Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

C. Samuel

Sur la reproductibilité des espaces l_p

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. nº 26, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979____A22_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E   F O N C T I O N N E L L E

1978-1979

SUR LA REPRODUCTIBILITE DES ESPACES ℓ_p

C. SAMUEL

(U.E.R. Marseille-Luminy)

Exposé No XXVI

4 Mai 1979

RESUME Dans ce travail on étudie les propriétés de reproductibilité des espaces ℓ_p dans les produits tensoriels topologiques d'espaces de Banach. (•)

1 - Introduction .

Deux espaces de Banach E et F sont isomorphes s'il existe une application linéaire T de E sur F et deux réels $0 < a \leq b$ tels que pour tout $x \in E$

$$a \|x\| \leq \|T(x)\| \leq b \|x\| .$$

Si E est un espace de Banach nous notons B_E la boule unité fermée de E et nous notons E' le dual topologique de E.

Rappelons que si E et F sont deux espaces de Banach, la norme ε sur $E \otimes F$ est définie par

$$\|u\|_\varepsilon = \sup \{ |(\varphi \otimes \Psi)(u)| \ ; \varphi \in B_{E'} \text{ et } \Psi \in B_{F'} \}$$

et la norme π est définie par

$$\|u\|_\pi = \inf \{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \, \|y_i\| \ ; u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \} .$$

Nous notons $E \otimes_\varepsilon F$ l'espace $E \otimes F$ muni de la norme ε , $E \hat{\hat{\otimes}} F$ le complété de $E \otimes_\varepsilon F$, $E \otimes_\pi F$ l'espace $E \otimes F$ muni de la norme π et $E \hat{\otimes} F$ le complété de $E \otimes_\pi F$.

Le symbole ℓ_∞ notera ici l'espace des suites de scalaires qui convergent vers 0 muni de la norme sup. (habituellement noté c_o) .

L'objet de ce travail est de montrer que si pour un espace de Banach E $\ell_p \hat{\otimes} E$ contient un sous-espace isomorphe à ℓ_q , $p < q \leq \infty$, alors E'' a un sous-espace isomorphe à ℓ_q et si $\ell_p \hat{\hat{\otimes}} E$ contient un sous-espace isomorphe à ℓ_r , $1 \leq r < p$, alors E contient un sous-espace isomorphe à ℓ_r . Pour obtenir ces résultats nous donnons tout d'abord une interprétation de $\ell_p \hat{\hat{\otimes}} E$ comme

---

(•) Cet article doit paraître dans Mathematica Scandinavica.

espace de suites d'éléments de E. Nous caractérisons ensuite les r pour lesquels ℓ_r est isomorphe à un sous-espace de $\ell_p \hat{\hat{\otimes}} \ell_q$. De cette caractérisation nous déduisons que les résultats précédents ne peuvent pas être améliorés. Nous établissons ensuite que si pour un ordinal dénombrable α et un espace de Banach E, l'espace $C(\alpha ; E)$ des fonctions continues de $<1,\alpha>$ dans E contient un sous-espace isomorphe à ℓ_q, $1 \leqq q < \infty$, alors E contient un sous-espace isomorphe à ℓ_q.

Etant donné $1 \leqq p \leqq \infty$ nous convenons de noter p' le réel défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ avec la convention $p' = \infty$ si $p = 1$ et $p' = 1$ si $p = \infty$.

Si $(x_n)_n$ est une suite d'un espace de Banach E, on note $[x_n]_{n=1}^{\infty}$, le sous-espace fermé engendré par les vecteurs x_n, $n = 1, 2, \ldots$

Pour les définitions et propriétés classiques on pourra se reporter à [5] et [9].

2 - Etude de $\ell_p \hat{\hat{\otimes}} E$.

Soient E un espace de Banach et $1 \leq p \leq \infty$; on note pour $1 \leq p < \infty$

$$s\ell_p(E) = \{ x=(x_n)_n ; \forall\, n \quad x_n \in E \text{ et } \forall\, \varphi \in E' \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p < \infty \}$$

et pour $p = \infty$ $s\ell_\infty(E) = \{ x = (x_n)_n ; \forall\, n \quad x_n \in E \text{ et } \forall\, \varphi \in E' \lim\limits_{n \to \infty} \varphi(x_n) = 0 \}$.

Il est immédiat que pour $1 \leqq p \leqq \infty$ $s\ell_p(E)$ est un espace vectoriel.

<u>Remarques</u> :

1) Pour tout $x = (x_n)_n \in s\ell_p(E)$ on a

$$\sup \{ (\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p)^{\frac{1}{p}} ; \varphi \in B_{E'} \} < \infty \quad \text{si} \quad 1 \leq p < \infty$$

et

$$\sup \{ |\varphi(x_n)| ; \varphi \in B_{E'} \text{ et } n=1,2,\ldots \} < \infty \text{ si } p = \infty .$$

Supposons $1 \leq p < \infty$, le cas $p = \infty$ se traite avec des modifications évidentes. Pour chaque entier m nous notons

$$U_m = \{ \varphi \in B_{E'} ; (\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq m \} .$$

Il est immédiat de vérifier que U_m est un sous-ensemble absolument convexe et fermé de $B_{E'}$ et que $B_{E'} = \bigcup_m U_m$; il est clair, d'après le théorème de Baire, que O est point intérieur de U_m d'où le résultat.

