'$, d'où $y_{\alpha_o}(T_3(x)-x) > \beta$ si on a choisi ε' assez petit. On a

$$\|T_3(x) + \sum_{i\in I} x_i\| < 1 \quad \forall\ I,\ I \subset \{0,\dots,n\}$$

si on a choisi ε assez petit. Posons $x_{n+1} = T_3(x)-x$. On a $z_j(T_3(x)-x)=0$ pour tout j, donc $x_{n+1} \in E \cap G$. De plus, on a $y_{\alpha_o}(x_{n+1}) > \beta$, donc $\|x_{n+1}\| > \beta$ puisque $\|y_{\alpha_o}\| \leq 1$. Enfin, on a

$$\|x + \sum_{i\in J} x_i\| < 1 \text{ pour tout } J \subset \{0,\dots,n+1\}$$

En effet, si $(n+1) \notin J$, c'est l'hypothèse de récurrence, et si $(n+1) \in J$, l'inégalité s'écrit

$$\| T_3(x) + \sum_{i \in J, i \neq n+1} x_i \| < 1.$$

C.Q.F.D.

Le théorème 13 montre que s'il existe un espace E qui ne contient pas $c_o(\mathbb{N})$ mais qui n'est pas unique prédual de son dual, alors son "compagnon" G sera nécessairement éloigné de E ; on ne peut construire G à partir de E par extrapolation sur un nombre fini de dimensions ; cette méthode de construction ne peut, dans ce cadre, donner de résultat.

Le candidat-exemple ,

Terminons par l'exposé d'une méthode qui vise à construire un espace de Banach "générique" qui n'est pas l'unique prédual de son dual.

La construction que nous exposerons pourrait sembler bien arbitraire ; mais elle est en fait très naturelle si l'on examine quelle doit être la structure d'un espace E tel qu'il existe un autre prédual G de E'. (On suppose E et G séparables en norme)

Soit x un élément de E de norme 1. Il existe une suite $y(1;n)$ de G, avec $\|y(1,n)\| = 1$, $\lim_{\mathcal{U}_1} y(1;n) = x$ au sens de $\sigma(E'',E')$, pour un ultrafiltre $\mathcal{U}_1$.

Puisque G est prédual de E', le principe de réfléxivité locale montre qu'il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}_2$, des éléments $x(1,2;n,m)$ de $E(m>n)$ tels que pour tout n, $\lim_{\mathcal{U}_2} x(1,2;n,m) = y(1,n)$, et que l'espace engendre par les $x(1,2;n,m)$ pour $n < m$ soit presque isométrique à l'espace engendré par les $y(1,n)$ pour $n \leq m$. Puisque E est un prédual de E', on peut trouver un ultrafiltre $\mathcal{U}_3$, des suites $y(3;p)$ et $(y(1,2,3;n,m,p))_p (n<m<p)$ de sorte que l'espace engendré par, $y(3;p)$ et les $y(1,2,3;n,m,p)$ pour $n,m < p$ soit presque isométrique à l'espace engendré par x et les $x(1,2;n,m)$ pour $n,m < p$, et que $\lim_{\mathcal{U}_3} y(3,p) = x$, $\lim_{\mathcal{U}_3} y(1,2,3;n,m,p) = x(1,2,3;n,m,p)$.

Puisque E est prédual de E', il existe des suites

$x(1,4;n,q)$, $x(3,4;p,q)$, $x(1,2,3,4;n,m,p,q)$ $(n<m<p<q)$ de E telles que l'espace engendré par les $x(1,4;n,q)$, $x(3,4,p,q)$, $x(1,2,3,4;n,m,p,q)$ pour $n,m,p<q$ soit presque isométrique à l'espace engendré par les $y(1,n)$, $y(3,p)$, $y(1,2,3;n,m,p)$ pour $n,m,p < q$, et un ultrafiltre $\mathcal{U}_4$ tels que

$$\lim_{q\to\mathcal{U}_4} x(1,4;n,q) = y(1,n) \; ; \; \lim_{q\to\mathcal{U}_4} x(3,4;p,q) = y(3,p)$$

$$\lim_{q\to\mathcal{U}_4} x(1,2,3,4;n,m,p,q) = y(1,2,3;n,m,p).$$

Et l'on itère... Pour une suite finie s désignons par $|s|$ sa longueur, et par s^* son dernier terme.

