

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

P. ASSOUD

Caractérisations de sous-espaces normés de L^1 de dimension finie

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1979-1980), exp. n° 19, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1979-1980___A16_0>

© Séminaire d'analyse fonctionnelle
(École Polytechnique), 1979-1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E
D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E
1979-1980

C A R A C T E R I S A T I O N S D E S O U S - E S P A C E S N O R M E S D E L^1

D E D I M E N S I O N F I N I E

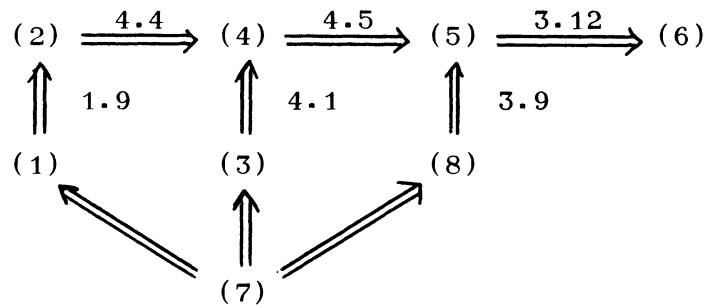
P. ASSOUD
(Université Paris-Sud ERA 532)

§ 1. INTRODUCTION.

Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace normé muni de la distance $x, x' \rightarrow \|x - x'\|$ (distance de Minkowski). On considère les assertions suivantes (plongement signifie ici plongement isométrique^{*}) :

- (1) tout sous-espace métrique de E à 7 points se plonge dans un espace L^1 ;
- (2) $(E, \| \cdot \|)$ satisfait à l'inégalité 7-polygonale (voir ci-dessous 1.8) ;
- (3) tout sous-espace normé de E de dimension ≤ 3 se plonge dans un espace L^1 ;
- (4) $(E, \| \cdot \|)$ satisfait à l'inégalité de Hlawka (voir ci-dessous § 4) ;
- (5) la norme est symétriquement différentiable (voir ci-dessous 3.6) ;
- (6) chaque facette de la boule unité du dual E' a un centre de symétrie ;
- (7) la norme $\| \cdot \|$ est une norme L^1 (c'est-à-dire $(E, \| \cdot \|)$ est un sous-espace normé d'un espace L^1) ;
- (8) la norme $\| \cdot \|$ est une différence de deux normes L^1 .

On va montrer les implications suivantes (valables pour tout espace normé) :



(on a indiqué pour chaque implication l'adresse de sa démonstration).

Si de plus la boule unité de $(E, \| \cdot \|)$ est un polytope (ce qui suppose que E est de dimension finie), alors on a aussi l'implication $(6) \Rightarrow (7)$ (critère d'Alexandrov pour les zonotopes, voir [5], [17] et ci-dessous § 2). Cela donne :

Proposition 1.1 : Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace normé de dimension finie ; on suppose que la boule unité de E est un polytope ; alors les assertions (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8) sont équivalentes. En particulier

* Bien que L^1 ne soit pas strictement convexe, un espace normé qui se plonge isométriquement dans un espace L^1 s'y plonge alors aussi isométriquement et linéairement.

$(E, \| \cdot \|)$ se plonge dans L^1 dès qu'il en est de même de tout sous-espace métrique de cardinal 7 (on peut même se restreindre aux sous-espaces métriques de cardinal 7 et de rang ≤ 3).

Précisons d'abord que l'équivalence $(4) \Leftrightarrow (7)$ (lorsque la boule est un polytope) est due à Witsenhausen [19] ; c'est le point de départ du présent travail.

Par ailleurs l'équivalence $(8) \Leftrightarrow (7)$ (lorsque la boule est un polytope) est un résultat de R. Schneider ([17], p. 72, Satz 6.1). Ainsi seuls les critères (2) et (5) sont nouveaux (noter que (5) n'est qu'une reformulation de (6), cf. Bonnesen et Fenchel [6], p. 25-26 et ci-dessous 3.12). On peut faire les remarques suivantes :

(1.2) l'implication $(8) \Rightarrow (5)$ est une conséquence immédiate des implications $(7) \Rightarrow (3) \Rightarrow (5)$; à ce sujet on peut noter qu'un espace normé vérifiant (8) est nécessairement stable au sens de l'exposé de Krivine [16] (un problème : L^p pour $p \in]2, \infty[$ vérifie-t-il (8) ?) ;

