Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

J. P. Kahane

Polynômes à coefficients unimodulaires sur le cercle unité

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1979-1980), exp. n° 9, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1979-1980____A8_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E

1979-1980

POLYNOMES À COEFFICIENTS UNIMODULAIRES SUR LE CERCLE UNITE

J. P. KAHANE

(Université Paris-Sud, Orsay)

Exposé No IX

4 Janvier 1980

L'exposé a pour objet le théorème suivant : il existe une suite de polynômes

$$(1) \qquad P_n(z) = \sum_{m=1}^{n} a_{m,n} z^m \qquad (|a_{m,n}| = 1,\ n = 1,2,\ldots)$$

et une suite ε_n positive tendant vers 0, telles que pour tout z de module 1 on ait

$$(2) \qquad (1 - \varepsilon_n)\sqrt{n} \le |P_n(z)| \le (1 + \varepsilon_n)\sqrt{n} \ .$$

Il y a deux inégalités dans (2). La seconde signifie

$$(3) \qquad \|P_n\|_\infty \le (1 + \varepsilon_n)\ \|P_n\|_2 \ ,$$

les normes étant celles de L^∞ et L^2 sur le cercle muni de la mesure de Haar. Le premier résultat dans cette direction est dû à Hardy et Littlewood (Acta Math. 37, 1914, p. 193) : il existe un $B > 0$ et une suite de polynômes $P_n(z)$ de la forme (1) tels que

$$(4) \qquad \|P_n\|_\infty \le B\ \|P_n\|_2 \qquad (n \ge n_o(B)) \ .$$

Evidemment $B \ge 1$, et même $B > 1$. On a posé la question : quelle est la borne inférieure des B possibles ? (Erdös, Michigan Journal, 4, 1957, problème 22). Le meilleur résultat connu jusqu'ici était qu'on peut choisir $B = 1{,}1717$ (E. Beller, Proceedings Amer. Math. Soc. 30, 1971). La solution du problème d'Erdös est d'après notre théorème inf $B = 1$.

La solution du problème d'Erdös ne nécessite que la partie la plus facile (la majoration). Jusqu'en 1979 (T. Körner, travail à paraître), on ne savait pas construire une suite de polynômes $P_n(z)$ telle que

$$(5) \qquad \inf_{|z|=1} |P_n(z)| \ge A\sqrt{n} \ , \quad A > 0 \text{ constante} \ .$$

Littlewood avait posé une série de questions à ce sujet (cf. son livre paru chez Heath, 1968, problème 19). Körner a montré qu'il existe deux constantes positives A et B, et une suite de polynômes $P_n(z)$ telle que

$$(6) \qquad A\sqrt{n} \le |P_n(z)| \le B\sqrt{n} \ .$$

C'est son travail qui est à l'origine du mien.

L'idée classique dans ce genre de questions est de considérer des polynômes

$$P_n(z) = \sum_{m=1}^{n} \exp(\pi i\, f(m))\, z^n \quad , \tag{7}$$

où f(m) est une forme quadratique convenablement choisie (dépendante de n). Cela permet d'obtenir (2) quand on exclut un voisinage du point $z = 1$ (Littlewood), mais dans ce voisinage $P_n(z)$ oscille beaucoup.

Körner utilise au lieu du polynôme (7) des polynômes, plus compliqués, introduits par J.S. Byrnes (Bulletin London Math. Soc. 9, 1977). Les polynômes de Byrnes n'ont plus leurs coefficients de module 1, amis, grâce à d'astucieuses compensations, on obtient pour eux les inégalités (6) sur tout le cercle. L'idée principale de Körner est d'ajouter un polynôme trigonométrique aléatoire qui amène à la même valeur tous les modules des coefficients, sans trop perturber le comportement sur le cercle $|z| = 1$.

Nous partirons d'un ingrédient plus simple que les polynômes de Byrnes (le lemme 3) : ce sont des polynômes dont on contrôle bien le module sur $|z| = 1$, et le module des coefficients. La perturbation aléatoire permet d'obtenir tout de suite la solution du problème d'Erdös. Mais le module de ces polynômes est très proche de 0 au voisinage d'un point ; la compensation peut se faire encore par un procédé aléatoire, beaucoup plus délicat. J'essaierai de donner une idée des preuves. Elles sont développées dans un article à paraître dans un journal de la London Mathematical Society.