Désignons par S l'ensemble des suites croissantes de longueur paire, et par H l'ensemble des suites croissantes finies de longueur paire où les termes de rang pair sont pairs et les termes de rang impairs sont impairs. Et l'on construit dans E des éléments $x(h;s)$, pour $h \in H$, $s \in S$, $|s|=|h|$. Pour simplifier, si $s \in S$, on désigne pas s,n la suite obtenue en concatenant s et n. La construction peut-être effectuée de sorte que les conditions suivantes soient réalisées :

(A). Si b est pair, il existe un ultrafiltre $\mathcal{U}$ tel que pour $h \in H$, $s \in S$, $|h| = |s|$, a impair, $h^* < a < b$; $s^* < n < m$ on ait

$$\lim_{m\to\mathcal{U}} x(h,a,b;s,n,m) = y(h,a;s,n)$$

(B). Il existe un opérateur linéaire T_m défini sur l'espace engendré par les $x(h,a,b;s,n,m)$ pour $h^* < a < b$; $s^* < n < m$ tel que

$$T_m(x(h,a,b;s,n,m)) = y(h,a;s,n)$$

avec

$$\|u\|(1-2^{-m}) \leq \|T_m(u)\| \leq \|u\|(1+2^{-m})$$

pour tout u sur lequel T_m est défini.

(C). Pour a impair il existe un ultrafiltre $\mathcal{V}$ tel que pour $h \in H$, $s \in S$, $|h|=|s|$, a impair, $h^* < a$, $s^* < n$ on ait

$$\lim_{n\to\mathcal{V}} y(h,a;s,n) = x(h,s).$$

(D). Il existe un opérateur linéaire U_n de l'espace engendré par les $y(h,a;s,n)$ pour $h^* < a$, $s^* < n$ tel que

$$U_n(y(h,a;s,n)) = x(h,s)$$

et que

$$\|u\|(1-2^{-n}) \leq \| U_n(u)\| \leq \|u\| (1+2^{-n})$$

là où U est défini.

La condition

$$\lim_{n\to\mathcal{V}} \lim_{m\to\mathcal{U}} x(h,a,b;s,n,m) = x(h,s)$$

se traduit par des conditions sur la géométrie de la suite double $(x(h,a,b;s,n,m)-x(h,s))_{n,m}$. Naturellement ces conditions peuvent varier avec h,a,b,s; mais dans la construction qui suivra nous ne les ferons pas varier, car il ne nous a pas semblé que là étaient les véritables obstructions ; on imposera a cette suite de ressembler à la suite $e_{n,m}$ de l'espace auxiliaire H_1 construit ci-dessous.

Pour $h \in H$, $s \in S$ $|h|=|s|$, $h^* < a < b < c$, a,c impairs, b pair, $s^* < n < m < p$ on a

$$\lim_{p\to\mathcal{W}} \lim_{m\to\mathcal{V}} y(h,a,b,c;s,n,m,p) = y(h,a;s,n)$$

De même, on fera se comporter la suite

$$(y(h,a,b,c;s,n,m,p)-y(h,a;s,n))_{m,p}$$

comme la suite $e_{m,p}$ de l'espace auxiliaire H_2. La géométrie de cette suite se reflète sur celle des suites $x(h',s')$ grâce à la condition (B).

Pour $h^* < a < b$; $a < b'$, a impair, b, b' pairs, $s^* < n < m$ on a

$$\lim_{m\to\mathcal{U}} x(h,a,b;\ s,n,m) - x(h,a,b';\ s,n,m) = 0.$$

Ceci impose donc des conditions sur la géométrie de cette suite ; on supposera que cette suite ressemble à la base canonique de $\ell^2(\mathbb{N})$, car il ne nous semble pas que cela soit une restriction sérieuse. Et on fait la même hypothèse pour les suites

$$(y(h,a;s,n)-y(h,a';s,n))_n \quad (h^* < a, h^* < a', s < n)$$

Par contre, il nous semble que supposer ces suites identiquement nulles, ce qui simplifie les choses, est une restriction trop importante qui nuirait de façon essentielle à la généralité.

Puisque la structure importante est celle des x(s,h), il est naturel d'essayer de construire l'espace E autour de cette suite. De plus, puisque l'on veut que E ne contienne pas c_o, il est naturel d'imposer que les x(s,h) ressemblent le plus possible à une base de ℓ^1, c'est-à-dire que la boule unité de E soit la plus petite possible.

1) Espaces auxiliaires H_1 et H_2.

