

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. BOURGAIN

Walsh subspaces of L^p -product spaces

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1979-1980), exp. n° 4, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1979-1980___A3_0>

© Séminaire d'analyse fonctionnelle
(École Polytechnique), 1979-1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E
D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E
1979-1980

WALSH SUBSPACES OF L^p -PRODUCT SPACES

J. BOURGAIN
(Université de Bruxelles)

PRELIMINAIRE

Abstract : An extension is obtained of certain properties of the classical Walsh subspaces of the L^p -spaces on the Cantor group.

1. PRELIMINARIES.

Let us start by recalling the classical Khintchine-inequalities for the Rademacher functions (r_i) on $[0,1]$.

Proposition 1 : For each $1 \leq p < \infty$ there is a constant $0 < k_p < \infty$ such that

$$k_p^{-1} \left(\sum_i a_i^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_i a_i r_i \right\|_p \leq k_p \left(\sum_i a_i^2 \right)^{1/2}$$

holds, for any finite sequence (a_i) of reals.

The reader is supposed to be familiar with the notions of martingale and martingale difference sequence, which are explained in [2]. We also refer to [2] for the following result, due to Burkholder and Gundy.

Proposition 2 : Let $1 < p < \infty$. Then there exists a constant $0 < b_p < \infty$ such that

$$b_p^{-1} \left\| \left(\sum_i d_i^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq \left\| \sum_i d_i \right\|_p \leq b_p \left\| \left(\sum_i d_i^2 \right)^{1/2} \right\|_p$$

holds, for any martingale difference sequence (d_i) in L^p .

Let $1 \leq p \leq \infty$ be fixed.

For given subspaces X of $L^p(\mu)$ and Y of $L^p(\nu)$, let $X \otimes Y$ be the subspace of $L^p(\mu \otimes \nu)$ generated by the functions $f \otimes g$ where $f \in X$ and $g \in Y$. If moreover $U : X \rightarrow L^p(\mu')$ and $V : Y \rightarrow L^p(\nu')$ are bounded linear operators, then $U \otimes V : X \otimes Y \rightarrow L^p(\mu' \otimes \nu')$ is defined by taking $(U \otimes V)(f \otimes g) = U(f) \otimes V(g)$. It is indeed easily verified that $U \otimes V$ is still an operator and in fact $\|U \otimes V\| = \|U\| \cdot \|V\|$.

2. WALSH SUBSPACES OF $L^p(G)$.

The results of this section are known and can be found in [3] for instance. However, since they are important for what follows, we also include proofs here.

$G = \{1, -1\}^N$ is the Cantor-group equipped with the Haar-measure m , which is the product measure $\otimes_i m_i$ of the measures m_i on $\{1, -1\}$ with $m_i(1) = \frac{1}{2} = m_i(-1)$.

The i^{th} Rademacher function r_i on G is defined by $r_i(g) = g_i$ for all $g \in G$. To each finite subset S of N corresponds a Walsh function $w_S = \prod_{i \in S} r_i$ and this system of Walsh functions generated $L^p(G)$ for any $1 \leq p < \infty$.

Following [3], define for each positive integer k the linear space W_k generated by the functions w_S where $|S| = k$ and the linear space Y_k generated by $\bigcup_{j=0}^k W_j$.

The next result shows that on each Y_k all L^p -norms ($1 \leq p < \infty$) coincide

Proposition 3 : For each $1 \leq p < \infty$, there exists a constant $K_p < \infty$ such that

$$\begin{aligned} \|f\|_2 &\leq K_p^k \|f\|_p \quad \text{if } 1 \leq p \leq 2 \quad \text{and } f \in Y_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \\ \text{and} \\ \|f\|_p &\leq K_p^k \|f\|_2 \quad \text{if } 2 \leq p < \infty \quad \text{and } f \in Y_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Proof : We may restrict ourselves to the case $2 \leq p < \infty$. The inequality for $1 < p < \infty$ follows then from a duality argument using the self-duality of the Y_k -spaces and for $p = 1$ we use the classical Hölder trick.

If $2 \leq p < \infty$, we prove the inequalities for $K_p = k_1 b_p$ inductively on k . The case $k = 0$ is obvious.