Avant de passer aux preuves, voici encore quelques commentaires.

Si on choisit pour coefficients de $P_n(z)$ des variables aléatoires X_m indépendantes, de module 1 et d'espérance nulle, on obtient assez probablement

$$\|P_n\|_\infty \leq B \sqrt{n \log n}$$

(c'est très classique pour des variables symétriques, et vrai en général comme l'a observé Körner). La formulation précise, que j'emprunte à Körner, est donnée dans le lemme 1.

Si on choisit $X_m = \pm 1$, et si $a_1, \ldots, a_n$ sont donnés, on a probablement

$$\| \sum_{m=1}^{n} X_m a_m e^{2\pi i m t} \|_\infty \leq B \sqrt{\sum |a_m^2|} \sqrt{\log n} \quad .$$

Ce résultat classique est à la base du lemme 2.

Il est clair que, sauf pour $n = 1$, $|P_n(z)|$ ne peut pas être constant sur le cercle $|z| = 1$ quand $P_n(z)$ est de la forme (1). En écrivant le développement de Fourier de $|P_n(e^{2\pi i t})|^2$, on vérifie que dans (2) on a forcément $\varepsilon_n \geq \frac{1}{3n}$. En soignant la démonstration du théorème, on voit qu'on peut choisir $\varepsilon_n = \mathcal{O}(n^{-1/17} \sqrt{\log n})$.

Voici un résultat simple et intéressant, dû à H.S. Shapiro (1951), retrouvé par W. Rudin (1959) ; la version que je donne est celle de S. Pichorides (1980)♦. Si $n = 2^j$, il existe un choix des $\varepsilon_m = \pm 1$ tel que

$$P_n(z) = \sum_{m=1}^{n} \varepsilon_m z^m$$

vérifie

$$|P_n(z)|^2 + |P_n(-z)|^2 = 2n \quad .$$

[Preuve : $P_1(z) = z$, $P_{2n}(z) = P_n(z^2) + z^{-1} P_n(-z^2)$, et l'égalité du parallélogramme.] Ainsi, des polynômes trigonométriques à valeurs dans $\mathbf{R}^4$ euclidien peuvent avoir leur norme euclidienne constante, sans être constants ni réduits à des monômes. Je ne connais pas la situation dans $\mathbf{R}^3$ euclidien.

Pour les polynômes à coefficients ± 1, on a grâce aux polynômes de Shapiro l'analogue du théorème de Hardy et Littlewood (4), mais la réponse au problème d'Erdös est inconnue. On ne sait pas si (5) peut avoir lieu, et a fortiori si l'analogue du théorème de Körner (6) est valable.

Voici un aperçu des preuves. On change de notations.

♦ S. Pichorides m'informe de la priorité de J. Brillhart et L. Carlitz, Proc. Amer. Math. Soc. 25 (1970) 114-118.

Lemme 1 : Soit $X_1, X_2, \ldots, X_N$ une suite de variables aléatoires naturellement indépendantes, telles que $E(X_n) = 0$ et $|X_n| \leq 1$, et $\lambda > 0$. Alors

$$\Pr\left(\left\| \sum_{n=1}^{N} X_n \exp(2\pi i n x) \right\|_\infty \geq \lambda \sqrt{N \log N} \right) \leq 4\pi \, N^{2-\lambda^2/32} \quad .$$

Lemme 2 : Etant donné un polynôme trigonométrique

$$\sigma(x) = \sum_{n=K+1}^{K+N} \hat{\sigma}_n \exp(2\pi i n x) \quad , \quad 0 \leq \alpha \leq |\hat{\sigma}_n| \leq \beta$$

il existe un polynôme trigonométrique

$$\rho(x) = \sum_{n=K+1}^{K+N} \hat{\rho}_n \exp(2\pi i n x)$$

tel que $|\hat{\sigma}_n + \hat{\rho}_n| = \beta$ pour tout n $(K+1 \leq n \leq K+N)$, et

$$\|\rho\|_\infty \leq 10 \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} \sqrt{N \log N} \quad .$$