Soit $L = \{(n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid m > n\}$. On note $e_{n,m}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{(L)}$. On considère l'ensemble

$$M_1 = \{\Sigma\, \alpha_i\, e_{n_i,m_i} \in \mathbb{R}^{(L)} \mid \alpha_i \geq 0,\ \Sigma\, \alpha_i^2 \leq 1,\ n_1<m_1<n_2\ldots\}$$

et soit $M_1' = \mathrm{conv}(M_1 \cup - M_1)$.

Le convexe M_1' définit une norme sur $\mathbb{R}^{(L)}$. On note H_1 le complété. On a le

<u>Lemme A</u> : Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$. On a $\lim\limits_{n\to\mathcal{U}}(\lim\limits_{m\to\mathcal{U}} e_{n,m})=0$, où la limite est prise dans H_1'', $\sigma(H_1'', H_1')$.

<u>Démonstration</u> : Dans le cas contraire, il existe $\varphi \in M_1'$, $\alpha > 0$, et une suite (n_p) telle que $\lim\limits_{m\to\mathcal{U}} |\varphi(e_{n_p,m})| > \alpha$ pour tout p. Donc il existe une suite

$$n_p' < m_p < n_{p+1}' < m_{p+1}$$

telle que, par exemple, $\varphi(e_{n_p',m_p'}) > \alpha$.

Mais on a pour tout q

$$zq = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{p\leq q} e_{n'_p,m_p} \in M_1 .$$

et $\varphi(z_q) \geq \alpha\sqrt{q}$, ce qui contredit la continuité de φ.

C.Q.F.D.

L'espace auxiliaire H_2 est construit selon le même principe, en remplaçant la condition $\Sigma\alpha_i^2 \leq 1$ par la condition $\Sigma\,\alpha_i^3 \leq 1$.

2) Construction de l'espace E.

Désignons par I l'ensemble des couples (h,s) où $|h|=|s|$. Dans $\mathbb{R}^{(I)}$ désignons par A l'ensemble A formé des éléments des types suivants :

Type 1 : $x = x(h;s)$ pour $(h,s) \in I$

Type 2 : Si $h \in H$, $s \in S$, $h = (h_1,\dots,h_{2r})$, $s =(s_1,\dots,s_{2r})$, $i \leq r$ $h_{2i} < a < b < h_{2i+1}$, a impair, b pair, et si

$$h' = (h_1,\dots,h_{2i},a,b,h_{2i+1},\dots,h_{2r})$$

A contient l'élément

$$x = \sum_{s_{2i}< n < m < s_{2i+1}} a_{n,m}\, t_{n,m}$$

où

$$\left\| \Sigma\, a_{n,m}\, e_{n,m} \right\|_{H_1} \leq 1 \text{ et}$$

$$t_{n,m}= x(h';s_1,\dots,s_{2i},n,m,s_{2i+1},\dots,s_{2r}) - x(h,s).$$

Type 3 : Si $h \in H$, $s \in S$, $h = (h_1,\dots,h_{2r})$, $s =(s_1,\dots,s_{2r})$, $h_{2i-1}<b<a<h_{2i}$ $(i \leq r)$, b pair, a impair, et si

$$h' = (h_1,\dots,h_{2i-1},a,b,h_{2i},\dots,h_{2r})$$

A contient l'élément

$$x = \sum_{s_{2i-1}<p<q<s_{2i}} b_{p,q}\, u_{p,q}$$

avec $\left\| \Sigma\, b_{p,q}\, e_{p,q} \right\|_{H_2} \leq 1$

et

$$u_{p,q} = x(h';s_1,\dots,s_{2i-1},p,q,s_{2i},\dots,s_{2r}) - x(h,s)$$

(On notera la différence de parité avec le type précédent).

Type 4 : Si $h,h' \in H$, $|h| = |h'| = 2r$ sont tels que seuls les éléments de rang 2p soient différents ($i \leq r$), si $\Sigma c_n^2 \leq 1$, A contient l'élément

$$x=\overline{\sum_{s_{2i-1}<n<s_{2i}}} c_n(x(h;s_1,\ldots,s_{2i-1},n,s_{2i+1},\ldots,s_{2r})-x(h';s_1,\ldots s_{2i-1},n,s_{2i+1},\ldots,s_{2r}))$$

.

