

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. L. KRIVINE

Plongement de l^p dans certains espaces de Banach

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1979-1980), exp. n° 12, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1979-1980__A10_0>

© Séminaire d'analyse fonctionnelle
(École Polytechnique), 1979-1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E
D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E
1979-1980

PLONGEMENT DE ℓ^p DANS CERTAINS ESPACES DE BANACH
=====

J.L. KRIVINE
(Université Paris VII)

Dans un exposé précédent à ce séminaire [1], a été donnée une preuve d'un résultat d'Aldous [2] : tout sous-espace de L^1 de dimension infinie contient un espace ℓ^p pour un $p \in [1, 2]$. Bien que la preuve semble reposer de façon essentielle sur des techniques probabilistes (mesures aléatoires), on peut en fait les éliminer complètement, et donner une démonstration plus "géométrique" ; peut-être plus simple que la preuve d'Aldous, elle permet aussi d'étendre le résultat à une classe d'espaces de Banach, qui peut avoir un certain intérêt en elle-même. Les démonstrations complètes seront données dans [3].

Soit E un espace de Banach sur $\mathbf{R}$, que nous supposons séparable pour simplifier. On dira que E est stable si, quelles que soient les suites x_m, y_n dans la boule unité de E , et les ultrafiltres $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ sur $\mathbf{N}$, on a :

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{V}}} \|x_m + y_n\| = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{V}}} \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \mathcal{U}}} \|x_m + y_n\| \quad .$$

On peut énoncer une condition équivalente ne faisant pas intervenir d'ultrafiltre :

$$\sup_{m < n} \|x_m + y_n\| \geq \inf_{m > n} \|x_m + y_n\|$$

quelles que soient les suites x_m, y_n dans la boule unité de E .

Un type sur E est une fonction $\sigma : E \rightarrow \mathbf{R}_+$ de la forme $\sigma(x) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{U}}} \|a_n + x\|$, a_n étant une suite bornée de E . Les types forment un espace localement compact métrisable $\mathfrak{T}$, (pour la topologie de la convergence simple sur E) dans lequel E (muni de la topologie forte) est plongé de façon naturelle. On peut donc écrire $\sigma = \lim_{\mathcal{U}} a_n$.

Le type $\mathbf{0}$ est défini par $\mathbf{0}(x) = \|x\|$ pour $x \in E$. On définit deux opérations sur les types : si $\sigma \in \mathfrak{T}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ on définit le type $\lambda\sigma$ par $\lambda\sigma = \mathbf{0}$ si $\lambda = 0$; $(\lambda\sigma)(x) = |\lambda| \sigma(x/|\lambda|)$ si $\lambda \neq 0$. Si $\sigma = \lim_{\mathcal{U}} a_m$, $\tau = \lim_{\mathcal{V}} b_n$ sont deux types, on définit leur "produit de convolution" $\sigma * \tau$ en posant $(\sigma * \tau)(x) = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ \mathcal{U}}} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \mathcal{V}}} \|a_m + b_n + x\|$.

Le fait que cette opération est bien définie, commutative et associative est une conséquence facile de la stabilité de l'espace E .

L'opération $(\sigma, \tau) \rightarrow \sigma * \tau$ est continue en chacune des variables, mais n'est pas continue en les deux variables (si E est de dimension infinie).

Exemples : Tout espace de dimension finie est stable ; ℓ^2 est stable : car on a, si $x_m, y_n \in \ell^2, \|x_m\|, \|y_n\| \leq 1$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_m + y_n\|^2 - \|x_m\|^2 - \|y_n\|^2) =$$

$$\mathcal{U} \quad \mathcal{V}$$

$$2 \langle x, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} (\|x_m + y_n\|^2 - \|x_m\|^2 - \|y_n\|^2)$$

$$\mathcal{V} \quad \mathcal{U}$$

où x (resp. y) est la limite faible de la suite x_m (resp. y_n) suivant $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{V}$).

L'espace L^1 est stable : car la fonction $\|x - y\|$ est de type négatif sur L^1 , donc la fonction $\|x\| + \|y\| - \|x - y\|$ est de type positif. Il existe donc une application (non linéaire) $U: L^2 \rightarrow H$ où H est un espace de Hilbert, telle que $\|x\| + \|y\| - \|x - y\| = \langle U(x), U(y) \rangle$.