(1.3) l'implication $(1) \Rightarrow (2)$ est connue (voir par exemple mon exposé [2]) ; il faut signaler que l'inégalité 7-polygonale (ni du reste les inégalités de type négatif ou même les inégalités hypermétriques) ne suffit pas à assurer qu'un espace métrique à 7 points se plonge dans un espace L^1 (cf. [1] et [4]) ;

(1.4) l'implication $(3) \Rightarrow (4)$ sera démontrée en (4.1) ; soulignons que bien que l'inégalité de Hlawka ne fasse intervenir que 7 points de E , elle n'est pas conséquence de la plongeabilité dans L^1 de ces 7 points ;

(1.5) le critère (3) de plongement dans L^1 (lorsque la boule est un polytope) est à rapprocher du critère évident suivant (conséquence de l'identité de la médiane) : un espace normé $(E, \| \cdot \|)$ se plonge dans L^2 dès que tout sous-espace normé de E de dimension ≤ 2 se plonge dans un espace L^2 (mais dans L^2 le critère (1) n'a pas d'analogue) ;

(1.6) signalons aussi qu'une norme indéfiniment différentiable satisfait à (5), à (6) et aussi à (8) lorsque la dimension est finie (R. Schneider [18], p. 77) ;

(1.7) la remarque (1.6) ôte toute signification à (8), (5) et (6) pour les plongements dans L^1 d'espaces normés en général (lorsque la boule n'est pas un polytope) ; par contre le problème se pose de savoir si l'inégalité de Hlawka ou l'inégalité 7-polygonale est un critère de plongement dans L^1 des espaces normés lorsque la boule n'est pas un polytope.

Rappelons la définition de l'inégalité 7-polygonale (cf. mon exposé [2]) :

Définition 1.8 : Un écart d sur un ensemble X est dit 7-polygonal s'il vérifie :

$\forall a, b, c, x, y, z, t \in X,$

$$\begin{aligned} d(a,b) + d(a,c) + d(b,c) + d(x,y) + d(x,z) + d(x,t) + d(y,z) + d(y,t) + d(z,t) \\ \leq d(a,x) + d(a,y) + d(a,z) + d(a,t) + d(b,x) + d(b,y) + d(b,z) \\ + d(b,t) + d(c,x) + d(c,y) + d(c,z) + d(c,t) \end{aligned}$$

(on parlera de l'inégalité 7-polynomale appliquée aux points $(a,b,c;x,y,z,t)$).

Proposition 1.9 (Deza [8]) : Tout écart plongeable dans L^1 est 7-polygonal.

Pour les sous-espaces métriques de L^1 on renvoie à Assouad, Deza [3].

§ 2. ZONOTOPES ET ZONOÏDES.

Soient E, E' deux espaces vectoriels localement convexes en dualité. Soit $(\xi_i)_{i \in I}$ une famille finie de points de E' . Soit μ la mesure $\sum_{i \in I} \delta_{\xi_i}$. Le zonotope K' engendré par la famille $(\xi_i)_{i \in I}$ est l'image centrée de la mesure vectorielle $\eta \mu(d\eta)$, c'est-à-dire l'ensemble des points $\int f(\eta) \eta \mu(d\eta)$ pour f mesurable, $-1 \leq f \leq 1$; c'est donc l'ensemble des points $\sum_{i \in I} \lambda_i \xi_i$ pour $-1 \leq \lambda_i \leq 1$ (sous cette forme on voit que c'est bien un polytope).

Si $\eta \mu(d\eta)$ n'est plus discrète, on parle de zonoïde.

Si μ est sans atome et si E' est de dimension finie, le théorème de Liapounov montre que l'image centrée de la mesure vectorielle $\eta \mu(d\eta)$ reste la même si on se restreint aux f à valeurs dans $\{-1,1\}$ (cette image est fermée ; pour ce genre de question, on renvoie à [14] et aussi [12] p. 265-277).

On vérifie immédiatement que le polaire K d'un zonoïde K' a pour jauge

$$(2.1) \quad x \longrightarrow \int_{E'} |\langle \eta, x \rangle| \mu(d\eta) ;$$

cette jauge est donc une semi-norme plongeable dans L^1 (c'est la fonction d'appui du zonoïde). Par ailleurs si E' est de dimension finie, toute semi-norme plongeable dans L^1 est de la forme (2.1) (c'est un résultat de Paul Lévy, voir par exemple [7] Lemme 2, p. 239) ; on a donc :

Proposition 2.2 : On suppose E' de dimension finie ; alors une partie convexe fermée de E' est un zonotède si et seulement si la jauge de son polaire est plongeable dans L^1 .