Type 5 : Si $h, h' \in H$, $|h|=|h'|= 2r$ sont tels que seuls les termes de rang $2i+1$ soient différents ($i<r$), si $\Sigma c_n^2 \leq 1$, A contient l'élément

$$x = \overline{\sum_{s_{2i}<n<s_{2i+2}}} c_n(x(h;s_1,\ldots,s_{2i},n,s_{2i+2},\ldots,s_{2r})$$

$$- x(h';s_1,\ldots,s_{2i},n,s_{2i+2},\ldots,s_{2r})$$

On pose $B = \mathrm{conv}\,(A\cup -A)$. Ce convexe définit une semi-norme. On désigne par E le séparé complété. Il faut remarquer que dans les types 2 et 3 le coefficient de $x(h;s)$ n'est pas borné (c'est dans la nature des choses). Il en résulte qu'il n'est pas évident que $B \neq \mathbb{R}^{(I)}$, donc que $E \neq \{0\}$. (C'est quand même le cas comme on le verra plus tard). C'est pourquoi l'étude de E est difficile, et a fortiori celle de E'.

Fixons un ultrafiltre $\mathcal{U}$. Pour $(h,s) \in I$, $h^* < a$, a impair, on pose

$$y(h,a;s,n) = \lim_{m\to\mathcal{U}} x(h,a,b;\ s,n,m)$$

dans E", $\sigma(E",E')$, où $b > a$, b pair. Le fait que cette limite ne dépende pas de b résulte de ce que si $b' > a$, b' pair, on a

$$\|\sum_{n<m} c_m(x(h,a,b;s,n,m)-x(h,a,b';s,n,m))\|_E \leq 1$$

si $\Sigma c_m^2 \leq 1$, grâce au type 5 ci-dessus.

On désigne par G le sous-espace fortement fermé de E" engendré par les $y(h,a;s,n)$.

Lemme B : Pour $(h,s) \in I$, $h^* < a$, a impair, on a

$$\lim_{n\to\mathcal{U}} y(h,a;s,n) = x(h,s)$$

dans E", $\sigma(E",E')$

<u>Preuve</u> : Fixons $b > a$ pair; soit $\varphi \in E'$. Il existe $\Psi \in H_1'$ avec

$$\begin{cases} \Psi(e_{n,m}) = \varphi(t_{n,m}) & s^* < n < m \\ \Psi(e_{n,m}) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, si $(a_{n,m}) \in \mathbb{R}^{(L)}$, $\|\Sigma\, a_{n,m}\, e_{n,m}\|_{H_1} \leq 1$, le type 2 montre que $\|\Sigma\, a_{n,m}\, t_{n,m}\|_E \leq 1$, d'où

$$|\Psi(\Sigma\, a_{n,m}\, e_{n,m})| = |\varphi(\Sigma\, a_{n,m}\, t_{n,m})| \leq \|\varphi\|.$$

D'après le lemme A on a

$$\lim_{n\to\mathcal{U}} \lim_{m\to\mathcal{U}} \Psi(e_{n,m}) = 0$$

D'où

$$\lim_{n\to\mathcal{U}} \lim_{m\to\mathcal{U}} \varphi(t_{n,m}) = 0$$

ce qui est le résultat cherché,

<u>Lemme C</u> : La boule unité de G est dense dans celle de E pour $\sigma(E'',E')$.

<u>Preuve</u> : Pour une somme finie $\sum_i \alpha_i\, x(h^i, s^i) \in B$, la définition de A montre que pour a impair, b pair, $\operatorname{Sup}_i h^{i*} < a < b$, on a pour $\sup_i s^{i*} < n < m$:

$$\sum_i \alpha_i\, x(h^i, a, b; s^i, n, m) \in B$$

Passant à la limite en m selon $\mathcal{U}$, on a

$$\Big\| \sum_i \alpha_i\, y(h_i,\ a;\ s_i,\ n)\Big\|_E \leq 1$$

Or, $\lim_{n\to\mathcal{U}} \sum_i \alpha_i\, y(h_i,\ a; s_i, n) = \sum_i \alpha_i\, x(h_i;\ s_i)$

ce qui prouve l'assertion.