On en déduit $\|U(x)\|^2 = 2\|x\|$. Donc, si $x_m, y_n \in L^1, \|x_m\|, \|y_n\| \leq 1$, on a $\|U(x_m)\|, \|U(y_n)\| \leq \sqrt{2}$. Par suite, en désignant par ξ (resp. η) la limite faible de $U(x_m)$ (resp. $U(y_n)$) suivant l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{V}$), on a :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_m\| + \|y_n\| - \|x_m - y_n\|) = \langle \xi, \eta \rangle =$$

$$\mathcal{U} \quad \mathcal{V}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} (\|x_m\| + \|y_n\| - \|x_m - y_n\|) \quad .$$

$$\mathcal{V} \quad \mathcal{U}$$

En fait, l'espace L^p est stable pour $1 \leq p < +\infty$. Plus généralement, si E est un espace stable, $L^p(E)$ en est un aussi pour $1 \leq p < +\infty$ (voir [3]). On vérifie aisément que c_0 n'est pas stable.

- Etant donné un type σ sur E, on définit le modèle étalé sur E associé à σ : c'est l'espace vectoriel engendré par E et une suite $e_1, \dots, e_n, \dots$ muni de la semi-norme $\|x + \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\| = (\lambda_1 \sigma) * \dots * (\lambda_n \sigma)(x)$ pour $x \in E, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (ou plutôt le séparé complété de cet espace).

- Un type σ sur E est dit symétrique si on a $\sigma(x) = \sigma(-x)$ pour $x \in E$. Si E est un espace stable de dimension infinie, il existe

un type symétrique $\sigma \neq \mathbb{0}$ sur E : il suffit de poser $\tau = \lim_{\mathcal{U}} b_n$, où b_n est une suite bornée de E sans sous-suite convergente, et de poser $\sigma = \tau * (-\tau)$.

Un type symétrique $\sigma \neq \mathbb{0}$ sur E sera appelé ℓ^p -type si on a $(\alpha\sigma) * (\beta\sigma) = \gamma\sigma$ pour $\alpha, \beta > 0$ avec $\gamma = (\alpha^p + \beta^p)^{1/p}$.

On montre sans difficulté la proposition suivante :

Proposition 1 : S'il existe un ℓ^p -type sur E , alors E contient un sous-espace isomorphe à ℓ^p (à c_0 si $p = +\infty$).

c_0 n'étant pas stable (ni aucun espace isomorphe à c_0) on en déduit qu'il n'existe pas de ℓ^∞ -type sur E . On est ramené à montrer l'existence d'un ℓ^p -type ; on utilise pour cela la caractérisation suivante :

Proposition 2 : Pour qu'un type symétrique $\sigma \neq \mathbb{0}$ sur l'espace stable E soit un ℓ^p -type pour un $p \geq 1$, il faut et il suffit que, quels que soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+$ tel que $\alpha\sigma * \beta\sigma = \gamma\sigma$.

Soit $\mathfrak{J}$ l'espace localement compact (fermé dans $\mathfrak{T}$) des types symétriques. Une partie C non vide de $\mathfrak{J}$ sera appelée une classe conique si :

C est fermée et $\neq \{\mathbb{0}\}$

$\sigma \in C, \lambda \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \lambda\sigma \in C$

$\sigma, \tau \in C \Rightarrow \sigma * \tau \in C$

α, β étant deux réels ≥ 0 , une suite $\sigma_n \in \mathfrak{J}$ sera dite (α, β) -approximante si on a

$$|(\sigma_n * \alpha\sigma_n)(x) - (\beta\sigma_n)(x)| \leq 1/n \quad \text{pour } x \in E \text{ et } x \geq 1.$$

Proposition 3 : Soient C une classe conique et $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Alors il existe $\beta \geq 1$ et une suite $\sigma_n \in C$ qui est (α, β) -approximante, avec $\sigma_n(0) = 1$.

Pour montrer cette proposition, on utilise le

Lemme : Soit E un espace de Banach, $T: E \rightarrow E$ un opérateur linéaire continu et λ un point frontière du spectre de T . Alors il existe une suite $x_n \in E$, $\|x_n\| = 1$, telle que $\|Tx_n - \lambda x_n\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

En effet, on peut supposer $\lambda = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe α ,

$|\alpha| \leq \varepsilon/2$ tel que $T - \alpha I$ soit inversible. Puisque T n'est pas inversible, on a :

$$\|(T - \alpha I)^{-1}\|^{-1} < |\alpha| \leq \varepsilon/2 \quad .$$

Il existe donc $y \in E$, $\|y\| = 1$ tel que

$$\|(T - \alpha I)^{-1} y\| > 2/\varepsilon \quad .$$

Posons $x = (T - \alpha I)^{-1} y / \|(T - \alpha I)^{-1} y\|$. On aura

$$\|(T - \alpha I)x\| \leq \varepsilon/2 \quad , \quad \text{d'où} \quad \|Tx\| \leq \varepsilon \quad . \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Preuve de la proposition 3 : On prend $\sigma \in C$, $\sigma(0) = 1$ et on considère la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ engendrant le modèle étalé associé à σ ; H étant l'espace fermé engendré par les e_n , On définit $T: H \rightarrow H$ en posant