On remarque que si K' est un zonotope engendré par la famille $(\xi_i)_{i \in I}$ et si η_1 est un point extrémal de K' , alors $K' - \eta_1$ (zonotope décentré où on a amené l'origine en η_1) est la fermeture convexe de l'ensemble des vecteurs $\sum_{i \in A} \zeta_i$ pour tout $A \subset I$ (où $\zeta_i = 2 \varepsilon_i \xi_i$ avec $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ une suite convenable fixée de signes). Sous cette forme on a clairement :

Proposition 2.3 [9] [10] : Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace normé de dimension 2 ; c'est un sous-espace de L^1 .

Démonstration : Il suffit de la montrer lorsque la boule unité K de $(E, \| \cdot \|)$ est un polygone. Alors K' (le polaire de K) est aussi un polygone symétrique et donc un zonotope de façon évidente (déplacer l'origine en un point extrémal de K' , les ζ_i sont les arêtes de K') ; donnons cependant deux autres démonstrations :

a) (c'est en substance celle de Ferguson [9]) supposons que K soit un polygone et notons $(x_i)_{i \in I}$ ses points extrémaux (on les suppose indexés de façon cyclique et dans l'ordre où on les rencontre en parcourant ∂K dans le sens positif ; l'espace est supposé orienté) ; on pose $y_i = x_i - x_{i-1}$ pour tout $i \in I$; on a alors pour tout $x \in E$:

$$\|x\| = \sum_{i \in I} \frac{y_{i+1} \wedge y_i}{4(x_{i+1} \wedge x_i)(x_i \wedge x_{i-1})} |x \wedge x_i|$$

(ici $\wedge$ désigne les produits extérieurs).

b) si au contraire la norme est de classe C^2 , posons $p_0(x) = \|x\|^2$; on a alors :

$$\|x\| = \int_0^{2\pi} \frac{\Delta p_0(e^{it})}{4} |x \wedge e^{it}| dt$$

(où on a identifié E à $\mathbb{C}$ et où Δ est le laplacien ; notons que parmi les fonctions 1-homogènes de classe C^2 sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, les semi-normes sont celles qui ont un laplacien positif). ■

Enfin rappelons le critère d'Alexandrov pour les zonotopes (on renvoie à [5] Th. 3.3, p. 331 ou [17] Lemma 6.2, p. 72) :

Proposition 2.4 : Un polytope centré en 0 est un zonotope si et seulement si toutes ses faces admettent un centre de symétrie.

§ 3. LES CARACTERISTIQUES DES FACETTES ET LES IMPLICATIONS (8) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6).

On sait que dans tout espace normé $(E, \| \cdot \|)$ la norme admet une dérivée directionnelle au point v dans la direction x ; autrement dit $\tau(v, x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{\lambda} (\|v + \lambda x\| - \|v\|)$ existe (Bonnesen et Fenchel [6], p. 19) ; de plus c'est la fonction d'appui de la facette dans la direction v de la boule unité du dual ([6], p. 25-26, voir ci-dessous 3.12). Soit $p_v(x)$ (resp. $\eta_v(x)$) la partie symétrique (resp. antisymétrique) en x de $\tau(v, x)$; on a donc :

$$p_v(x) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\|x + \lambda v\| + \|x - \lambda v\|}{2} - \|\lambda v\|$$

$$\eta_v(x) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\|x + \lambda v\| - \|x - \lambda v\|}{2} .$$

Dans un espace L^1 on a de plus (Kripke et Rivlin [15], Th. 1.1, p. 103) si on note $\|x\| = \int |x|$:

$$p_v(x) = \int_{v=0} |x| \quad \text{et} \quad \eta_v(x) = \int x \operatorname{sgn} v \quad (\operatorname{sgn} 0 = 0) .$$

Comme tout espace normé de dimension ≤ 2 est un sous-espace de L^1 (voir ci-dessus 2.3) on a dans tout espace normé (avec une autre preuve de l'existence de p_v et η_v) :

(3.1) $p_v(x)$ est 0- (resp. 1-) positivement homogène et paire en v (resp. x) ;

(3.2) $\eta_v(x)$ est 0- (resp. 1-) positivement homogène et impaire en v (resp. x) ;

(3.3) $p_v(x + v) = p_v(x)$, $\eta_v(x + v) = \eta_v(x) + \|v\|$;

(3.4) $p_v(x) + |\eta_v(x)| \leq \|x\|$;

(3.5) $p_0(x) = \|x\|$, $\eta_0(x) = 0$ (on utilisera donc $p_0(x)$ pour $\|x\|$) .