Now assume the inequality correct for Y_k and let $f \in Y_{k+1}$. Then f can be written in the form

$$f = f_0 + \sum_{n>0} g_n \otimes r_n \quad (*)$$

where f_0 is a constant function and g_n a member of Y_k only depending on the coordinates $1 \leq i < n$. Since (*) is the sum of a martingale difference sequence, prop. 2 gives

$$\|f\|_p \leq b_p \left\| \left(f_o^2 + \sum_{n>0} g_n^2 \right)^{1/2} \right\|_p$$

and hence

$$\|f\|_p \leq k_1 b_p \int \left\| r_o(w) f_o + \sum_{n>0} r_n(w) g_n \right\|_p dw.$$

Since $r_o(w) + \sum_{n>0} r_n(w) g_n$ is in Y_k for each w , the induction hypothesis yields

$$\|f\|_p \leq k_p^{k+1} \left\| \left(f_o^2 + \sum_{n>0} g_n^2 \right)^{1/2} \right\|_2 = k_p^{k+1} \|f\|_2,$$

completing the proof.

As a straightforward consequence of prop. 5, we find

Proposition 4 : 1. For $1 \leq p < \infty$ and $k = 0, 1, 2, \dots$, the closure Y_k^p of Y_k in $L^p(G)$ is a Hilbert space and for fixed k , the Y_k^p ($1 \leq p < \infty$) consist of the same functions.
 2. For $1 < p < \infty$ and $k = 0, 1, 2, \dots$, Y_k^p is complemented in $L^p(G)$ by the orthogonal projection, whose L^p -norm is bounded by K_p^k .

3. WALSH-SUBSPACES OF L^p -PRODUCT SPACES.

In this section, (μ_i) is a fixed sequence of probability spaces. For each $1 \leq p \leq \infty$ and each i , let R_i^p be the subspace of $L^p(\mu_i)$ consisting of the mean zero functions. For finite subsets S of N , take $R_S^p = \bigotimes_{i \in S} R_i^p$. For each k , W_k^p will be the subspace of $L^p(\bigotimes_i \mu_i)$ generated by the R_S^p with $|S| = k$ and Y_k^p the space generated by the W_j^p ($0 \leq j \leq k$). Thus the W_k^p ($k = 0, 1, 2, \dots$) generate $L^p(\bigotimes_i \mu_i)$ for $1 \leq p < \infty$.

Lemma 5 : 1. If $1 \leq p \leq \infty$ and $0 \leq \delta \leq 1$, then $\|a + \delta f\|_p \leq \|a + f\|_p$ for any scalar a and $f \in L^p$ with $\int f = 0$.
 2. For each $1 < p < \infty$, there exists some $\delta_p = \delta$, $0 < \delta \leq 1$ such that $\|a - \delta f\|_p \leq \|a + f\|_p$ for any scalar a and $f \in L^p$ with $\int f = 0$.

Proof : 1. If $p' = \frac{p}{p-1}$ and $g \in L^{p'}$ with $\|g\|_{p'} = 1$, take $h = \delta g + (1 - \delta) \int g$. Since $\|h\|_{p'} \leq 1$, we get

$$\|a + f\|_p \geq \langle a + f, h \rangle = a \int g + \delta \langle f, g \rangle = \langle a + \delta f, g \rangle.$$

Hence $\|a + \delta f\|_p \leq \|a + f\|_p$.

2. For $p = 2$, any $0 \leq \delta \leq 1$ works. The case $1 < p < 2$ follows from the case $2 < p < \infty$, using a standard duality argument. For $2 < p < \infty$, it suffices to prove the result if p is an even integer. We can then indeed apply the Riesz-Thorin interpolation theorem (see [4]) in order to deal with the general case. So assume p of the form $p = 2q$ where q is some positive integer. We claim that it is possible to find some $\delta > 0$, satisfying

$$(1 - \delta x)^{2q} + 2q \delta x \leq (1 + x)^{2q} - 2q x \quad (*)$$

for any real number x .

By binomial expansion, it is easily seen that

$$(1 - \delta x)^{2q} + 2q \delta x \leq 1 + 4^q (\delta^2 x^2 + \delta^{2q} x^{2q})$$

and

$$(1 + x)^{2q} - 2q x \geq (1 - |x|)^{2q} + 2q |x|.$$

Now, it is an easy calculus exercise to show the existence of some $\tau > 0$ for which

$$(1 - t)^{2q} + 2q t \geq 1 + \tau(t^2 + t^{2q})$$

holds, whenever t is a positive real.

Combining these facts leads to (*) for some $\delta > 0$.

It follows from (*) that for $f \in L^{2q}$, $\int f = 0$

$$\int (1 - \delta f)^{2q} \leq \int (1 + f)^{2q}$$

and thus

$$\|1 - \delta f\|_p \leq \|1 + f\|_p.$$

If $a \neq 0$ is a scalar, we get

$$\|a - \delta f\|_p = |a| \left\| 1 - \delta \frac{f}{a} \right\|_p \leq |a| \left\| 1 + \frac{f}{a} \right\|_p = \|a + f\|_p$$

completing the proof.

We are now able to show the following proposition :

Proposition 6 : For all $1 < p < \infty$, there is a constant $0 < C_p < \infty$ so that for each k .