<u>Lemme D</u> : Soit $(h,s) \in I$, $h^* < a < b < c$, a,c impairs, b pair, $s^* < n$, on a $\lim_{p\to\mathcal{U}} \lim_{q\to\mathcal{U}} y(h,a,b,c;\ s,n,p,q) = y(h,a;s,n)$

<u>Preuve</u> : Pour $d > c$, impair, $m > q$ on a, d'après le type 3 :

$$\Big\| \sum_{n<p<q<m} b_{p,q}(x(h,a,b,c,d;s,n,p,q,m)-x(h,a,d;s,n,m))\Big\|_E \leq 1$$

pour $$\Big\| \Sigma\, b_{p,q}\, e_{p,q} \Big\|_{H_2} \leq 1,\ (b_{p,q}) \in \mathbb{R}^{(L)}.$$

On a donc

$$\Big\| \sum_{n<p<q} b_{p,q}\ (y(h,a,b,c;s,n,p,q) - y(h,a;s,n)\Big\|_E \leq 1$$

on conclut comme dans le lemme B.

<u>Lemme E</u> : L'espace G est un prédual de E'

<u>Preuve</u> : Soit $\varphi \in E'$. On note $\theta(\varphi)$ la restriction à G de son prolongement à E"; On a $\theta(\varphi) \in G'$, et le lemme C montre que $\|\theta(\varphi)\|_{G'} = \|\varphi\|_{E'}$.

Nous allons montrer que θ est surjective. Soit $\Psi \in G'$, $\|\Psi\| \leq 1$. On peut définir $\varphi \in E'$ sur la base canonique de $\mathbb{R}^{(I)}$ par $\varphi(x(h;s)) = \lim\limits_{n\to\mathcal{U}} \Psi(y(h,a;s,n))$.
En effet, si $(\alpha_i) \in \mathbb{R}^{(I)}$, et

$\|\Sigma\, \alpha_i\ x(h^i,s^i)\|_E \leq 1$, on a $\|\Sigma\, \alpha_i\ y(h^i,a;\ s^i,\ n)\|_G \leq 1$

pour a convenable, n assez grand, comme il a été montré dans la preuve du lemme C, d'où

$$|\Psi(\Sigma\, \alpha_i\ y(h^i,a;s^i,n)| \leq 1$$

soit à la limite

$$|\varphi(\Sigma\, \alpha_i\ x(h^i,\ s^i)| \leq 1$$

D'autre part, le lemme D montre que

$$\theta(\varphi)(y(h,a;s,n)) = \lim_{m\to\mathcal{U}} \lim_{p\to\mathcal{U}} \Psi(y(h,a,b,c;s,n,m,p)) = \Psi(y(h,a;s,n)$$

d'où $\theta(\varphi) = \Psi$.

<u>Lemme F</u> : Les deux sous-espaces E et G de E" sont distincts (donc $E \neq \{0\}$!)

<u>Preuve</u> : Posons

$$\varphi_\ell(x(h,s)) = 1 \text{ si } \exists\, i \leq k;\ s_{2i-1} < \ell \leq s_{2i}$$

$$\varphi_\ell(x(h,s)) = 0 \text{ sinon}$$

On étends φ_ℓ par linéarité à $\mathbb{R}^{(I)}$, et on vérifie que $|\varphi_\ell(x)| \leq 1$ pour $x \in A$. Il faut pour cela examiner tous les cas. Le point crucial, qui a motivé le choix de H_1, H_2, est que

$$\| \Sigma\, a_{n,m}\, e_{n,m} \|_{H_1} \leq 1 \Rightarrow \sum_{\substack{n\leq\ell \\ m\geq\ell}} |a_{n,m}| \leq 1$$

$$\| \Sigma\, b_{n,m}\, e_{n,m} \|_{H_2} \leq 1 \Rightarrow \sum_{\substack{n\leq\ell \\ m\geq\ell}} |b_{n,m}| \leq 1$$

Si $n < \ell \leq m$ on a $\varphi_\ell(x(h;n,m)) = 1$ pour $|h| = 2$. Ainsi à la limite, $\varphi_\ell(y(a;n))=1$ si $s_1 < \ell$, a impair. Soit φ une valeur d'adhérence des φ_ℓ dans E''', $\sigma(E''',E'')$. On a $\varphi\ (y(a,n)) = 1\ \forall a,\ \forall n$. Mais d'autre part, $\varphi = 0$ sur E. Donc $y(1,1) \in G \setminus E$. Q.E.D.

<u>Conjecture</u> : E ne contient pas c_o.