2) Pour $x = (x_n)_n \in s\ell_p(E)$ notons

$$\|x\| = \sup \{ (\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p)^{\frac{1}{p}} \ ; \varphi \in B_{E'} \} \text{ si } 1 \leq p < \infty$$

et $$\|x\| = \sup \{ |\varphi(x_n)| \ ; \ \varphi \in B_{E'} \text{ et } n = 1, 2, \dots \} \text{ si } p = \infty \ ;$$

on définit ainsi une norme sur $s\ell_p$ (E). Il est immédiat de vérifier que, muni de cette norme, $s\ell_p(E)$ est un espace de Banach. On trouve une étude des espaces $s\ell_p(E)$ dans [7] exposé n°9.

3) $\ell_p \otimes_\varepsilon E$ est isométrique à un sous-espace de $s\ell_p(E)$. Notons $(e_m)_m$ la base canonique de ℓ_p. Donnons-nous

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes y_i \in \ell_p \otimes E$$

Nous avons pour $i = 1, 2, \dots, m$

$$a_i = \sum_{m=1}^{\infty} a_i(m) e_l \ .$$

Soit $\Psi \in B_{E'}$, nous avons alors

$$\sup \{ | \sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i) \Psi(y_i) | \ ; \varphi \in B_{\ell_{p'}} \} = \sup \{ | \sum_{i=1}^{n} \Psi(y_i) (\sum_{m=1} a_i(m) \varphi(e_m)) | \ ; \ \varphi \in B_{\ell_{p'}} \}$$

$$= \sup \{ | \sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{n} a_i(m) \Psi(y_i)) \varphi(e_m) | \ ; \varphi \in B_{\ell_{p'}} \}$$

$$= \begin{cases} (\sum_{m=1}^{\infty} | \sum_{i=1}^{n} a_i(m) \Psi(y_i) |^p)^{\frac{1}{p}} \text{ si } 1 \leq p < \infty . \\ \sup \{ | \sum_{i=1}^{n} a_i(m) \Psi(y_i) | \ ; \ m = 1, 2, \dots \} \text{ si } p = \infty \ . \end{cases}$$

Il est à remarquer que $\lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i(m) y_i = 0$

donc $$\|u\|_\varepsilon = \| (\sum_{i=1}^{n} a_i(m) y_i)_m \|$$

Nous concluons alors que nous définissons bien une application

$$T : \ell_p \otimes_\varepsilon E \to s\ell_p(E)$$

en posant pour $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes y_i$, $T(u) = (\sum_{i=1}^{n} a_i(m) y_i)_m$

et que T ainsi définie est linéaire et isométrique. Par cette application nous identifions $\ell_p \otimes_\varepsilon E$ a un sous-espace de $s\ell_p(E)$.

4) Pour chaque entier $n = 0, 1, 2, \ldots$ notons

$$P^n : s\ell_p(E) \to s\ell_p(E)$$

l'application linéaire continue qui à $x = (x_i) \in s\ell_p(E)$ associe $P^n(x) = (y_i)_i$ où $y_i = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et $y_i = x_i$ pour $i \geq n+1$. Notons aussi $P_n = I - P^n$.

On note : $\quad F_p = \{x \in s\ell_p(E) \; ; \; \lim_{n \to \infty} P^n(x) = 0\}$,

F_p est visiblement un sous-espace fermé de $s\ell_p(E)$.

Nous allons établir que $\ell_p \otimes E$ est dense dans F_p . Vérifions tout d'abord que $\ell_p \otimes E \subset F_p$. Soit $u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes y_i \in \ell_p \otimes E$; pour chaque entier m et pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$ nous notons :

$$a_i^m = \sum_{\ell=m+1}^{\infty} a_i(\ell)\, e_\ell \quad , \text{ nous avons alors clairement}$$

pour $m = 0, 1, 2, \ldots$ $\qquad P^m(T(u)) = T(\sum_{i=1}^{n} a_i^m \otimes y_i)$

donc $\qquad \|P^m(T(u))\| = \|\sum_{i=1}^{n} a_i^m \otimes y_i\|_\varepsilon \leq \sum_{i=1}^{n} \|a_i^m\| \, \|y_i\|$

d'où le résultat. Pour achever de prouver que $\ell_p \otimes E$ est dense dans F_p il suffit de remarquer qu'étant donné $x = (x_1, \ldots, x_M, 0, \ldots) \in F_p$

on peut toujours trouver $a_1, \ldots, a_k \in \ell_p$ et $y_1, \ldots, y_k \in E$ tels que

$$T(\sum_{\ell=1}^{k} a_\ell \otimes y_\ell) = x$$

L'application T se prolonge en une application linéaire et isométrique de $\ell_p \hat{\hat{\otimes}} E$ sur F_p .

3 - Etude de $\ell_q \hat{\otimes} X$.

Soit X un espace de Banach. Rappelons que $(\ell_q \hat{\otimes} X)' = B(\ell_q , X)$ l'espace des formes bilinéaires continues sur $\ell_q \times X$ (cf. [3]) et qu'il existe une identification canonique entre $B(\ell_q , X)$ et $\mathcal{L}(\ell_q , X')$ l'espace des applications linéaires continues de ℓ_q dans X', rappelons aussi que pour $1 < q \leqq \infty$

$$s\ell_{q'}(X') = \mathcal{L}(\ell_q , X')$$

(cf. [7] exposé n°9). Soient pour $i = 1, 2, \dots, n$ $b_i = (b_i(m))_m \in \ell_q$, $x_i \in X$, $u = \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes x_i$ et soit $\varphi = (\varphi_m)_m \in s\ell_{q'}(X')$, $1 < q \leqq \infty$; la dualité canonique s'exprime alors par :

$$\varphi(u) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i(m)\, \varphi_m(x_i) .$$

Théorème. Soient $1 \leqq q \leqq \infty$ et X un espace de Banach, alors pour tout $u \in \ell_q \otimes X$ on a $\|u\|_\pi = \sup \{ |\varphi(u)| \ ; \ \varphi \in B_{\ell_{q'} \hat{\hat{\otimes}} X'} \}$.