1. The orthogonal projection in $L^p(\otimes_i \mu_i)$ on Y_k^p is bounded in p -norm by C_p^k .

2. If $f \in Y_k^p$ and $f = \sum_{|S| \leq k} f_S$ where $f_S \in R_S^p$ for each S , then

$$C_p^{-k} \left\| \left(\sum_{|S| \leq k} |f_S|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq \|f\|_p \leq C_p^k \left\| \left(\sum_{|S| \leq k} |f_S|^2 \right)^{1/2} \right\|_p.$$

Proof : Fix $1 < p < \infty$ and let K_p be the constant of prop. 3 and $\delta = \delta_p$ as in lemma 5. We use the same notations as in section 2. For each $i \in N$, consider the operators

$$U_i : L^p(\mu_i) \longrightarrow L^p(\mu_i \otimes m_i)$$

and

$$V_i : L^p(\mu_i \otimes m_i) \longrightarrow L^p(\mu_i)$$

defined respectively by

$$U_i(a + f) = a + \delta(f \otimes r_i)$$

and

$$V_i((a + f) \oplus (b + g)) = \frac{a + b}{2} + \delta \frac{f - g}{2}$$

for scalars a, b and $f, g \in L^p(\mu_i)$ with $\int f = \int g = 0$.

Since now, by the previous lemma,

$\|a + \delta(f \otimes r_i)\|_p^p = \frac{1}{2} \|a + \delta f\|_p^p + \frac{1}{2} \|a - \delta f\|_p^p \leq \|a + f\|_p^p$, we get $\|U_i\|_p = 1$. In the same way, also $\|V_i\|_p = 1$.

Take

$$U = \otimes_i U_i : L^p(\otimes_i \mu_i) \longrightarrow L^p(\otimes_i \mu_i \otimes m)$$

and

$$V = \otimes_i V_i : L^p(\otimes_i \mu_i \otimes m) \longrightarrow L^p(\otimes_i \mu_i)$$

for which still $\|U\|_p = 1 = \|V\|_p$ holds.

It is clear that if $f \in R_S^p$, then $U(f) = \delta^{|S|} f \otimes w_S$ and $V(f \otimes w_S) = \delta^{|S|} f$.

So if $f = \sum_S f_S$ where $f_S \in R_S^p$ for each S , then

$$\|f\|_p \geq \|U(f)\|_p = \left\| \sum_S \delta^{|S|} f_S \otimes w_S \right\|_p.$$

Hence, by prop. 4.2, we find by orthogonal projection in $L^p(G)$ on Y_k^p

$$\|f\|_p \geq K_p^{-k} \left\| \sum_{|S| \leq k} \delta^{|S|} f_S \otimes w_S \right\|_p \quad . \quad (*)$$

If in particular $f \in Y_k^p$, then applications of prop. 3 gives

$$\begin{aligned} \|f\|_p &\geq K_p^{-k} \left\| \left(\sum \delta^{2|S|} |f_S|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \\ &\geq (\delta K_p^{-1})^k \left\| \left(\sum |f_S|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \quad . \end{aligned}$$

Now also

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{|S| \leq k} |f_S|^2 \right)^{1/2} \right\|_p &\geq \\ (\delta K_p^{-1})^k \left\| \sum \delta^{-|S|} f_S \otimes w_S \right\|_p &\geq (\delta K_p^{-1})^k \left\| \sum \delta^{-|S|} v(f_S \otimes w_S) \right\|_p = \\ &(\delta K_p^{-1})^k \|f\|_p \quad . \end{aligned}$$

From (*), we get for all $f \in L^p(\otimes \mu_i)$

$$\begin{aligned} \|f\|_p &\geq K_p^{-2k} \left\| \left(\sum_{|S| \leq k} \delta^{2|S|} |f_S|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \geq \\ (\delta K_p^{-2})^k \left\| \left(\sum_{|S| \leq k} |f_S|^2 \right)^{1/2} \right\|_p &\geq (\delta^2 K_p^{-3})^k \left\| \sum_{|S| \leq k} f_S \right\|_p \quad . \end{aligned}$$

So it remains to take $C_p = \delta^{-2} K_p^3$.

Our next aim is to study the subspaces Y_k^1 of $L^1(\otimes \mu_i)$. We will show that also on each Y_k^1 the norm is given by the square function. Thus

Proposition 7 : For each k there exists a constant $0 < D_k < \infty$ such that for any $f = \sum_{|S| \leq k} f_S$, $f_S \in R_S^1$ for each S

$$D_k^{-1} \left\| \left(\sum |f_S|^2 \right)^{1/2} \right\|_1 \leq \|f\|_1 \leq D_k \left\| \left(\sum |f_S|^2 \right)^{1/2} \right\|_1 \quad .$$

Proof : We prove the inequalities by induction on k . For $k=0$, they are obvious. Now assume the statement correct on Y_k^1 and let $D = D_k$.