Notons que si la norme est Gateaux-différentiable au point v (c'est-à-dire si la dérivée directionnelle $\tau(v, x)$ est une forme linéaire en x) alors $p_v(x)$ est nul et $\eta_v(x)$ est linéaire en x .

Définition 3.6 : Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace normé. On dit que la norme $\| \cdot \|$ est symétriquement différentiable si pour tout $v \in E$, la fonction $x \mapsto \eta_v(x)$ est linéaire.

Voici des exemples de normes symétriquement différentiables :

(3.7) les normes Gateaux-différentiables (voir ci-dessus) ;

(3.8) les semi-normes L^1 (voir ci-dessus, mais alors p_v n'est pas nul en général) ;

(3.9) les différences de deux semi-normes L^1

(mais la norme de ℓ^∞_3 n'est pas symétriquement différentiable : prendre $v_1 = v_2 = v_3 = 1$, alors on a $\eta_v(x) = \frac{1}{2} (x_1 \vee x_2 \vee x_3 + x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$).

On va voir que la fonction $x \mapsto p_v(x)$ hérite des inégalités linéaires (les PLI de Witsenhausen [20] satisfaites par la norme :

(3.10) une inégalité linéaire ($\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in E, \sum_{i=1}^k c_i p(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j) \geq 0$)

concernant une fonction 1-positivement homogène p sur un espace vectoriel E est dite effective si elle est vraie sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire pour $t_1, t_2, \dots, t_n$ réels et $p: t \mapsto |t|$) et minimale si on a :

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ avec } \sum_{i=1}^k c_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_j \right| = 0$$

$$\text{et } \inf_{1 \leq i \leq k} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_j \right| > 0$$

(cela signifie en particulier que les coefficients c_i sont minimaux).

Proposition 3.11 : Pour tout $v \in E$, toute inégalité linéaire effective et minimale satisfaite par la norme est satisfaite par p_v .

Démonstration : On garde les notations de 3.10 ; soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ annulant l'inégalité et tels que $b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_j$ soit non nul pour tout $i = 1, \dots, k$; soient $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$; on applique l'inégalité (pour $p: x \mapsto \|x\|$) aux points $(x_j + \lambda \lambda_j v)_{j=1, \dots, n}$, puis aux points $(x_j - \lambda \lambda_j v)_{j=1, \dots, n}$ et enfin aux points $(\lambda \lambda_j v)_{j=1, \dots, n}$ (dans ce dernier cas c'est une égalité) ; on somme les trois inégalités avec les coefficients $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ et -1 et on fait tendre λ vers $+\infty$; on obtient donc :

$$\sum_{i=1}^k c_i p_{b_i v} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \geq 0 ;$$

cela donne le résultat (par 3.1, car b_i est non nul pour tout $i = 1, \dots, k$).

Comme on l'a dit plus haut, il est classique (Bonnesen et Fenchel [6], p. 25-26) que $x \rightarrow \tau(v, x)$ est la fonction d'appui de la facette F_v dans la direction v de la boule unité de son dual E' , c'est-à-dire $\sup_{\xi \in F_v} \langle x, \xi \rangle$.

Si la norme est symétriquement différentiable, la forme linéaire η_v est centre de symétrie de F_v ; on se contente de reprendre la démonstration de [6] dans ce cas :

Proposition 3.12 : Si la norme de E est symétriquement différentiable, alors les facettes de la boule unité K' du dual E' sont centrées. De façon précise pour tout élément $v \neq 0$ de E , la facette de K' dans la direction v (c'est-à-dire l'intersection de K' avec l'hyperplan $\{\xi \in E' \mid \langle v, \xi \rangle = \|v\|\}$) est exactement

$$K'_v = \{\xi \in E' \mid \forall x \in E, |\langle x, \xi - \eta_v \rangle| \leq p_v(x)\}$$

et a donc la forme linéaire continue η_v pour centre de symétrie.