Le résultat est bien connu pour $q = 1$ car nous savons que :

$$\ell_1 \hat{\otimes} X = (X \oplus X \oplus \dots)_{\ell_1} \quad \text{et} \quad c_o \hat{\hat{\otimes}} X' = (X' \oplus X' \oplus \dots)_{c_o} \quad \text{(cf. [3])}.$$

Dans ce qui suit nous supposons $1 < q \leqq \infty$. Soit

$$u \in \ell_q \otimes X \quad \text{tel que } \|u\|_\pi = 1$$

et soit $\delta > 0$ un réel arbitraire, il existe $\varphi \in s\ell_{q'}(X')$ tel que $\|\varphi\| = 1$ et $\varphi(u) = 1$. Pour N assez grand on a $|P^N(\varphi)(u)| \leqq \delta$ d'où le résultat puisque $\|\varphi - P^N(\varphi)\| \leqq 1$. On déduit du théorème que $\ell_q \hat{\otimes} X$ est canoniquement isométriquement isomorphe à un sous-espace de $(\ell_{q'} \hat{\hat{\otimes}} X')'$.

4 - Reproductibilité des espaces ℓ_q.

Le premier théorème que nous allons établir semble bien connu, comme nous n'avons pas de référence pour ce résultat que nous serons amenés à utiliser, nous en donnons une preuve rapide.

Soient E et F deux espaces de Banach, on munit $E \times F$ de la norme $\|(u,v)\| = \max(\|u\|, \|v\|)$.

Théorème 1 Soient E et F deux espaces de Banach et $1 \leq q \leq \infty$. E ou F contient un sous-espace isomorphe à ℓ_q si et seulement si $E \times F$ contient un sous-espace isomorphe à ℓ_q.

Nous traitons le cas $1 \leq q < \infty$, pour le cas $q = \infty$ il suffit de faire des modifications évidentes.

Nous notons P_1 (resp. P_2) l'application $(u,v) \in E \times F \to u \in E$ (resp. $(u,v) \in E \times F \to v \in F$). Supposons que $E \times F$ ait un sous-espace isomorphe à ℓ_q, il existe alors $(f_i)_i$ une suite de $E \times F$ et deux réels $0 < a \leq b$ tels que pour tout entier n et toute famille $a_1, \ldots, a_n$ de scalaires nous ayons

$$a\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q\right)^{1/q} \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right\| \leq b\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q\right)^{1/q} .$$

Supposons en outre que E ne contienne pas de sous-espace isomorphe à ℓ_q, on peut alors trouver $(X_k)_k$ une suite-base bloc normalisée de $(f_i)_i$ telle que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|P_1(X_k)\|^{q'}\right)^{1/q'} \leq \frac{a}{2} \quad \text{si } q > 1$$

et $$\sup_k \|P_1(X_k)\| \leq \frac{a}{2} \quad \text{si } q = 1 .$$

Nous aurons alors pour tout entier n et toute famille $a_1, \ldots, a_n$ de scalaires,

$$\left\|P_1\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \, \|P_1(X_i)\| \leq \frac{a}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q\right)^{1/q} \quad \text{(inégalité de Hölder)}$$

donc $\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i P_2(X_i)\right\| \geq a\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q\right)^{1/q}$, nous avons ainsi prouvé que F contient un sous-espace isomorphe à ℓ_q.

Remarque.

Nous avons prouvé que si $E \times F$ contient une suite-base $(f_n)_n$ équivalente à la base canonique de ℓ_q alors il existe $(X_k)_k$ une suite-base bloc normalisée de $(f_n)_n$ telle que $(P_1(X_k))_k$ ou $(P_2(X_k))_k$ soit équivalente à la base canonique de ℓ_q.

Théorème 2. Soient E et F deux espaces de Banach et $1 \leqq q \leqq \infty$. E ou F a un quotient isomorphe à ℓ_q si et seulement si $E \times F$ a un quotient isomorphe à ℓ_q

Supposons que $E \times F$ a un quotient isomorphe à ℓ_q ; soit $Q : E\times F \to \ell_q$ une application linéaire continue surjective, alors $T = Q' : \ell_{q'} \to E' \times F'$ est un plongement. Notons $i_E : E \to E \times F$ et $i_F : F \to E \times F$ les injections canoniques respectives. D'après la remarque précédente, il est toujours possible de trouver $(\varphi_n)_n$ une suite-base bloc normalisée de la base canonique de $\ell_{q'}$ telle que par exemple :

$$i'_E \circ T : [\varphi_n]_{n=1}^{\infty} \to E'$$

soit un plongement. Notons, pour $n = 1, 2, \ldots$, $f_n = i'_E(T(\varphi_n))$; il suffit alors d'appliquer un résultat de W.B. Johnson et H.P. Rosenthal (cf. [4]) qui affirme que si le dual E' contient une suite normalisée $(f_n)_n$ équivalente à la base canonique $\ell_{q'}$ et si $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ pour la topologie $\sigma(E', E)$ alors E a un quotient isomorphe à ℓ_q.

Théorème 3 Soient E un espace de Banach et $1 \leqq q < p \leqq \infty$. Alors E contient un sous-espace isomorphe à ℓ_q si et seulement si $\ell_p \hat{\hat{\otimes}} E$ contient un sous-espace isomorphe ℓ_q.