Fix $f = \sum_{|S| \leq k+1} f_S$ with $f_S \in R_S^1$ for each S .

Assume N the disjoint union of sets P and Q and take $S' = S \cap P$, $S'' = S \cap Q$ for each $S \subset N$ with $|S| \leq k+1$. Applying the induction hypothesis and prop. 1 and prop. 3, we get

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{\substack{S \cap P \neq \emptyset \\ S \cap Q \neq \emptyset}} f_S \right\|_1 = \left\| \sum_{\substack{S' \neq \emptyset \\ S'' \neq \emptyset}} f_{S' \cup S''} \right\|_1 \\
& \left\| \sum_{S' \neq \emptyset} \left(\sum_{S'' \neq \emptyset} f_{S' \cup S''} \right) \right\|_1 \\
& (\geq D^{-1}, \leq D) \left\| \left(\sum_{S' \neq \emptyset} \left(\sum_{S'' \neq \emptyset} f_{S' \cup S''} \right)^2 \right)^{1/2} \right\|_1 \\
& (\geq D^{-1}, \leq D k_1) \int \left\| \sum_{S'' \neq \emptyset} \left(\sum_{S' \neq \emptyset} r_{S'}(w') f_{S' \cup S''} \right) \right\|_1 dw' \\
& (\geq D^{-2}, \leq D^2 k_1) \int \left\| \left(\sum_{S'' \neq \emptyset} \left(\sum_{S' \neq \emptyset} r_{S'}(w') f_{S' \cup S''} \right)^2 \right)^{1/2} \right\|_1 dw' \\
& (\geq D^{-2}, \leq D^2 k_1^2) \iint \left\| \sum_{\substack{S' \neq \emptyset \\ S'' \neq \emptyset}} r_{S'}(w') r_{S''}(w'') f_{S' \cup S''} \right\|_1 dw' dw'' \\
& (\geq D^{-2} K_1^{-2}, \leq D^2 k_1^2) \left\| \left(\sum_{\substack{S \cap P \neq \emptyset \\ S \cap Q \neq \emptyset}} |f_S|^2 \right)^{1/2} \right\|_1 .
\end{aligned}$$

Fix now a sequence (ε_i) of signs and define

$$g = \sum_{\substack{j \leq k+1 \\ j \text{ odd}}} \sum_{|S|=j} f_S + \sum_{\substack{j \leq k+1 \\ j \text{ even}}} \sum_{|S|=j} \left(\prod_{i \in S} \varepsilon_i \right) f_S .$$

Take $P = \{i \in \mathbb{N} ; \varepsilon_i = 1\}$, $Q = \{i \in \mathbb{N} ; \varepsilon_i = -1\}$ and $\mathcal{E}_P$, $\mathcal{E}_Q$ the conditional expectations with respect to the P and Q -variables respectively. It is easily verified that $\mathcal{E}_P[g] = \mathcal{E}_P[f]$ and $\mathcal{E}_Q[g] = \mathcal{E}_Q[f]$. By the preceding

$$\begin{aligned}
\|g\|_1 & \leq \|\mathcal{E}_P[g]\|_1 + \|\mathcal{E}_Q[g]\|_1 + \|g - \mathcal{E}_P[g] - \mathcal{E}_Q[g]\|_1 \\
& \leq 2 \|f\|_1 + D^2 k_1^2 \left\| \left(\sum_{\substack{S \cap P \neq \emptyset \\ S \cap Q \neq \emptyset}} |f_S|^2 \right)^{1/2} \right\|_1 \\
& \leq 2 \|f\|_1 + D^4 k_1^2 K_1^2 \left\| \sum_{\substack{S \cap P \neq \emptyset \\ S \cap Q \neq \emptyset}} f_S \right\|_1 \\
& \leq (2 + 3 D^4 k_1^2 K_1^2) \|f\|_1 .
\end{aligned}$$