On a déjà parlé de ces deux lemmes. Le lemme suivant part de l'observation

$$\mathfrak{F} : \exp(\pi i a x^2) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} \exp(-\frac{\pi i}{4}) \exp(\pi i \, \frac{x^2}{a})$$

où $\mathfrak{F}$ est la transformée de Fourier et $a > 0$. Par des convolutions convenables et la formule de Poisson, on obtient ceci :

Lemme 3 : Soit a un entier positif pair, $0 < d < \frac{1}{3}$, χ_d la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]$, φ_o une fonction à variation bornée V portée par l'intervalle $[\frac{1}{2}(-1+3d), \frac{1}{2}(1-3d)]$. On pose

$$\varphi = d^{-3} \, \chi_d * \chi_d * \chi_d * \varphi_o$$

$$\hat{q}_n = \frac{1}{\sqrt{a}} \exp(\frac{\pi i}{4}) \exp(-\pi i \frac{n^2}{a}) \varphi(\frac{n}{a})$$

$$q(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{q}_n \exp(2\pi i n x) \quad .$$

Le polynôme trigonométrique $q(x)$ est de degré $\leq a$ et vérifie pour $|x| \leq \frac{1}{2}$

$$q(x) = \exp(\pi i a x^2) \, \varphi(x) + r(x) \quad , \quad |r(x)| \leq \frac{V}{\pi a d^2} \quad .$$

La première signification du lemme 3 est qu'on a un bon contrôle (et presque par la même fonction) pour le module de q(x) et pour le module de $\hat{q}_n$ (voir figure 1). Cela suffit pour la solution du problème

$$\frac{1}{a}\,\varphi\left(\frac{n}{a}\right) = |\hat{q}_n|$$

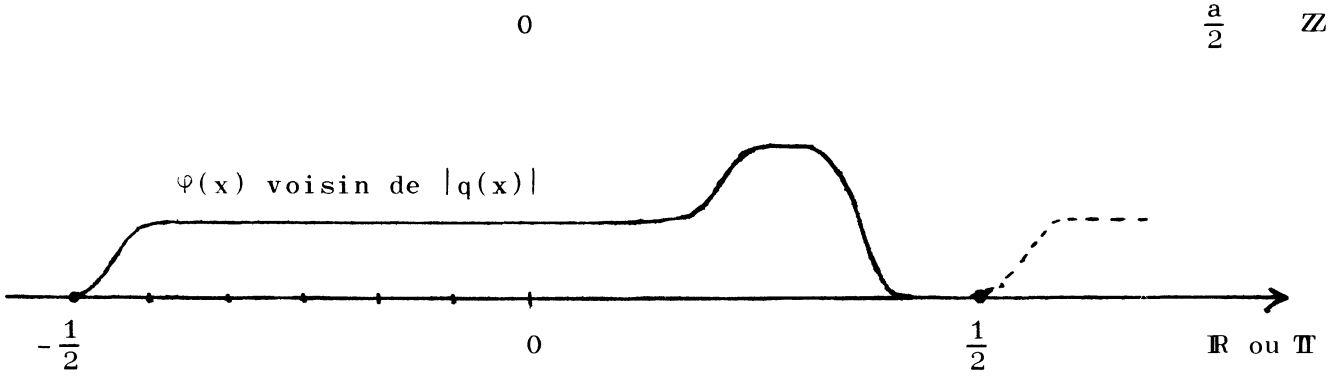

Figure 1

d'Erdös. Pour le théorème, on a besoin de la connaissance de la phase de $q(x) - r(x)$. Dans les applications, φ_o sera toujours une fonction indicatrice d'intervalle (donc $V = 2$), et ad^2 sera très grand.

Les lemmes 2 et 3 donnent tout de suite la solution du problème d'Erdös. On choisit pour φ_o la fonction indicatrice de l'intervalle $[\frac{1}{2}(-1+3d), \frac{1}{2}(1-3d)]$, donc φ et $\hat{q}$ comme sur la figure 2.