Nous conservons les notations du 2. Nous supposons que F_p contient un sous-espace isomorphe à ℓ_q, il existe alors $(X_i)_i$ une suite de F_p et deux réels $0 < \lambda \leq \mu$ tels que pour tout entier n et toute famille $a_1, \ldots, a_n$ de scalaires

$$\lambda \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q\right)^{1/q} \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \right\| \leq \mu \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q\right)^{1/q} .$$

Nous supposons que E ne contient pas de sous-espace isomorphe à ℓ_q , alors , d'après le théorème 1, pour chaque entier m , $E \times \ldots \times E$ (m fois E) ne contient pas de sous-espace isomorphe à ℓ_q .

Soit $0 < \varepsilon < \frac{\lambda}{\mu}$; puisque $(X_i)_i$ est équivalente à la base canonique de ℓ_q et puisque $X_i \in F_p$ pour $i = 1, 2, \ldots$, nous pouvons construire par récurrence $(Y_k)_k$ une suite-base bloc normalisé de $(X_i)_i$ et $n_0 = 0 < n_1 < \ldots < n_k < \ldots$ une suite strictement croissante d'entiers tels que pour $k = 1, 2, \ldots$

$$\| Y_k - (P_{n_k} - P_{n_{k-1}}) (Y_k) \| \leq \frac{\varepsilon}{2^k} \ .$$

Soit, pour $k = 1, 2, \ldots$

$$Z_k = (P_{n_k} - P_{n_{k-1}})(Y_k) ,$$

Puisque $0 < \varepsilon < \frac{\lambda}{\mu}$, $(Z_k)_k$ est une suite-base semi-normalisée de F_p équivalente à la base canonique de ℓ_q (cf. [1] théorème 1). Notons $K = \sup_k \|Z_k\|$ et pour $k = 1, 2, \ldots$, notons $Z_k = (Z_{k,\ell})_\ell$ nous avons $Z_{k,\ell} = 0$ pour $\ell = 1, 2, \ldots, n_{k-1}$ et $\ell \geq n_k + 1$.

Soit m un entier et $a_1, \ldots, a_m$ des scalaires, alors

$$\|\sum_{i=1}^m a_i Z_i\| = \sup \{ (\sum_{i=1}^m |a_i|^p (\sum_{\ell = n_{i-1}+1}^{n_i} |\varphi(Z_{i,\ell})|^p)^{1/p} ; \varphi \in B_{E'} \}$$

$$\leq K (\sum_{i=1}^m |a_i|^p)^{1/p}$$

d'où une contradiction puisque $(Z_i)_i$ est équivalente à la base canonique de ℓ_q .

<u>Théorème 4</u> . Soient E un espace de Banach et $1 \leqq q < p \leqq \infty$. Alors E a un quotient isomorphe à ℓ_q si et seulement si $\ell_p \hat{\hat{\otimes}} E$ a un quotient isomorphe à ℓ_q .

Soit $T : \ell_p \hat{\hat{\otimes}} E \to \ell_q$ une application linéaire continue surjective et soit

$$r\ (T) = \inf \{ r > 0, \forall y \in \ell_q \ \exists x \in \ell_p \hat{\hat{\otimes}} E, \ T(x) = y \text{ et } \|x\| \leqq r \|y\| \} .$$

Supposons que E n'a aucun quotient isomorphe à ℓ_q , nous allons établir que

(1) $\forall r > r\ (T)$, $\forall \varepsilon \in]0, 1[$, $\forall n$, $\exists x \in \ell_p \hat{\hat{\otimes}} E$, $x = P^n(x)$ et $\|x\| \leqq r$ et $\|T(x)\| \geqq \varepsilon$.

Dans le cas contraire, il existe $r > r(T)$, $\varepsilon_0 \in]0,1[$ et un entier n_0 tels que pour $x \in \ell_p \hat{\hat{\otimes}} E$, $x = P^{n_0}(x)$ et $\|x\| \leqq r$ entraîne $\|T(x)\| < \varepsilon_0$. Soit $y \in B_{\ell_q}$, puisque $r > r(T)$ il existe $t \in \ell_p \hat{\hat{\otimes}} E$ tel que $\|t\| \leqq r$ et $T(t) = y$. Notons $x = P_{n_0}(t)$ et $u = P^{n_0}(t)$, visiblement $P^{n_0}(u) = u$ et $\|u\| \leqq \|t\| \leqq r$ donc :

$$\|y - T(x)\| = \|T(u)\| < \varepsilon_0 .$$

Nous avons établi qu'il existe $\varepsilon_0 \in]0,1[$, un réel $r > 0$ et un entier n_0 tel que pour tout $y \in B_{\ell_q}$ il existe $x \in \ell_p \hat{\hat{\otimes}} E$ vérifiant $\|x\| \leqq r$, $x = P_{n_0}(x)$ et $\|y - T(x)\| < \varepsilon_0$; il est bien connu que cette propriété entraîne que $T(\mathrm{Im}(P_{n_0})) = \ell_q$ ce qui est contradictoire avec notre hypothèse sur E (cf. Théorème 3). L'affirmation (1) est bien établie.

De l'affirmation (1) on déduit immédiatement :

(2) $\forall r > r(T)$, $\forall n$, $\exists x \in \ell_p \hat{\hat{\otimes}} E$, $\exists\, m > n$ tels que $x = (P_m - P_n)(x)$, $\|x\| \leqq r$ et

$\|T(x)\| \geqq \frac{1}{2}$.

