

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

M. LEVY

Prolongement d'un opérateur d'un sous-espace de $L^1(\mu)$ dans $L^1(\nu)$

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1979-1980), exp. n° 5, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1979-1980__A4_0>

© Séminaire d'analyse fonctionnelle
(École Polytechnique), 1979-1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E
D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E
1979-1980

PROLONGEMENT D'UN OPERATEUR D'UN SOUS-ESPACE

DE $L^1(\mu)$ DANS $L^1(\nu)$

M. LEVY

D'après un résultat de Grothendieck ([1]) si T est un opérateur linéaire continu de $L^1(\mu)$ dans $L^1(\nu)$, alors l'image par T de toute partie bornée pour l'ordre de $L^1(\mu)$ est une partie bornée pour l'ordre de $L^1(\nu)$.

Plus précisément :

$$\forall n, \forall f_1, \dots, f_n \in L^1(\mu), \int \max_{1 \leq i \leq n} |Tf_i| d\nu \leq \|T\| \int \max_{1 \leq i \leq n} |f_i| d\mu.$$

Soit Y un sous-espace de $L^1(\mu)$, et T un opérateur linéaire continu de Y dans $L^1(\nu)$. Soit

$$\alpha(T) = \inf \left\{ C, \forall n, \forall f_1, \dots, f_n \in Y, \int \max_{1 \leq i \leq n} |Tf_i| d\nu \leq C \int \max_{1 \leq i \leq n} |f_i| d\mu \right\}.$$

Il est clair que si T admet un prolongement continu $\tilde{T}$ de $L^1(\mu)$ dans $L^1(\nu)$, alors : $\alpha(T) \leq \|\tilde{T}\|$, et donc $\alpha(T)$ est fini.

Le théorème suivant, qui répond à une question de H.P. Rosenthal, montre que la réciproque est vraie.

Théorème : Soit T un opérateur linéaire continu d'un sous-espace Y de $L^1(\mu)$ dans $L^1(\nu)$. Si $\alpha(T)$ est fini, il existe un opérateur $\tilde{T}$ de $L^1(\mu)$ dans $L^1(\nu)$, prolongeant T , et tel que $\|\tilde{T}\| = \alpha(T)$.

Démonstration : Nous étudions d'abord le cas où $L^1(\mu)$ et $L^1(\nu)$ sont égaux respectivement à ℓ_n^1 et ℓ_p^1 , puis nous passerons au cas général en utilisant la structure locale inconditionnelle des espaces L^1 .

Lemme 1 : Soit Y un sous-espace de ℓ_n^1 . Si l'on munit l'espace $E = \mathcal{L}(Y, \ell_p^1)$ de la norme α , alors son dual E' est isométrique à $\mathcal{L}(\ell_p^1, Y)$ muni de la norme β_Y définie par :

$$\beta_Y(S) = \inf \left\| \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i| \right\|_{\infty} \left\| \max_{1 \leq i \leq k} |y_i| \right\|_1,$$

où l'inf. est pris sur toutes les représentations de S de la forme :

$$Sx = \sum_{i=1}^k \langle \varphi_i, x \rangle y_i,$$

où $\varphi_i \in \ell_p^{\infty}$, $y_i \in Y$, $1 \leq i \leq k$.

Démonstration du lemme 1 : On utilise la dualité de trace.

Si $T \in \mathcal{L}(Y, \ell_p^1)$, $S \in \mathcal{L}(\ell_p^1, Y)$, avec $Sx = \sum_{i=1}^k \langle \varphi_i, x \rangle y_i$, alors :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(ST) &= \sum_{i=1}^k \langle \varphi_i, T y_i \rangle \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^k |\varphi_i| \right\|_{\infty} \left\| \max_{1 \leq i \leq k} |T y_i| \right\|_1 \\ &\leq \alpha(T) \left\| \sum_{i=1}^k |\varphi_i| \right\|_{\infty} \left\| \max_{1 \leq i \leq k} |y_i| \right\|_1 . \end{aligned}$$

Donc $\text{Tr}(ST) \leq \alpha(T) \cdot \beta_Y(S)$,

et $\sup_{\beta_Y(S) \leq 1} \text{Tr}(ST) \leq \alpha(T)$.