Quelques commentaires pour terminer. Quoique les préduaux E et G de E' aient une position différentes dans E'', il ne s'ensuit pas qu'ils ne sont pas isométriques. Toutefois le sous-espace de E engendré par les éléments $(x(1,2;n,m)-x(\not{\emptyset},\not{\emptyset}))|_{(n,m)\in L}$ est isomorphé à H_1. Mais il n'y a pas de raison pour que G contienne un sous-espace isomorphe à H_1.

<u>Conjecture</u> : E et G ne sont pas isomorphes

⁂

Bibliographie :

[1] T. Ando, On the predual of H^∞(Commentationes Mathematicae Special, I Warsaw, 1978).

[2] J. Bourgain, Un espace $\mathcal{L}^\infty$ jouissant de la propriété de Schur et de la propriété de Radon-Nikodym, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle de l'Ecole Polytechnique, année 1978-1979, Exposé n°4.

[3] L. Brown, T. Ito, Classes of Banach spaces with unique isometric preduals, à paraître in Pacific Journal of Mathematics.

[4] J.P.R. Christensen Topology and Bord structure North Holland Mathematics Studies.

[5] W.J. Davis, W.B. Johnson, J. Lindenstrauss, the ℓ^1_n problem and degrees of non-reflexivity, Studia Math. 55 (1976) p. 123-139.

[6] G. Godefroy, Etude topologique des éléments du bidual de certains espaces de Banach, Note aux C.R. Acad. Sci. Paris, t.287 (20/11/1978).

[7] G. Godefroy, Espaces de Banach : Existence et Unicité de certains preduaux, Annales de l'Institut Fourier, tome XXVIII, Fascicule 3, 1978.

[8] G. Godefroy, Points de Namioka, Espaces normants, applications à la théorie isométrique de la dualité, à paraître in Israel Journal of Mathematics.

[9] G. Godefroy, Propriétés de la classe des espaces de Banach qui sent unique prédual de leur dual à paraître.

[10] G. Godefroy, M. Talagrand, Classes d'espaces de Banach à prédual unique, Note aux C.R. Acad. Sci. Paris t. 292 (2/2/1981).

[11] A. Grothendieck, Une caractérisation vectorielle métrique des espaces L^1, Canadian Math. J. 7 (1955), p. 552-561.

[12] W.B. Johnson, L. Tzafriri : Some more Banach spaces which do not have local inconditionnal structure, Houston J. Math, 3 p. 55-60 (1977).

[13] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Classical Banach spaces,volume 1 , Sequence spaces, Springer Verlag 92, 1977.

[14] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Classical Banach spaces Volume II, Fonction spaces, Springer Verlag 97 (1979).

[15] A. Pelezinski, Banach spaces on which every inconditionally converging operator is weakly compact, Bull. Acad. Sc. Pol. Serie des Sc. Math. astr. Phys. 10 (1962). p. 641-648.

[16] S. Sakai, C^* algebras and W^* algebras, Springer-Verlag Berlin (1971).

[17] M.M. Schaeffer, Banach lattices and positive operators Springer-Verlag n° 215 (1974).

[18] M. Takesaki, On the conjugate space of an operator algebra, Tohoku Math. J. 10 (1958) p. 194-203.

[19] M. Talagrand, Les fonctions affines sur $[0,1]^{\mathbb{N}}$ ayant la propriété de Baire faible sont continues Séminaires Choquet 1975-76, communication n° 7.

[20] M. Talagrand, Propriété de Baire forte et fonctions continues, à paraître dans Fund-Math.

[21] A.W. Wickstead, A characterization of weakly sequentially complete Banach lattices Ann. Inst. Fourier, Grenoble 26, 2 (1976) p. 25-28.

***

Erratum à l'exposé n° VI

Une imprécision s'est glissée dans l'article ci-dessus. En effet s'il existe un cardinal mesurable K, alors l'espace $\ell^1(K)$ est un espace f.s.c. reticulé qui n'a pas la propriété (X), ainsi que nous l'a fait remarquer G.A. Edgar ; il semblerait d'ailleurs que l'existence d'un espace f.s.c. reticulé qui n'a pas la propriété (X) est équivalente à l'existence d'un cardinal mesurable. Au vu de cet exemple, il convient, si l'on s'intéresse aux "gros" espaces de Banach de modifier l'article ci-dessus en définissant la propriété (X) à l'aide de familles f.i.c., dénombrables ou non. Cette définition coïncide bien sûr avec la définition 3 pour les espaces séparables. L'ensemble des démonstrations et des résultats de cet article s'adapte identiquement, aux notations près, à ce nouveau cadre.