Hence, by the preceding we also have

$$\left\| \sum_{\substack{j \leq k+1 \\ j \text{ even}}} \sum_{|S|=j} \left(\prod_{i \in S} \varepsilon_i \right) f_S \right\|_1 \leq (2 + 3 D^4 k_1^2 K_1^2) \left\| \sum_{\substack{j \leq k+1 \\ j \text{ even}}} \sum_{|S|=j} f_S \right\|_1 \quad (i)$$

and a similar reasoning gives

$$\left\| \sum_{\substack{j \leq k+1 \\ j \text{ odd}}} \sum_{|S|=j} \left(\prod_{i \in S} \epsilon_i \right) f_S \right\|_1 \leq (2 + 3 D^4 k_1^2 K_1^2) \left\| \sum_{\substack{j \leq k+1 \\ j \text{ odd}}} \sum_{|S|=j} f_S \right\|_1 . \quad (\text{ii})$$

$$\text{Since } \left\| \sum_{\substack{j \leq k+1 \\ j \text{ odd}}} \sum_{|S|=j} f_S + \sum_{\substack{j \leq k+1 \\ j \text{ even}}} \sum_{|S|=j} f_S \otimes w_S \right\|_1 \leq (2 + 3 D^4 k_1^2 K_1^2) \|f\|_1 ,$$

integration on G and subtraction yields

$$\left\| \sum_{\substack{j \leq k+1 \\ j \text{ odd}}} \sum_{|S|=j} f_S \right\|_1 \leq 3(1 + D^4 k_1^2 K_1^2) \|f\|_1 \quad (\text{iii})$$

and

$$\left\| \sum_{\substack{j \leq k+1 \\ j \text{ even}}} \sum_{|S|=j} f_S \right\|_1 \leq (4 + 3 D^4 k_1^2 K_1^2) \|f\|_1 . \quad (\text{iv})$$

Combination of (i), (ii), (iii), (iv) and prop. 3 yields

$$\left\| \left(\sum_{\substack{j \leq k+1 \\ j \text{ even}}} \sum_{|S|=j} |f_S|^2 \right)^{1/2} \right\|_1 \leq 12(1 + D^4 k_1^2 K_1^2)^2 K_1^{k+1} \|f\|_1$$

and

$$\left\| \left(\sum_{\substack{j \leq k+1 \\ j \text{ odd}}} \sum_{|S|=j} |f_S|^2 \right)^{1/2} \right\|_1 \leq 9(1 + D^4 k_1^2 K_1^2) K_1^{k+1} \|f\|_1 .$$

Thus

$$\left\| \left(\sum |f_S|^2 \right)^{1/2} \right\|_1 \leq 21(1 + D^4 k_1^2 K_1^2)^2 K_1^{k+1} \|f\|_1 .$$

Since in (i) and (ii) the factors $\prod_{i \in S} \epsilon_i$ may as well be written in the right members, also

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &\leq \left\| \sum_{\substack{j \leq k+1 \\ j \text{ even}}} \sum_{|S|=j} f_S \right\|_1 + \left\| \sum_{\substack{j \leq k+1 \\ j \text{ odd}}} \sum_{|S|=j} f_S \right\|_1 \leq \\ &(2 + 3 D^4 k_1^2 K_1^2) K_1^{k+1} \left\{ \left\| \left(\sum_{\substack{j \leq k+1 \\ j \text{ even}}} \sum_{|S|=j} |f_S|^2 \right)^{1/2} \right\|_1 + \left\| \left(\sum_{\substack{j \leq k+1 \\ j \text{ odd}}} \sum_{|S|=j} |f_S|^2 \right)^{1/2} \right\|_1 \right\} \\ &\leq 6(1 + D^4 k_1^2 K_1^2) K_1^{k+1} \left\| \left(\sum |f_S|^2 \right)^{1/2} \right\|_1 . \end{aligned}$$

So we may take $D_{k+1} = 21(1 + D_k^4 k_1^2 K_1^2)^2 K_1^{k+1}$, which completes the proof.

REFERENCES

- [1] D. Burkholder and R. Gundy : Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales, Acta Math. 124 (1970) 249-304.
- [2] A. Garsia : Martingale inequalities, Seminar Notes on Recent Progress, Math. Lecture Note Series.
- [3] H. Rosenthal : Biased coin convolution operators, The Altgeld Book. University of Illinois at Urbana, 1976.
- [4] A. Zygmund : Trigonometric series, Cambridge University Press.

UNE NOUVELLE CLASSE D'ESPACES $\mathcal{L}^1$

Nous démontrons le résultat suivant, qui répond à une question posée par A. Pełczyński (cf. [2]).

Théorème 1 : La classe des espaces $\mathcal{L}^1$ séparables ne contenant pas de sous-espace L^1 ne possède pas d'élément universel.

Rappelons que l'espace de Banach B est universel pour la classe $\mathcal{K}$ d'espaces de Banach ssi chaque membre de $\mathcal{K}$ est isomorphe à un sous-espace de B . De plus, on dit qu'un opérateur T "fixe une copie de L^1 " s'il existe un sous-espace isomorphe à L^1 sur lequel la restriction de T est un isomorphisme. Le point de départ est une construction assez générale d'espaces $\mathcal{L}^1$ à partir de certains opérateurs sur L^1 .