Soit $\varepsilon > 0$, et $y_1, \dots, y_k$ des éléments de Y tels que :

$$\left\| \max_{1 \leq i \leq k} |y_i| \right\|_1 = 1 \quad \text{et} \quad \left\| \max_{1 \leq i \leq k} |T y_i| \right\|_1 \geq \alpha(T) - \varepsilon .$$

Le dual de $\ell_p^1(\ell_k^{\infty})$ est isométrique à $\ell_p^{\infty}(\ell_k^1)$. Donc soit $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ des éléments de ℓ_p^{∞} tels que :

$$\left\| \sum_{i=1}^k |\varphi_i| \right\|_{\infty} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^k \langle \varphi_i, T y_i \rangle = \left\| \max_{1 \leq i \leq k} |T y_i| \right\|_1 .$$

Définissons maintenant $S \in \mathcal{L}(\ell_p^1, Y)$ par :

$$Sx = \sum_{i=1}^k \langle \varphi_i, x \rangle y_i .$$

Il est clair que $\beta_Y(S) \leq 1$, et que $\text{Tr} ST \geq \beta(T) - \varepsilon$.

On en déduit que :

$$\alpha(T) = \sup_{\beta_Y(S) \leq 1} \text{Tr} ST ,$$

ce qui démontre le lemme 1.

Lemme 2 : Soit $\{e_i\}_{1 \leq i \leq p}$ la base canonique de ℓ_p^1 , et N la norme nucléaire de $\mathcal{L}(\ell_p^1, \ell_n^1)$. Alors pour tout sous-espace Y de ℓ_n^1 , et pour tout S de $\mathcal{L}(\ell_p^1, Y)$, on a :

$$\beta_{\ell_n^1}(S) = \beta_Y(S) = N(S) = \left\| \max_{1 \leq i \leq p} |S e_i| \right\|_1 .$$

Démonstration du lemme 2 : Soit $(e_i^*)_{1 \leq i \leq p}$ la base canonique. L'opérateur S admet la représentation particulière :

$$Sx = \sum_{i=1}^p \langle e_i^*, x \rangle S e_i.$$

Soit $Sx = \sum_{i=1}^k \langle \varphi_i, x \rangle x_i$ une autre représentation de S , où $\varphi_i \in \ell_p^\infty$, $x_i \in \ell_n^1$, $1 \leq i \leq k$. Alors, pour $j = 1, \dots, p$:

$$\begin{aligned} |S e_j| &= \left| \sum_{i=1}^k \langle \varphi_i, e_j \rangle x_i \right| \leq \sum_{i=1}^k |\langle \varphi_i, e_j \rangle| |x_i| \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^k |\varphi_i| \right\|_\infty \max_{1 \leq i \leq k} |x_i|. \end{aligned}$$

Donc
$$\left\| \max_{1 \leq j \leq p} |S e_j| \right\|_1 \leq \left\| \sum_{i=1}^k |\varphi_i| \right\|_\infty \left\| \max_{1 \leq i \leq k} |x_i| \right\|_1.$$

Comme $\left\| \sum_{i=1}^p |e_i^*| \right\|_\infty = 1$, on en déduit que la représentation particulière $Sx = \sum_{i=1}^p \langle e_i^*, x \rangle S e_i$ réalise $\beta_{\ell_n^1}(S)$. Puisque les $S e_i$ appartiennent à Y , elle réalise aussi $\beta_Y(S)$.

Enfin, d'après Grothendieck les normes α et $\|\cdot\|$ coïncident sur $\mathfrak{L}(\ell_n^1, \ell_p^1)$, et donc les normes $\beta_{\ell_n^1}$ et N coïncident sur $\mathfrak{L}(\ell_p^1, \ell_n^1)$, ce

qui achève la démonstration.

Ces deux lemmes permettent de démontrer le théorème lorsque $L^1(\mu) = \ell_n^1$, $L^1(\nu) = \ell_p^1$.

Soit Y un sous-espace de ℓ_n^1 , et T un opérateur de Y dans ℓ_p^1 .