Notons pour $m = 0, 1, \ldots$, Q^m l'application linéaire de ℓ_q dans ℓ_q qui à $a = (\alpha_i)_i \in \ell_q$ associe $Q^m(a) = (\beta_j)_j$ où $\beta_j = 0$ pour $1 \leqq j \leqq m$ et $\beta_j = \alpha_j$ pour $j = m+1, m+2, \ldots$; nous notons aussi $Q_m = I - Q^m$.

Fixons $r > r(T)$. On peut alors construire par récurrence $(n_k)_k$, $(m_k)_k$ deux suites strictement croissantes d'entiers, $(x_k)_k$ une suite d'éléments de $\ell_p \hat{\hat{\otimes}} E$ tels que $m_0 = n_0 = 0$ et

(3) $\|x_k\| \leqq r$ pour $k = 1, 2, \ldots$

(4) $x_k = (P_{n_k} - P_{n_{k-1}})(x_k)$ pour $k = 1, 2, \ldots$

(5) $\|Q^{m_{k-1}}(T(x_k))\| \geqq \frac{1}{2}$ et $\|Q^{m_k}(T(x_k))\| \leqq \frac{1}{2^2}$ pour $k = 1, 2, \ldots$

Supposons $(n_i)_{0 \leqq i \leqq k}$, $(m_i)_{0 \leqq i \leqq k}$ et $(x_i)_{1 \leqq i \leqq k}$ construits et vérifiant (3), (4) et (5) ; montrons que nous pouvons poursuivre. L'application $Q^{m_k} \circ T$ est une application linéaire continue surjective de $\ell_p \hat{\hat{\otimes}} E$ sur un espace de Banach isométrique à ℓ_q et $r(Q^{m_k} \circ T) \leqq r(T)$; en substituant $Q^{m_k} \circ T$ à T dans (2) nous déduisons qu'il existe $x_{k+1} \in \ell_p \hat{\hat{\otimes}} E$ et $n_{k+1} > n_k$ tels que $\|x_{k+1}\| \leqq r$, $x_{k+1} = (P_{n_{k+1}} - P_{n_k})(x_{k+1})$ et $\|Q^{m_k} \circ T(x_{k+1})\| \geqq \frac{1}{2}$.

Nous fixons alors $m_{k+1} > m_k$ tels que $\|Q^{m_{k+1}}(T(x_{k+1}))\| \leq \frac{1}{2^2}$. Notons pour chaque entier k , $y_k = T(x_k)$.

Quitte à extraire une sous-suite de $(y_k)_k$ on peut supposer que $(y_k)_k$ est une suite de Cauchy pour la topologie $\sigma(\ell_q, \ell_{q'})$. Notons pour $k = 1, 2, \ldots$ $\quad z_k = y_{2k-1} - y_{2k}$ et $v_k = x_{2k-1} - x_{2k}$ on a

$$\lim_{k\to\infty} z_k = 0 \text{ pour la topologie } \sigma(\ell_q, \ell_{q'})$$

et pour $k = 1, 2, \ldots$ $\|z_k\| \geq \|Q^{m_{2k-1}}(y_{2k-1} - y_{2k})\| \geq \|Q^{m_{2k-1}}(y_{2k})\| - \|Q^{m_{2k-1}}(y_{2k-1})\|$

$$\geq \frac{1}{2^2} \text{ d'après (5) .}$$

Quitte à extraire de $(z_k)_k$ une sous-suite on peut supposer que $(z_k)_k$ est équivalente à la base canonique de ℓ_q. Il existe alors $C > 0$ tel que pour tout entier n et toute famille $a_1, \ldots, a_n$ de scalaires on a :

$$\|\sum_{i=1}^n a_i z_i\| \geq C(\sum_{i=1}^n |a_i|^q)^{1/q}$$

De (3) et (4) nous déduisons que :

$$\|\sum_{i=1}^n a_i v_i\| \leq 2r(\sum_{i=1}^n |a_i|^p)^{1/p}$$

donc, puisque $T(v_i) = z_i$, $(\sum_{i=1}^n |a_i|^q)^{1/q} \leq \frac{2r\|T\|}{C}(\sum_{i=1}^n |a_i|^p)^{1/p}$ ce qui est impossible car $p > q$; nous concluons alors que E a un quotient isomorphe à ℓ_q .

<u>Théorème 5</u>. Soient E un espace de Banach et $1 \leq p < q \leq \infty$. Si $\ell_p \hat{\otimes} E$ a un sous-espace isomorphe à ℓ_q alors E'' a un sous-espace isomorphe à ℓ_q .

Supposons que $\ell_p \hat{\otimes} E$ a une suite-base $(f_n)_n$ équivalente à la base canonique de ℓ_q , $p < q \leq \infty$. De la dualité $< \ell_p \hat{\otimes} E , \ell_{p'} \hat{\hat{\otimes}} E' >$ et du théorème du 3 nous déduisons que $(f_n)_n$ est une suite-base de $(\ell_{p'} \hat{\hat{\otimes}} E')'$ équivalente à la base canonique de ℓ_q . On a clairement $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ pour la topologie $\sigma((\ell_{p'} \hat{\hat{\otimes}} E')', \ell_{p'} \hat{\hat{\otimes}} E')$ donc $\ell_{p'} \hat{\hat{\otimes}} E'$ a un quotient isomorphe à $\ell_{q'}$, $1 \leq q' < p'$ et par conséquent E' a un quotient isomorphe à $\ell_{q'}$ d'où le résultat .