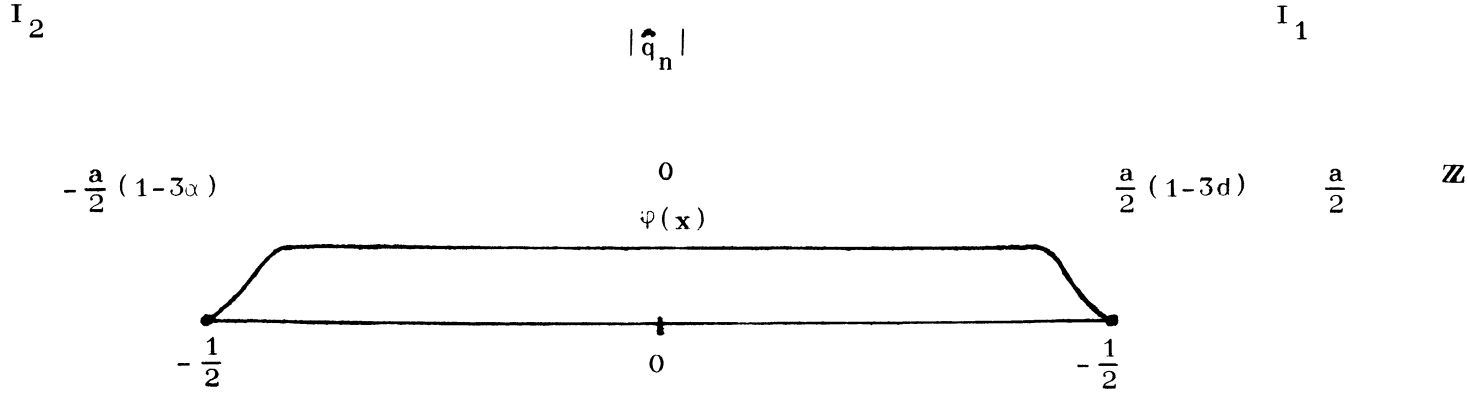

Figure 2

On pose

$$\sigma_j(x) = \sum_{n\in I} \hat{q}_n \exp(2\pi i n x) \qquad (j = 1,2)$$

I_1 et I_2 étant les intervalles figurés, de longueur 3da. On applique le lemme 2 avec $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{\sqrt{a}}$, ce qui donne $\rho_j(x)$. On pose

$$p(x) = q(x) + \rho_1(x) + \rho_2(x) \quad .$$

On a

$$p(x) = \sum_{|n|\le \frac{a}{2}} \hat{p}_n \exp(2\pi i n x) \qquad |\hat{p}_n| = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$p(x) = \exp(\pi i a x^2)\, \varphi(x) + r(x) + \rho_1(x) + \rho_2(x)$$

$$\|r + \rho_1 + \rho_2\|_\infty \le \frac{1}{\pi a d^2} + 20\sqrt{3d \log(3\,da)} \quad .$$

Par un choix convenable de d, ce second membre est petit quand a est grand, donc $\|p\|_\infty / \|p\|_2$ est voisin de 1.

Pour la démonstration du théorème, un autre lemme est utile.

Lemme 4 : Soit I un intervalle de longueur ℓ, h(x) une fonction à valeurs complexes définie sur I, dérivable, vérifiant

$$|h(x)| \le 1 \quad \text{et} \quad |h'(x)| \le \Delta \quad \text{quand} \quad x \in I$$

$$|h(x)| = 1 \quad \text{quand } x \in \partial I,$$

$0 < \varepsilon < \frac{1}{5}$, m entier, tel que $m\varepsilon \ge 1$ et $\Delta\ell \ge m\varepsilon^2$. Alors il existe une fonction f à valeurs complexes, définie sur $\mathbf{R}$, continue et dérivable par morceaux sur $\mathbf{R}$, nulle en dehors de I, telle que