T définit sur $\mathfrak{L}(\ell_p^1, Y)$, muni de la norme β_Y , une forme linéaire φ de norme $\alpha(T)$. D'après le lemme 2, $\mathfrak{L}(\ell_p^1, Y)$ muni de la norme β_Y , est isométrique à un sous-espace de $\mathfrak{L}(\ell_p^1, \ell_n^1)$ muni de la norme N .

D'après le théorème de Hahn-Banach, φ se prolonge à une forme linéaire $\tilde{\varphi}$ sur $\mathfrak{L}(\ell_p^1, \ell_n^1)$, de même norme. Soit $\tilde{T}$ l'unique élément de $\mathfrak{L}(\ell_n^1, \ell_p^1)$ qui s'identifie à $\tilde{\varphi}$ par la dualité de trace. Alors

$\|\tilde{T}\| = \|\tilde{\varphi}\| = \alpha(T)$, et il est clair que $\tilde{T}$ prolonge T .

Soit maintenant Y un sous-espace de dimension finie de $L^1(\mu)$, et T un opérateur de $L^1(\mu)$ dans $L^1(\nu)$, où $L^1(\mu)$ et $L^1(\nu)$ sont quelconques. Soit $\varepsilon > 0$. La structure locale inconditionnelle des espaces L^1 (voir [2]) entraîne l'existence de deux espaces de dimension finie E et F , sous-espaces respectifs de $L^1(\mu)$ et $L^1(\nu)$ vérifiant les propriétés suivantes :

1) Y est inclus dans E , et il existe un isomorphisme Φ de E sur ℓ_n^1 ,
(où $n = \dim E$), avec

$$\|\Phi\| \|\Phi^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon .$$

De plus, il existe une projection P de $L^1(\mu)$ sur E , avec
 $\|P\| \leq 1 + \varepsilon$.

2) TY est inclus dans F , et il existe un isomorphisme Ψ de F sur ℓ_p^1 ,
(où $p = \dim F$), avec

$$\|\Psi\| \|\Psi^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon .$$

De plus il existe une projection Q de $L^1(\nu)$ sur F , avec
 $\|Q\| \leq 1 + \varepsilon$.

D'après l'étude faite ci-dessus, l'opérateur $S = \Psi T \Phi^{-1}|_{\Phi(Y)}$ se
prolonge à un opérateur $\tilde{S}$ de ℓ_n^1 dans ℓ_p^1 , avec $\alpha(S) = \|\tilde{S}\|$. Or

$$\begin{aligned} \alpha(S) &\leq \alpha(\Psi) \alpha(T) \alpha(\Phi^{-1}) \\ &\leq \alpha(\Psi Q) \alpha(T) \alpha(\Phi^{-1}) \\ &\leq \|\Psi\| \|Q\| \|\Phi^{-1}\| \alpha(T) . \end{aligned}$$

Soit $T_\varepsilon = \Psi^{-1} \tilde{S} \Phi P$. Il est clair que T_ε prolonge T . De plus

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon\| &\leq \|\Psi^{-1}\| \|\Psi\| \|\Phi^{-1}\| \|\Phi\| \|P\| \|Q\| \alpha(T) \\ &\leq (1 + \varepsilon)^4 \alpha(T) . \end{aligned}$$

On obtient donc des prolongements de T de norme arbitrairement proche de $\alpha(T)$. On utilise alors un argument de compacité, et l'existence d'une projection de norme 1 de $[L^1(\nu)]''$ sur $L^1(\nu)$, pour obtenir un prolongement de T , de norme égale à $\alpha(T)$.

Lorsque Y est de dimension quelconque, on obtient pour chaque sous-espace Z de dimension finie de Y un prolongement T_Z de la restriction de T à Z , avec $\|T_Z\| \leq \alpha(T)$. On utilise encore un argument de compacité pour conclure à l'existence d'un prolongement de T , de norme $\alpha(T)$.

Corollaire : Soit Y un sous-espace de $L^1(\mu)$ et ϕ un isomorphisme de Y sur $L^1(\nu)$. Alors Y est complété dans $L^1(\mu)$ si et seulement si $\alpha(T)$ est fini.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Grothendieck : Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, Bol. Soc. Math. Sao Paulo 8, 1956.
- [2] H.E. Lacey : The isometric theory of classical Banach spaces, Springer Verlag, 1974.