Soit α un ordinal dénombrable, $<1,\alpha>$ note l'ensemble des ordinaux $1 \leq \gamma \leq \alpha$ muni de la topologie d'intervalles ; $C(\alpha)$ note l'espace de Banach des applications numériques continues sur $<1,\alpha>$ muni de la norme uniforme ; soit E un espace de Banach, $C(\alpha\,;E)$ note l'espace de Banach des applications continues de $<1,\alpha>$ dans E muni de la norme uniforme. Nous savons que $C(\alpha\,;E)$ est isométrique à $C(\alpha)\hat{\hat{\otimes}} E$ (cf. [3]).
Nous notons $C_0(\alpha\,;E) = \{f \in C(\alpha\,;E)\,;\, f(\alpha) = 0\}$,

nous savons que pour $\alpha \geq \omega$, $C_0(\alpha\,;E)$ est isomorphe à $C(\alpha\,;E)$. (cf. [2])

<u>Théorème 6</u> Soient α un ordinal dénombrable, E un espace de Banach et $1 \leq q < \infty$; alors E contient un sous-espace isomorphe à ℓ_q si et seulement si $C(\alpha\,;E)$ contient un sous-espace isomorphe à ℓ_q.

Fixons $1 \leq q < \infty$. D'après le résultat classique de C. Bessaga et A. Pelczynski (cf. [2]) il suffit de prouver le théorème pour les ordinaux ω^{ω^λ} où λ est un ordinal dénombrable; nous allons établir le théorème par une récurrence transfinie sur λ.

Le résultat a déjà été établi dans le cas $\lambda = 0$ (théorème 3). Soit donc λ un ordinal dénombrable > 0 et supposons que pour tout ordinal $\beta < \lambda$ la propriété ℓ_q isomorphe à un sous-espace de $C(\omega^{\omega^\beta}\,;E)$ entraîne ℓ_q isomorphe à un sous-espace de E. Supposons que ℓ_q soit isomorphe à un sous-espace de $C(\omega^{\omega^\lambda}\,;E)$ donc de $C_0(\omega^{\omega^\lambda};E)$ et que ℓ_q ne soit pas isomorphe à un sous-espace de E. Rappelons que pour tout ordinal $\alpha < \omega^{\omega^\lambda}$ il existe un ordinal $\beta < \lambda$ tel que $C(\alpha)$ et $C(\omega^{\omega^\beta})$ soient isomorphes (cf. [2] et [8]) ; alors, pour tout ordinal $\alpha < \omega^{\omega^\lambda}$, ℓ_q n'est pas isomorphe à un sous-espace de $C(\alpha\,;E)$.
Soit $(f_n)_n$ une suite-base normalisée de $C_0(\omega^{\omega^\lambda}\,;E)$ équivalente à la base canonique de ℓ_q. Il est possible de construire par récurrence $(g_k)_k$ une suite-base bloc normalisée de $(f_n)_n$ et $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k < \ldots < \omega^{\omega^\lambda}$ une suite strictement croissante d'ordinaux tels que pour $k = 1, 2, \ldots$

$$\forall\, \gamma \in <1, \omega^{\omega^\lambda}>\,;\ \gamma \notin <\alpha_{k-1}+1, \alpha_k> \Rightarrow \|g_k(\gamma)\| \leq \frac{1}{2^k}$$

mais alors la suite $(g_k)_k$ est équivalente à la base canonique de c_0 (cf. [1]) d'où une contradiction.

5 - Sous-espaces de $\ell_p \hat{\hat{\otimes}} \ell_q$ isomorphes à ℓ_r.

Nous considérons $\ell_p \hat{\hat{\otimes}} \ell_q$ comme sous-espace de $s\ell_q(\ell_p)$. Notons $(e_n)_n$ la base canonique de ℓ_p et $(f_n)_n$ la suite des formes coefficients de la base $(e_n)_n$; on note pour chaque entier m :

$$Q_m : \ell_p \to \ell_p$$

l'application qui à $x = \sum_{\ell=1}^{\infty} a_\ell e_\ell \in \ell_p$ associe $Q_m(x) = \sum_{\ell=1}^{m} a_\ell e_\ell$.

Il est clair que pour chaque entier m et $x = (x_i)_i \in s\ell_q(\ell_p)$ on a :

$$\tilde{Q}_m(x) = (Q_m(x_i))_i \in s\ell_q(\ell_p)$$

$$\|\tilde{Q}_m\| = 1$$

et que pour chaque entier n, $P^n \circ \tilde{Q}_m = \tilde{Q}_m \circ P^n$; on a alors visiblement

$$\tilde{Q}_m(\ell_p \hat{\hat{\otimes}} \ell_q) \subset \ell_p \hat{\hat{\otimes}} \ell_q .$$

Lemme 1. Pour chaque entier m les espaces $\tilde{Q}_m(\ell_p \hat{\hat{\otimes}} \ell_q)$ et ℓ_q sont isomorphes.

Notons $X = \{(x_i)_i \in s\ell_q(\ell_p) \ ; \exists n \ \forall i, \ i \geq n \Rightarrow x_i = 0 \text{ et } \forall_j \ Q_m(x_j) = x_j \}$.