Proposition 2 : Soit $T: L^1 \rightarrow L^1$ un opérateur ne fixant pas de copie de L^1 et E un sous-espace de L^1 tel que $Tf = f$ pour tout $f \in E$. Alors E se plonge dans un espace $\mathcal{L}^1$ ne contenant pas L^1 .

Démonstration : Celle-ci est simple. On emploie la notation " d " pour la distance de Banach-Mazur. Fixons $\rho > 1$. On peut alors trouver une suite de sous-espaces U_i de L^1 qui satisfont les conditions suivantes :

1. Tout U_i est fini-dimensionnel, soit $d_i = \dim U_i$.
2. $d(U_i, \mathcal{L}^1(d_i)) < \rho$.
3. $U_i \subset U_{i+1}$.
4. $T(U_i) \subset U_{i+1}$.

5. $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ est dense dans L^1 .
6. $\bigcup_{i=1}^{\infty} (E \cap U_i)$ est dense dans E .

Dans ce qui suit, $\oplus$ dénotera toujours la somme au sens ℓ^1 . Posons

$$\mathfrak{X} = L^1 \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} U_i$$

et soient $P: \mathfrak{X} \rightarrow L^1$ et $P_i: \mathfrak{X} \rightarrow U_i$ les projections. On définit aussi pour tout entier j

$$\mathfrak{X}_j = U_j \oplus \bigoplus_{i=1}^j U_i$$

qui s'injectent dans $\mathfrak{X}$ de façon naturelle.

Pour tout j , soit $I_j: \mathfrak{X}_j \rightarrow \mathfrak{X}$ l'opérateur suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} P I_j(x) = T P(x) \\ P_i I_j(x) = P_i(x) \quad \text{pour } i = 1, \dots, j \\ P_{j+1} I_j(x) = P(x) - T P(x) - \sum_{i \leq j} P_i(x) \\ P_i I_j(x) = 0 \quad \text{pour } i > j+1 \end{array} \right.,$$

ce qui est possible par les conditions (3) et (4) sur les U_i . On remarque que

$$P(x) = (P + \sum_i P_i) I_j(x) \quad (*)$$

pour tout $x \in \mathfrak{X}_j$.

Les inégalités suivantes sont aisément vérifiées

$$\frac{1}{2} \|x\| \leq \|I_j(x)\| \leq 2(1 + \|T\|) \|x\|$$

et elles entraînent que I_j est un isomorphisme sur son image B_j . Plus précisément, on a

$$d(B_j, \mathfrak{X}_j) \leq 4(1 + \|T\|)$$

et donc

$$d(B_j, \ell^1(d_j)) \leq 4\rho(1 + \|T\|) \quad .$$

Nous prétendons que B_j est un sous-espace de B_{j+1} . Afin de voir cela, fixons x dans $\mathfrak{X}_j$ et considérons y donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} P(y) = P(x) \\ P_i(y) = P_i(x) \quad \text{pour } i = 1, \dots, j \\ P_{j+1}(y) = P(x) - T P(x) - \sum_{i \leq j} P_i(x) \\ P_i(y) = 0 \quad \text{pour } i > j+1 \end{array} \right. ,$$

qui appartient clairement à $\mathfrak{X}_{j+1}$. On vérifie facilement que $I_{j+1}(y) = I_j(x)$. Donc $B_j \subset B_{j+1}$.

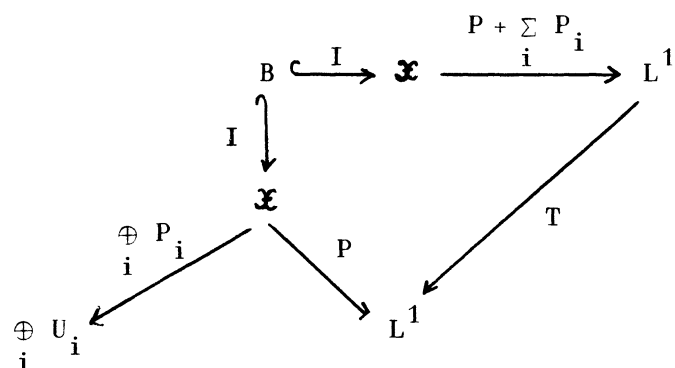
Posons $B = \overline{\bigcup_j B_j}$, le sous-espace de $\mathfrak{X}$ engendré par les B_j . Par ce qui précède, B est $\mathfrak{L}_{\lambda+\varepsilon}^1$ pour $\lambda = 4\rho(1 + \|T\|)$.

L^1 s'injecte dans $\mathfrak{X}$ par identification avec la première coordonnée. Par hypothèse sur T , $I_j(x) = x$ pour tout $x \in E \cap U_j \hookrightarrow \mathfrak{X}_j$. Donc, $E \cap U_j$ est sous-espace de B_j et E sous-espace de B .