Démonstration : Notons F_v la facette de K' dans la direction v ; par hypothèse η_v est une forme linéaire sur E et on a :

$$\langle v, \eta_v \rangle = \|v\| \quad (\text{par 3.3}) \quad \text{et} \quad \|\eta_v\| = 1 \quad (\text{par 3.4}) .$$

(i) On a $F_v \subset K'_v$: en effet soit $\xi \in F_v$; on a donc $\|\xi\| = 1$ et $\langle v, \xi \rangle = \|v\|$; on a donc $\langle x, \xi \rangle = \langle x + \lambda v, \xi \rangle - \langle \lambda v, \xi \rangle \leq \|x + \lambda v\| - \lambda \|v\|$; lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$, on trouve $\langle x, \xi \rangle \leq \langle x, \eta_v \rangle + p_v(x)$ pour tout $x \in E$; donc $\xi \in K'_v$.

(ii) Inversement on a $K'_v \subset F_v$: en effet soit $\xi \in K'_v$; par 3.3 on a $p_v(v) = 0$, donc $\langle v, \xi \rangle = \langle v, \eta_v \rangle = \|v\|$; par ailleurs pour tout $x \in E$ on a $\langle x, \xi \rangle \leq p_v(x) + \langle x, \eta_v \rangle \leq \|x\|$ (par 3.4) ; donc $\xi \in F_v$. ■

§ 4. L'INEGALITE DE HLAWSKA ET LES IMPLICATIONS (2) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5).

La forme initiale de l'inégalité de Hlawka (celle de [11] et [19]) est la suivante :

$$(H_1) \quad \|a + b\| + \|a + c\| + \|b + c\| \leq \|a\| + \|b\| + \|c\| + \|a + b + c\| .$$

On va donner plusieurs autres formes équivalentes :

- si on pose $a = \frac{y+z-x}{4}$, $b = \frac{x+z-y}{4}$, $c = \frac{x+y-z}{4}$, on obtient :

$$(H_2) \quad \frac{\|x\| + \|y\| + \|z\|}{2} \leq \mathbb{E} \|x \sigma_1 + y \sigma_2 + z \sigma_3\| \quad ;$$

- si on pose $a = z+x$, $b = z-x$, $c = y-z$, on obtient :

$$(H_3) \quad \|x+y\| + \|x-y\| - \|x\| - \|y\| \\ < (\|x+z\| + \|x-z\| - \|x\| - \|z\|) + (\|y+z\| + \|y-z\| - \|y\| - \|z\|) \quad ;$$

- si on pose $a = x-v$, $b = y-v$, $c = 2v$, on obtient :

$$(H_4) \quad (\|x+v\| - \|x-v\|) + (\|y+v\| - \|y-v\|) + \left(\frac{\|x+y+2v\| + \|x+y-2v\|}{2} - \|2v\| \right) \\ \leq \left(\frac{\|x+y+2v\| - \|x+y-2v\|}{2} \right) + \|x+y\| \quad .$$

Propriétés : Les formes (H_1) , (H_2) , (H_3) et (H_4) sont équivalentes ; on va pour l'instant utiliser seulement la forme (H_3) :

(4.1) dans $\mathbf{R}$ on a $|x+y| + |x-y| - |x| - |y| = ||x| - |y||$; cela montre que l'inégalité de Hlawka est vraie dans $\mathbf{R}$ (est effective) et donc dans L^1 (sous la forme (H_3)) ;

(4.2) d'ailleurs l'inégalité de Hlawka (sous la forme (H_3)) exprime simplement que $\|x+y\| + \|x-y\| - \|x\| - \|y\|$ est un écart ;

(4.3) lorsqu'elle devient une égalité, l'inégalité de Hlawka (sous la forme (H_3)) signifie (dans $\mathbf{R}$) : $|z|$ sépare $|x|$ et $|y|$ (elle est donc minimale).

Dans un espace normé, l'inégalité 7-polygonale implique l'inégalité de Hlawka :

Proposition 4.4 : L'inégalité 7-polygonale (cf. 1.8) appliquée aux points $(0, z, -z; x, -x, y, -y)$ donne exactement l'inégalité de Hlawka (sous la forme (H_3) , multipliée par 2).