Clairement X est un sous-espace dense de $\tilde{Q}_m(\ell_p \hat{\hat{\otimes}} \ell_q)$. Pour $x = (x_i)_i \in X$ on a

$$\|x\|^q = \sup \{ \sum_{i=1}^{n} |\sum_{j=1}^{m} f_j(x_i)\, \varphi(e_j)|^q \ ; \varphi \in B_{(\ell_p)'} \}$$

donc en particulier, puisque $f_1, \ldots, f_m \in B_{(\ell_p)'}$ on a

$$\|x\| \geq \max_{1 \leq k \leq m} (\sum_{i=1}^{n} |f_k(x_i)|^q)^{1/q} .$$

On a par ailleurs :

$$\|x\| \leq (\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q)^{1/q} = (\sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} |f_j(x_i)|^p)^{q/p})^{1/q} \leq (\sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} |f_j(x_i)|^q)^{1/q}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} |f_j(x_i)|^q\right)^{1/q} \leq m \max_{1\leq k\leq m} \left(\sum_{i=1}^{n} |f_k(x_i)|^q\right)^{1/q}$$

ce qui prouve que $\widetilde{Q}_m(\ell_p \hat{\hat{\otimes}} \ell_p)$ est isomorphe à un produit fini d'espaces ℓ_q donc à ℓ_q.

<u>Lemme 2</u>. Pour tout $x \in \ell_p \hat{\hat{\otimes}} \ell_q$ on a $\lim_{m\to\infty} \widetilde{Q}_m(x) = x$.

Notons $Y = \{x = (x_i)_i \in s\ell_q(\ell_p) \; ; \exists n \;\; \forall i, \; i \geq n \Rightarrow x_i = 0 \}$.

Visiblement Y est un sous-espace dense de $\ell_p \hat{\hat{\otimes}} \ell_q$. Soit $x = (x_i)_i \in Y$ et n un entier tel que $i \geq n \Rightarrow x_i = 0$. On a alors pour tout entier m

$$\|x - \widetilde{Q}_m(x)\|^q = \sup \left\{\sum_{i=1}^{n} \Big|\sum_{j=m+1}^{\infty} f_j(x_i)\, \varphi(e_j)\Big|^q \; ; \varphi \in B_{(\ell_p)'} \right\}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i - Q_m(x_i)\|^q$$

donc $\lim_{m\to\infty} \widetilde{Q}_m(x) = x$; la conclusion découle alors du théorème de Banach-Steinhaus.

Rappelons la proposition suivante de A. Tong (cf. [10]) :

<u>Proposition</u>. Soient n un entier, $a_1, \dots, a_n$ des scalaires et $T : \ell_s^n \to \ell_q^n$ l'opérateur qui à $x = (x_1, \dots, x_n) \in \ell_s^n$ associe $T(x) = (a_1 x_1, \dots, a_n x_n)$. On a alors

$$\|T\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^{\frac{sq}{s-q}}\right)^{\frac{s-q}{sq}} \text{ si } s > q \text{ et } \|T\| = \max_{1\leq i\leq n} |a_i| \text{ si } s \leq q .$$

<u>Théorème</u> . Soient $1 \leq p, q \leq \infty$; alors ℓ_r est isomorphe à un sous-espace de $\ell_p \hat{\hat{\otimes}} \ell_q$ si et seulement si $r = p$, $r = q$ ou $r = \dfrac{1}{\frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1}$ si $q' \geq p$ ou $r = \infty$ si $q' \leq p$.

Nous conservons les notations du 2. On suppose $q < \infty$, le cas $q = \infty$ se traite avec des modifications évidentes. Supposons tout d'abord que ℓ_r est isomorphe à un sous-espace de $\ell_p \hat{\hat{\otimes}} \ell_q$ et que $r \neq p$ et $r \neq q$; soit $(X_n)_n$ une suite-base normalisée de $\ell_p \hat{\hat{\otimes}} \ell_q$ équivalente à la base canonique de ℓ_r. Soit $\varepsilon > 0$; puisque $r \neq p$ on peut trouver $(n_k)_k$ une suite strictement croissante d'entiers et $(Y_k)_k$ une suite-base bloc normalisée de $(X_n)_n$ telle que :

$$\|Y_k - (P_{n_k} - P_{n_{k-1}})(Y_k)\| \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$$

pour $k = 1, 2, \ldots$ Dès que $\varepsilon > 0$ est assez petit la suite $\left(Z_k = \frac{(P_{n_k} - P_{n_{k-1}})(Y_k)}{\|(P_{n_k} - P_{n_{k-1}})(Y_k)\|}\right)_k$ est équivalente à la base canonique de ℓ_r.

Soit δ un réel > 0 ; puisque $r \neq q$ en utilisant les lemmes 1 et 2, on peut trouver $(m_k)_k$ une suite strictement croissante d'entiers et $(U_k)_k$ une suite-base bloc normalisée de $(Z_k)_k$ telle que pour $k = 1, 2, \ldots$

$$\|U_k - (\tilde{Q}_{m_k} - \tilde{Q}_{m_{k-1}})(U_k)\| \leq \frac{\delta}{2^k} .$$

Dès que $\delta > 0$ est assez petit la suite $((\tilde{Q}_{m_k} - \tilde{Q}_{m_{k-1}})(U_k))_k$ est équivalente à la base canonique de ℓ_r.

En résumé, on peut trouver une suite normalisée $(V_k)_k$ de $\ell_p \hat{\hat{\otimes}} \ell_q$ équivalente à la base canonique de ℓ_r et deux suites strictement croissantes d'entiers $(N_k)_k$ et $(M_k)_k$ telles que :

$$(1) \qquad V_k = (P_{N_k} - P_{N_{k-1}})(V_k) = (\tilde{Q}_{M_k} - \tilde{Q}_{M_{k-1}})(V_k) .$$

Pour chaque entier k, notons $V_k = (V_{k,i})_i$; nous pouvons fixer $\varphi_k \in [f_{M_{k-1}+1}, \ldots, f_{M_k}]$ tel que $\|\varphi_k\| = 1$ et $\sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} |\varphi_k(V_{k,i})|^q = 1$.