Il reste à montrer que L^1 ne s'injecte pas dans B si T ne fixe pas de copie de L^1 . Il découle de (*) que

$$P(x) = T(P + \sum_i P_i)(x) \quad \text{pour } x \in B$$

ce qui donne le diagramme suivant



où $\bigoplus_i U_i$ est isomorphe à ℓ^1 .

Si B contient un sous-espace L^1 , l'un des opérateurs $\bigoplus_i P_i \circ I$, $P \circ I$ fixera une copie de L^1 (cf. [3]). Puisque $\bigoplus_i P_i \circ I$ a son image dans $\bigoplus_i U_i$, $P \circ I$

et donc T fixera une copie de L^1 , ce qui achève la démonstration.

Afin de démontrer le Th. 1, on va construire un système d'opérateurs sur L^1 .

On commence par introduire un système de sous-espaces de L^1 sous-forme d'une suite transfinie (voir [2] pour détails et autres propriétés).

R_0 est l'espace de dimension 1 engendré par les fonctions constantes.

Soit $\alpha < \omega_1$ et R_α obtenu. On pose alors $R_{\alpha+1} = R_\alpha \oplus R_\alpha$. Plus précisément, si R_α est sous-espace de $L^1(\Omega)$, $R_{\alpha+1}$ est le sous-espace de $L^1(\Omega \oplus \Omega)$ suivant

$$R_{\alpha+1} = \{f \oplus g ; f \in R_\alpha \text{ et } g \in R_\alpha\}.$$

Si γ est un ordinal limite et $R_\alpha \hookrightarrow L^1(\Omega_\alpha)$ obtenu pour tout $\alpha < \gamma$, R_γ sera le sous-espace de $L^1(\bigotimes_{\alpha < \gamma} \Omega_\alpha)$ défini par

$$R_\gamma = [\sum'_{\alpha} f_{\alpha}(t_{\alpha}) ; f_{\alpha} \in R_{\alpha} \text{ pour tout } \alpha < \gamma]$$

où $t = (t_{\alpha})_{\alpha < \gamma}$ est la variable produit.

La démonstration du résultat suivant est de nature ensembliste et peut être trouvée dans [2].

Proposition 3 : Tout espace B séparable universel pour le système $(R_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ contient un sous-espace L^1 .

On montre que chaque R_α se plonge dans un espace $\mathfrak{L}^1$ ne contenant pas L^1 . Ceci démontre Th. 1. Par la prop. 2, cette propriété sera une conséquence de la

Proposition 4 : Pour tout $\alpha < \omega_1$ et pour tout $\lambda > 1$, il existe un opérateur $T: L^1 \rightarrow L^1$, tel que

1. $\int Tf = \int f$ pour tout $f \in L^1$.

2. $T(1) = 1$.

3. $\|T\|_p \leq \lambda$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

4. T ne fixe pas d'espace L^1 .

5. $Tf = f$ si $f \in R_\alpha$.

(L'injection de R_α dans L^1 étant celle décrite précédemment.)

La construction de ces opérateurs se passe par induction sur

$\alpha < \omega_1$. Le cas $\alpha \Rightarrow \alpha + 1$ étant presque trivial, montrons comment on procède pour les ordinaux limites.

Soit donc $\gamma < \omega_1$ ordinal limite et $\lambda > 1$. Soit pour tout $\alpha < \gamma$, $\lambda_\alpha > 1$ tel que $\lambda' = \prod_{\alpha < \gamma} \lambda_\alpha < \lambda$.

Par hypothèse, il existe pour tout $\alpha < \gamma$ un opérateur $S_\alpha : L^1(\Omega_\alpha) \rightarrow L^1(\Omega_\alpha)$ qui satisfait (1), (2), (3), (4), (5) par rapport à R_α et en posant $\gamma = \gamma_\alpha$. Considérons d'abord l'opérateur

$$S = \bigotimes_{\alpha < \gamma} S_\alpha : L^1(\bigotimes_{\alpha} \Omega_\alpha) \longrightarrow L^1(\bigotimes_{\alpha} \Omega_\alpha)$$

défini par $S(f_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes f_{\alpha_k}) = S_{\alpha_1}(f_{\alpha_1}) \otimes \dots \otimes S_{\alpha_k}(f_{\alpha_k})$.

S satisfait toujours (1) et (2) et aussi $\|S\|_p = \prod_{\alpha < \gamma} \|S_\alpha\|_p \leq \prod_{\alpha < \gamma} \lambda_\alpha = \lambda$.