$$1 - 8\varepsilon \le |f(x) + h(x)| \le 1 + 8\varepsilon \qquad (x \in I)$$

$$|f'(x)| \le 7\,\frac{m}{\ell\varepsilon}$$

$$|\hat{f}(u)| \le 200\,\ell\, m^{-1/2} (\log m)^{1/2} \quad .$$

La preuve de ce lemme est délicate. On partage I en m intervalles égaux, dont les extrémités sont $x_0, x_1, \ldots, x_m$. On définit $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{m-1}$ comme m-1 variables aléatoires complexes indépendantes, de module 1, la distribution de Z_j étant la mesure harmonique μ_j sur le cercle unité dont la valeur moyenne est $h_j = (1-\varepsilon)\, h(x_j)$. On définit la fonction aléatoire $G(x)$ $(x \in I)$ de la façon suivante :

$$G(x_o) = h(x_o) \qquad G(x_j) = Z_j \quad (j = 1,2,\ldots,m-1) \quad , \quad G(x_m) = h(x_m) \quad ;$$

$G(x)$ est continue et de module 1 ; sur chacun des intervalles $[x_o, x_1]$ et $[x_{m-1}, x_m]$, l'argument de $G(x)$ varie linéairement et de façon minimale ; sur les autres intervalles $[x_j, x_{j+1}]$, $G(x)$ se trouve sur l'arc $\overset{\frown}{Z_j\, Z_{j+1}}$ de μ_j-mesure inférieure à $\frac{1}{2}$, et varie de telle façon que la μ_j-mesure de $\overset{\frown}{Z_j\, G(x)}$ soit proportionnelle à $x - x_j$. On démontrer que $|EG(x) - h(x)| \leq 8\varepsilon$; c'est le fait essentiel. On contrôle bien la dérivée de $G(x)$. En raffinant le partage $x_o, x_1, \ldots, x_m$ on peut étudier, grâce au lemme 1, la transformée de Fourier de la fonction nulle hors de I et égale à $G(x) - EG(x)$. On voit ainsi qu'avec une probabilité positive la fonction $f(x) = G(x) - EG(x)$ vérifie la conclusion du lemme.

Pour démontrer le théorème, on utilisera les lemme 2, 3, 4. Les signes >> et << vont signifier "beaucoup plus grand" et "beaucoup plus petit" dans un sens à préciser (<< est beaucoup plus exigeant que le symbole o de Landau) ; ils visent à donner une idée des ordres de grandeur.

On choisit a grand, $a_1 >> a$, et $d >> a^{-1/2}$. On désigne par N la partie entière de $\frac{1}{2}\,\frac{aa_1}{a+a_1}$, et par $\theta(x)$ la fonction impaire, 1-périodique, continue et linéaire par morceaux, telle que $\theta(0) = \theta(\frac{1}{2}) = 0$, $\theta'(x) = a$ sur $[0, \frac{N}{a}]$, $\theta'(x) = 0$ sur $[\frac{N}{a}, \frac{1}{2} - \frac{N}{a_1}]$, $\theta'(x) = -a_1$ sur $[\frac{1}{2} - \frac{N}{a_1}, \frac{1}{2}]$ Soit φ, resp. φ_1, la fonction de la forme $d^{-3}\, \chi_d * \chi_d * \chi_d * \chi$, χ étant une fonction indicatrice d'intervalle, dont le support est $[-\frac{N}{a}, \frac{N}{a}]$ resp. $[-\frac{N}{a_1}, \frac{N}{a_1}]$. Soit $q(x)$ et $r(x)$ les fonctions du lemme 3 associées à a, d, φ. Soit $q_1(x)$ et $r_1(x)$ les fonctions du lemme $\overline{3}$ (c'est le lemme 3 écrit en changeant i en -i), associées à a_1, d, φ_1.