$$Te_n = e_{2n} + \alpha e_{2n+1} \quad .$$

Comme e_n est une base inconditionnelle (de constante 1) symétrique, on a $\|u\| \leq \|Tu\| \leq (1 + \alpha)\|u\|$ pour $u \in H$. Par ailleurs $\|Tu - \xi_1\| \geq 1$ pour $u \in H$, donc T n'est pas inversible. Soit $\beta \geq 0$ un point frontière du spectre de T , et $u_n \in H$ tels que $\|u_n\| = 1$ et $\|Tu_n - \beta u_n\| \leq 1/n$. Chaque u_n peut être pris comme combinaison linéaire finie des e_i . Par suite, si on pose $\sigma_n(x) = \|u_n + x\|$ pour $x \in E$, on a $\sigma \in C$. On a

$$|\|Tu_n + x\| - \|\beta u_n + x\|| \leq \|Tu_n - \beta u_n\| \leq \frac{1}{n} \quad ,$$

ce qui donne $|(\sigma_n * \alpha \sigma_n)(x) - (\beta \sigma_n)(x)| \leq \frac{1}{n} \quad . \quad \text{C.Q.F.D.}$

En appliquant le théorème de Zorn à l'ensemble des classes coniques (ou plutôt à leurs traces sur $\{\sigma \in \mathcal{J}; \sigma(0) = 1\}$) on voit qu'il existe une classe conique C minimale

Proposition 4 : Soient C une classe conique minimale et $\alpha \geq 0$. Alors il existe $\beta \geq 1$ tel que tout point de C soit limite d'une suite (α, β) -approximante d'éléments de C .

On prend dans C une suite σ_n qui est (α, β) -approximante avec $\sigma_n(0) = 1$; β étant ainsi fixé, soit C' l'ensemble des limites des suites

(α, β) -approximantes convergentes d'éléments de C . On vérifie que C' est une classe conique, ce qui donne le résultat cherché car $C' \subset C$ et C est minimale.

On pose $\mathcal{T}_1 = \{\sigma \in \mathcal{T}; \sigma(0) \leq 1\}$ qui est un espace compact. Pour chaque $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ et $a \in \Delta$ (partie dénombrable dense de E) on définit la fonction $\psi_{\alpha, a} : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathbb{R}_+$ en posant $\psi_{\alpha, a}(\sigma) = (\sigma * \alpha \sigma)(a)$. La fonction $(\sigma, \tau) \rightarrow (\sigma * \alpha \tau)(a)$ étant séparément continue sur $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_1$ est de première classe de Baire sur cet espace. Il en résulte que $\psi_{\alpha, a}$ est de première classe de Baire sur $\mathcal{T}_1$, donc sur le sous-espace $\{\sigma \in C; 0 < \sigma(0) < 1\}$ qui est ouvert dans C , et est donc un espace de Baire.

Il existe donc un point $\tilde{\sigma}$ de cet espace qui est point de continuité pour toutes les fonctions $(\psi_{\alpha, a})_{\alpha \in \mathbb{Q}_+}$ qui forment une famille dénombrable de fonctions de première classe de Baire.

Soit $\alpha \in \mathbb{Q}_+$; d'après la proposition 4, il existe $\beta \geq 1$ et une suite $\sigma_n \in C$, (α, β) -approximante et tendant vers $\tilde{\sigma}$; donc $\psi_{\alpha, a}(\sigma_n) \rightarrow \psi_{\alpha, a}(\tilde{\sigma})$. Or $|(\sigma_n * \alpha \sigma_n)(a) - (\beta \sigma_n)(a)| \rightarrow 0$, et $(\beta \sigma_n)(a) \rightarrow (\beta \tilde{\sigma})(a)$. Il en résulte que $(\tilde{\sigma} * \alpha \tilde{\sigma})(a) = (\beta \tilde{\sigma})(a)$ pour tout $a \in \Delta$ d'où $\tilde{\sigma} * \alpha \tilde{\sigma} = \beta \tilde{\sigma}$. D'après la proposition 2, on en déduit que $\tilde{\sigma}$ est un ℓ^p -type.

La proposition 1 donne alors le théorème suivant qui généralise le résultat d'Aldous :

[Théorème] : Tout espace stable de dimension infinie contient un ℓ^p , pour un $p \geq 1$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. Maurey : Tout espace de L^1 contient un ℓ_p , d'après D. Aldous, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle 1979-1980, Exposés No I-II, Ecole Polytechnique, Palaiseau (France).
- [2] D. Aldous : Subspaces of L^1 via random measures, (preprint).
- [3] J.L. Krivine, B. Maurey : Espaces de Banach stables, (à paraître).