Pour $0 \leq \varepsilon \leq 1$, soit $\Gamma_\varepsilon : L^1(\bigotimes_{\alpha} \Omega_\alpha) \rightarrow L^1(\bigotimes_{\alpha} \Omega_\alpha)$ l'opérateur donné par

$$\Gamma_\varepsilon = \bigotimes_{\alpha < \gamma} \gamma_{\alpha, \varepsilon}$$

où

$\gamma_{\alpha, \varepsilon} : L^1(\Omega_\alpha) \longrightarrow L^1(\Omega_\alpha)$ est l'opérateur $\gamma_{\alpha, \varepsilon}(f) = \varepsilon f + (1 - \varepsilon) \int f$

(Γ_ε s'obtient en fait par convolution)

et $\tau_\varepsilon : L^1(\bigotimes_{\alpha} \Omega_\alpha) \longrightarrow L^1(\bigotimes_{\alpha} \Omega_\alpha)$ l'opérateur $\tau_\varepsilon(f) = \frac{1}{\varepsilon} f + (1 - \frac{1}{\varepsilon}) \int f$.

Fixons $0 < \varepsilon < 1$ tel que $(\frac{2}{\varepsilon} - 1)\lambda' \leq \lambda$ et posons $T = \tau_\varepsilon \Gamma_\varepsilon S$.

Les conditions (1) et (2) sont satisfaites et

$$\|T\|_p \leq \|\tau_\varepsilon\|_p \|\Gamma_\varepsilon\|_p \|S\|_p \leq (\frac{2}{\varepsilon} - 1)\lambda' \leq \lambda \quad \text{pour tout } 1 \leq p < \infty.$$

Vérifions la condition (5). Si $f = \sum'_{\alpha < \gamma} f_\alpha$ où $f_\alpha \in R_\alpha \subset L^1(\Omega_\alpha)$, on trouve

$$\begin{aligned} T(f) &= \sum_{\alpha} T(f_\alpha) = \sum_{\alpha} \tau_\varepsilon \Gamma_\varepsilon S_\alpha(f_\alpha) = \sum_{\alpha} \tau_\varepsilon \Gamma_\varepsilon(f_\alpha) = \sum_{\alpha} \tau_\varepsilon \gamma_{\alpha, \varepsilon}(f_\alpha) \\ &= \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{\varepsilon} \gamma_{\alpha, \varepsilon}(f_\alpha) + (1 - \frac{1}{\varepsilon}) \int f_\alpha \right) = \sum_{\alpha} f_\alpha = f. \end{aligned}$$

La condition (4) est alors une conséquence de la propriété suivante

Proposition 5 : Soit (μ_i) une suite d'espaces probabilisés et $T_i : L^1(\mu_i) \rightarrow L^1(\mu_i)$ une suite d'opérateurs telle que

1. $\int T_i f = \int f$ pour tout $f \in L^1$.
2. $T_i(1) = 1$.
3. $\prod_i \|T_i\|_p < \infty$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

4. Les T_i ne fixent pas de sous-espace L^1 .
 Alors pour tout $0 < \varepsilon < 1$, la composition $\Gamma_\varepsilon \circ \bigotimes_i T_i : L^1(\bigotimes_i \mu_i) \longrightarrow L^1(\bigotimes_i \mu_i)$
 ne fixe pas d'espace L^1 non plus.

La démonstration de la prop. 5 est assez technique et utilise la caractérisation, due à P. Enflo et T. Starbird, d'opérateurs sur L^1 fixant une copie de L^1 (voir [3]).

Remarque : En fait, on peut montrer que les espaces $\mathfrak{L}^1$ construits de cette manière ont la propriété de Radon-Nikodym, ce qui donne l'amélioration suivante du Th. 1 :

Si B est séparable et universel pour la classe des espaces $\mathfrak{L}^1$ séparables possédant la propriété de R-N, alors L^1 se plonge dans B .

REFERENCES

- [1] J. Bourgain : A characterization of non-Dunford-Pettis operators on L^1 , to appear.
- [2] J. Bourgain, H.P. Rosenthal and G. Schechtman : An ordinal L^p -index for Banach spaces, with applications to complemented subspaces of L^p , Annals of Math., to appear.
- [3] P. Enflo and T. Starbird : Subspaces of L^1 containing L^1 , to appear in Studia Math. 65.
- [4] W.B. Johnson and J. Lindenstrauss : Examples of $\mathfrak{L}^1$ -spaces, to appear.
- [5] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri : Classical Banach Spaces, Springer MLN, vol. 338.
- [6] H.P. Rosenthal : Convolution by a biased coin, the Altged Book 1975-76, University of Illinois.
- [7] T. Starbird : Subspaces of L^1 containing L^1 , Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, 1976.