L'idée de base est de considérer la fonction $\Phi(x)$ 1-périodique définie par

$$\Phi(x) = (\varphi(x) + \varphi_1(x - \tfrac{1}{2}))\, \exp(\pi i\, \theta(x))$$

sur l'intervalle $[-\frac{N}{a}, 1-\frac{N}{a}]$ (voir figure 3). Elle est de module 1 sur

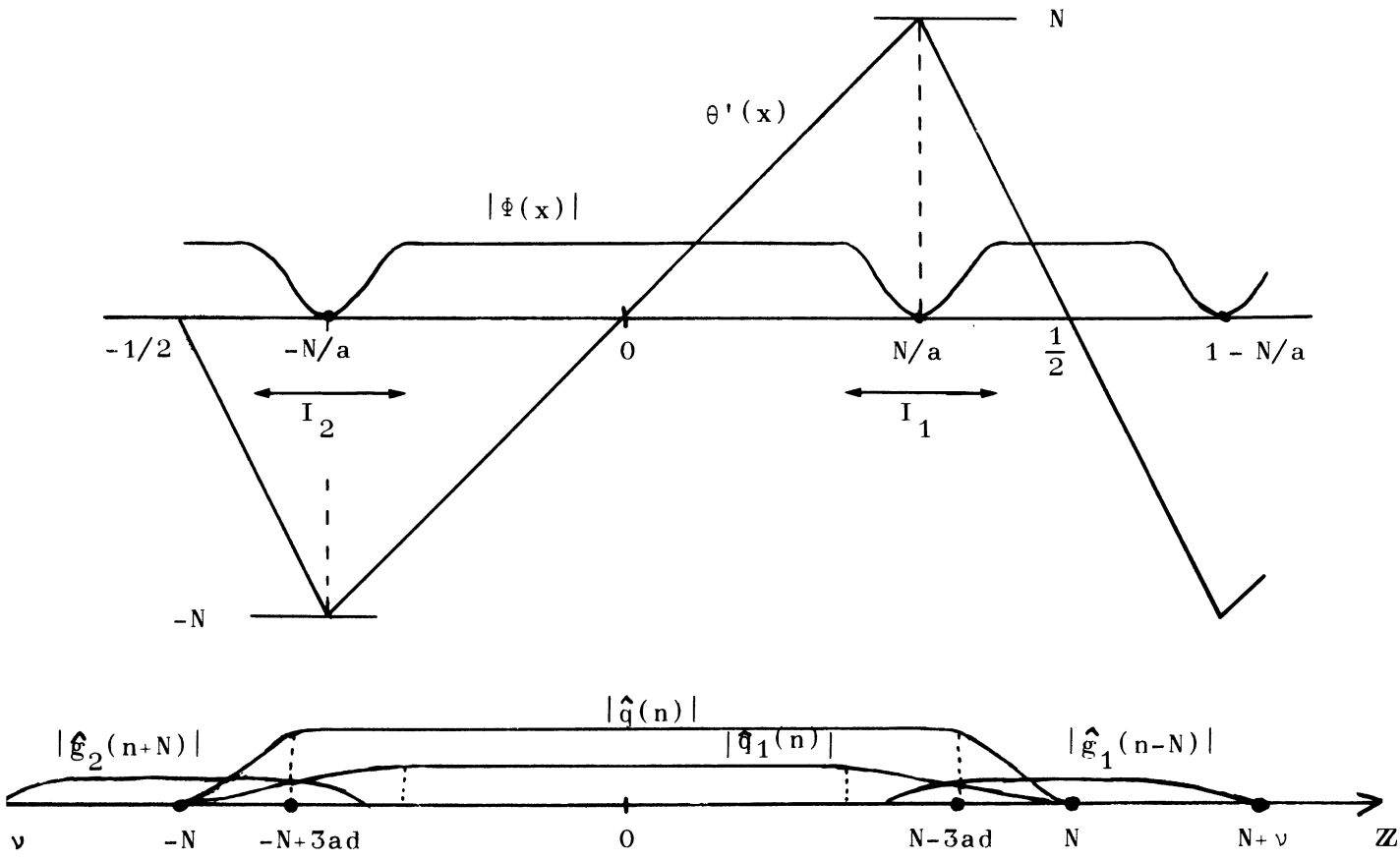

Figure 3

le cercle, en dehors des intervalles I_1 et I_2 représentés. On pose

$$h_1(x) = \Phi(x)\ \exp(-2\pi i N x) \qquad (x \in I_1)$$

$$h_2(x) = \Phi(x)\ \exp(+2\pi i N x) \qquad (x \in I_2)\ .$$

D'après le lemme 3, on a

$$|\hat{q}_n| = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\varphi(\frac{n}{a}) \quad , \quad |\hat{q}_{1,n}| = \frac{1}{\sqrt{a_1}}\,\varphi_1(\frac{n}{a_1})$$