Soit $\Psi = (\Psi_i)_i \in (\ell_p)'$; pour chaque entier k notons

$$\Psi^k = (0, \ldots, 0, \Psi_{M_{k-1}+1}, \ldots, \Psi_{M_k}, 0, \ldots) .$$

Nous avons $\|\Psi\| = (\sum_{k=1}^{\infty} \|\Psi^k\|^{p'})^{1/p'}$ si $p \neq 1$ et $\|\Psi\| = \sup_k \|\Psi^k\|$ si $p = 1$.

Pour chaque k et i il est clair d'après (1) que $\Psi(V_{k,i}) = \Psi^k(V_{k,i})$ donc

$$\text{(2)} \qquad \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} |\Psi(V_{k,i})|^q = \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} |\Psi^k(V_{k,i})|^q \leq \|\Psi^k\|^q .$$

Soit n un entier et $a_1, \dots, a_n$ des scalaires , on a alors d'après (2)

$$\|\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell V_\ell\| = \sup \{ (\sum_{\ell=1}^{n} |a_\ell|^q \sum_{i=N_{\ell-1}+1}^{N_\ell} |\Psi(V_{\ell,i})|^q)^{1/q} ; \Psi \in B_{(\ell_p)'} \}$$

$$\leq \sup \{ (\sum_{\ell=1}^{n} |a_\ell|^q \|\Psi^\ell\|^q)^{1/q} ; \Psi \in B_{(\ell_p)'} \} .$$

On a évidemment

$$\|\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell V_\ell\| \geq \sup \{ (\sum_{\ell=1}^{n} |a_\ell|^q \sum_{i=N_{\ell-1}+1}^{N_\ell} |\Psi(V_{\ell,i})|^q)^{1/q} ; \Psi = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell \varphi_\ell \text{ et } \sum_{\ell=1}^{n} |\lambda_\ell|^{p'} \leq 1 \}$$

donc $$\|\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell V_\ell\| = \sup \{ (\sum_{\ell=1}^{n} |a_\ell|^q |\lambda_\ell|^q)^{1/q} ; (\sum_{\ell=1}^{n} |\lambda_\ell|^{p'})^{1/p'} \leq 1 \} .$$

On conclut en utilisant la proposition précédente .

Notons $(\varepsilon_J)_J$ la base canonique de ℓ_q . Soient n un entier et $a_1, \dots, a_n$ des scalaires, nous avons :

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \otimes \varepsilon_i\|_\varepsilon = \sup \{ |\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i \theta_i| ; (\lambda_i)_i \in B_{(\ell_p)'}, (\theta_i)_i \in B_{(\ell_q)'} \}$$

$$= \sup \{ (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^q |\lambda_i|^q)^{1/q} ; (\lambda_i)_i \in B_{(\ell_p)'} \}$$

$$= \begin{cases} (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^r)^{1/r} & \text{si } p' > q \text{ avec } r = \dfrac{p'q}{p'-q} . \\ \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| & \text{si } q \geq p' . \end{cases}$$

donc $(e_i \otimes \epsilon_i)_i$ est isométriquement équivalente à la base canonique de ℓ_r.

<u>Corollaire</u>. Si $p \geq q'$ l'espace $\ell_p \hat{\hat{\otimes}} \ell_q$ n'est pas réflexif.

<u>Corollaire</u>. Si $s \leqq r'$ l'espace $\ell_r \hat{\hat{\otimes}} \ell_s$ contient un sous-espace isomorphe à ℓ_1.

Le résultat est évident si $1 = s$ ou $r' = \infty$; nous supposerons donc $1 < s \leqq r' < \infty$. Il est clair d'après 2 et 3 que l'espace $\ell_{r'} \hat{\hat{\otimes}} \ell_{s'}$ est isométrique à un sous-espace fermé de

$$s\ell_{s'}(\ell_{r'}) = \mathcal{L}(\ell_s, \ell_{r'}) = B(\ell_s, \ell_r) = (\ell_r \hat{\otimes} \ell_s)' \,.$$

D'après le théorème précédent l'espace $(\ell_r \hat{\otimes} \ell_s)'$ contient un sous-espace isomorphe à c_o, le résultat découle alors du théorème 4 de [1] .

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Bessaga et A. Pelczynski. "On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces " Studia Math. 17(1958) p 151-164 .

[2] C. Bessaga et A. Pelczynski. "Spaces of continuous functions IV." Studia Math. 19 (1960) p. 53-62 .

[3] A. Grothendieck. "Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires" Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[4] W. B. Johnson et H. P Rosenthal. "On w^*-basic sequences and their applications to the study of Banach spaces " Studia Math 43 (1972) p. 77-92

[5] J. Lindenstrauss et L. Tzafrini . "Classical Banach spaces I" Springer Verlag (1977) .

[6] A. Pelczynski. "Projections in certain Banach spaces" Studia Math 19 (1960). p. 209-228 .

[7] Séminaire L. Schwartz 1969-1970 .

[8] W. Sierpinki. "Cardinal and ordinal numbers" P. W. N (1965).

[9] I. Singer . "Basis in Banach spaces I " Springer Verlag (1970) .

[10] A. Tong. "Diagonal nuclear operators on ℓ_p spaces" Trans. Amer. Math. Soc. 143 (1969) p. 235-247 .