Démonstration : Une vérification très simple (on peut noter que le cas d'égalité dans $\mathbf{R}$ de cette inégalité 7-polygonale est : $0, z, -z$ séparent $x, -x, y, -y$; c'est un résultat de J.B. Kelly [13] ; comparer avec 4.3). ■

Enfin sous la forme (H_4) l'inégalité de Hlawka implique que la norme est symétriquement différentiable :

Proposition 4.5 : Si l'espace normé $(E, \| \cdot \|)$ satisfait à l'inégalité de Hlawka, alors $x \rightarrow \eta_v(x)$ est une forme linéaire pour tout $v \in E$.

Démonstration : On applique (H_4) à $\lambda v, x, y$; on obtient (lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$) :

$$2\eta_v(x) + 2\eta_v(y) + p_v(x+y) \leq \eta_v(x+y) + \|x+y\| \quad .$$

On applique cette inégalité à x et $y + \lambda v$; tenant compte de (3.3) on obtient (lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$) :

$$2\eta_v(x) + 2\eta_v(y) \leq 2\eta_v(x+y) \quad .$$

Changeant v en $-v$ et tenant compte de (3.2) on obtient :

$$\eta_v(x) + \eta_v(y) = \eta_v(x+y) \quad . \quad \blacksquare$$

On a donc montré lorsque la boule unité est un polytope l'équivalence de (2), (4) et (7). Le problème se pose de savoir si on peut se débarrasser de cette hypothèse ; autrement dit :

(4.6) soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace normé de dimension finie ; on suppose que la norme de E est 7-polygonale ; peut-on approcher la norme de E par des normes linéaires par morceaux (c'est-à-dire dont la boule unité est un polytope) et 7-polygonales ?

Dans le cas d'une réponse positive, l'inégalité 7-polygonale pourrait se substituer au type négatif [7] comme critère de plongement des espaces normés dans L^1 ; on notera que, pour un espace métrique quelconque, type négatif et inégalité 7-polygonale ne s'impliquent pas mutuellement (voir [3]) et ne sont ni l'un ni l'autre des critères de plongement dans L^1 , cf. 1.3.

D'autre part, on peut se demander si 7-polygonal peut être remplacé par 5-polygonal (c'est-à-dire pentagonal, cf. [2]) :

(4.7) peut-on trouver un espace normé de dimension finie, dont la boule unité soit un polytope et qui soit 5-polygonal et non plongeable dans L^1 ?

Cet exposé doit beaucoup aux encouragements de Hans S. Witsenhausen (qui m'a signalé les résultats de R. Schneider) ; je tiens à l'en remercier.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. Assouad : C.R. Acad. Sc. Paris 285 (1977), 361-363.
- [2] P. Assouad : dans ce même volume, exposé No 3.
- [3] P. Assouad, M. Deza : Embeddings of metric spaces in combinatorics and analysis (livre en cours de rédaction).
- [4] D. Avis : Technical report SOCS-78.4 (1978), McGill University.
- [5] E.D. Bolker : Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969), 323-345.
- [6] T. Bonnesen, W. Fenchel : Theorie der konvexen Körper, Springer Verlag (1934) Berlin (reprint de 1948).
- [7] J. Bretagnolle, D. Dacunha-Castelle, J.L. Krivine : Ann. Inst. Henri Poincaré 2 (1966), 231-259.
- [8] M. Deza (Tyklyn) : Doklady Akad. Nauk SSSR, 134 (1960), 1037-1040.
- [9] T.S. Ferguson : Ann. Math. Stat. 33 (1962), 1256-1266.
- [10] C.S. Herz : Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), 670-676.
- [11] H. Hornich : Math. Zeitschrift 48 (1942), 268-275.
- [12] S. Karlin, W.J. Studden : Tchebycheff systems, Interscience publ. (1966).
- [13] J.B. Kelly : Metric inequalities and symmetric differences, in Inequalities II , Oved Shisha ed. (Colorado 1967), 193-212.
- [14] I. Kluvanek, G. Knowles : Vector measures and control systems, Notas de Matematica No 20 (1976).
- [15] B.R. Kripke, T.J. Rivlin : Trans. Amer. Math. Soc. 119 (1965), 101-122.
- [16] J.L. Krivine : dans ce même volume, exposé No 12.
- [17] R. Schneider : Math. Nachr. 44 (1970), 55-75.
- [18] R. Schneider : Math. Z. 101 (1967), 71-82.
- [19] H.S. Witsenhausen : Mathematika (Londres) 25 (1978), 13-16.
- [20] H.S. Witsenhausen : Proc. Amer. Math. Soc. 40 (1973).