donc $q(x)$ et $q_1(x)$ sont des polynômes trigonométriques de degré N, et

$$q(x) = \exp(2\pi i\theta(x))\varphi(x) + r(x) \quad , \quad \|r\|_\infty \le \frac{1}{\pi a d^2}$$

$$q_1(x) = \exp(2\pi i(\theta(x+\tfrac{1}{2}) - \theta(\tfrac{1}{2})))\varphi_1(x) + r_1(x) \quad , \quad \|r_1\| \le \frac{1}{\pi a_1 d^2}$$

pour $|x| \le \frac{1}{2}$, donc sur tout le cercle on a

$$q(x) + e^{i\gamma} q_1(x - \tfrac{1}{2}) = \Phi(x) + o(1) \quad , \quad \gamma = 2\pi\theta(\tfrac{1}{2}) \quad .$$

Le lemme 4 s'applique aux intervalles I_j et aux fonctions $h_j(x)$ avec $\ell < 7d$ et $\Delta = \mathcal{O}(da_1)$. Si ε est petit mais fixé, on peut choisir $m = K_\varepsilon d^2 a_1$. L'application du lemme donne deux fonctions $f_j(x)$ telles que

$$1 - 8\varepsilon \le |f_j(x) + h_j(x)| \le 1 + 8\varepsilon$$

$$\|f_j'\|_\infty = \mathcal{O}(da_1)$$

$$\|\hat{f}_j\|_\infty = \mathcal{O}(a_1^{-1/2} \log a_1) \quad .$$

On impose maintenant une autre condition, compatible avec les précédentes : $da_1 \ll a$. Soit ν la partie entière de $\varepsilon^{-1} da_1$, et $g_j(x)$ une somme de Jackson de degré ν de f_j (c'est la convolution sur le cercle de f_j avec le carré de convolution d'un noyau de Fejer, normalisé) ; les inégalités précédentes donnent

$$1 - 9\varepsilon \le |g_j(x) + h_j(x)| \le 1 + 9\varepsilon \qquad (x \in I_j)$$

$$\sup_n |\hat{g}_{j,n}| = \mathcal{O}(a_1^{-1/2} \log a_1) \quad .$$

On pose

$$F(x) = q(x) + e^{i\gamma} q_1(x - \tfrac{1}{2}) + g_1(x) \exp(2\pi i N x) + g_2(x) \exp(-2\pi i N x) \quad .$$

On a $|F(x)| - 1 = \mathcal{O}(\varepsilon)$ sur tout le cercle. Le polynôme trigonométrique $F(x)$ est de degré $N + \nu$, et on a bon contrôle des coefficients de Fourier $\hat{F}_n$. Sur l'intervalle $[-N + 3ad, N + 3ad]$, le module de ces coefficients est voisin de $a^{-1/2}$; sur les intervalles restants, le module des coefficients est majoré par un nombre voisin de $a^{-1/2}$. On décompose F en trois parties, correspondant à ces trois intervalles de son spectre, et on leur fait jouer le rôle de $\sigma(x)$ dans le lemme 2. En veillant à bien choisir α et β, on obtient trois polynômes trigonométriques ρ_1, ρ_2, ρ_3, tels que $\|\rho_j\|_\infty$ soit petit et tels que le polynôme trigonométrique

$$p(x) = F(x) + \rho_1(x) + \rho_2(x) + \rho_3(x) = \sum_{-N-\nu}^{N+\nu} \hat{p}_n \exp(2\pi i n x)$$

ait tous ces coefficients p_n de même module, voisin de $a^{-1/2}$. On a bien

$$|p(x)| - 1 = \mathcal{O}(\varepsilon) \qquad (a \to \infty)$$

et comme ε est arbitrairement petit, le théorème s'ensuit.
