

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

M. CAPON

Primarité de $L^p(\ell_r)$, $1 < p, r < \infty$

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 25, p. 1-21

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979__A21_0>

© Séminaire d'analyse fonctionnelle
(École Polytechnique), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLBX 691 596 F

S E M I N A I R E
D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E
1978-1979

PRIMARITE DE $L^p(\ell_r)$, $1 < p, r < \infty$

M. CAPON

(Université Paris XI-Orsay)

Le but de ce travail est de montrer que pour $1 < p < \infty$ et $1 < r < \infty$, l'espace $L^p(\ell_r)$ est primaire. D'après une remarque de Pisier dans [3], il est assez facile de voir que si $(h_k)_{k \geq 1}$ est la base de Haar et $(e_i)_{i \geq 1}$ la base canonique de ℓ_r , alors la suite $(h_k \otimes e_i)$ est une base inconditionnelle de $L^p(\ell_r)$. Dans la première partie nous étudierons les sous-suites de cette base et dans la seconde partie nous montrerons plus particulièrement que $L^p(\ell_r)$ est primaire.

I - ETUDE DES SOUS-SUITES DE LA BASE DE $L^p(\ell_r)$.

Dans cette partie, p et r sont fixés. Soit α_0 la constante d'inconditionnalité de la base $(h_k \otimes e_i)_{\substack{k \geq 1 \\ i \geq 1}}$. Nous aurons besoin d'un résultat préliminaire.

Lemme I.1 : Soit (d_k^i) une suite de fonctions de L^p telle que la suite $(d_k^i \otimes e_i)$ soit basique inconditionnelle, alors

$$\left\| \sum_{k,i} \alpha_{k,i} d_k^i \otimes e_i \right\|_{L^p(\ell_r)}^p \approx \int (\sum_i (\sum_k \alpha_{ki}^2 d_k^i(t))^{r/2})^{p/r} dt .$$

En particulier si deux suites d_k^i et $d'_k{}^i$ vérifient les hypothèses et en outre $|d_k^i| = |d'_k{}^i|$, alors les suites $(d_k^i \otimes e_i)$ et $(d'_k{}^i \otimes e_i)$ sont équivalentes.

Le signe $\approx$ signifie que le rapport des deux quantités est majoré et minoré par des constantes positives indépendantes des α_{ki} .

Démonstration : Posons $\Delta = \left\| \sum_{k,i} \alpha_{ki} d_k^i \otimes e_i \right\|_{L^p(\ell_r)}^p$

$$\Delta = \int \left\| \sum_{k,i} \alpha_{ki} d_k^i(t) \otimes e_i \right\|_{\ell_r}^p dt .$$

Désignons par $\varepsilon_k(.)$ la suite de Rademacher. Comme la suite est inconditionnelle on a

$$\Delta \approx \int \int \left\| \sum_{k,i} \alpha_{ki} \varepsilon_k(u) d_k^i(t) \otimes e_i \right\|_{\ell_r}^p dt du .$$

Fixons t et intégrons par rapport à u ; on peut en utilisant les inégalités de Kahane [4], écrire

$$S(t) = \int \left\| \sum_{k,i} \alpha_{ki} \varepsilon_k(u) d_k^i(t) \otimes e_i \right\|_{\ell_r}^p du \approx \left(\int \left\| \sum_{k,i} \alpha_{ki} \varepsilon_k(u) d_k^i(t) \otimes e_i \right\|_{\ell_r}^r du \right)^{p/r}$$

$$S(t) \approx \left(\int \sum_i \left| \sum_k \alpha_{ki} \varepsilon_k(u) d_k^i(t) \right|^r du \right)^{p/r} .$$

On applique maintenant les inégalités de Khintchine et on obtient

$$S(t) \approx \left(\sum_i \left(\sum_k \alpha_{ki}^2 d_k^{i^2}(t) \right)^{r/2} \right)^{p/r}$$

$$\Delta \approx \int \left(\sum_i \left(\sum_k \alpha_{ki}^2 d_k^{i^2}(t) \right)^{r/2} \right)^{p/r} dt \quad . \quad \text{CQFD}$$

Corollaire I.2 : Si deux suites d_k^i et $d_k'^i$ sont dans L^∞ et telles que

(a) $\{d_k^i \otimes e_i\}$ et $\{d_k'^i \otimes e_i\}$ sont des suites inconditionnelles

(b) $|d_k'^i(t)| = \lambda_{ki} |d_k^i(t)|$ sauf sur un ensemble de mesure ε_{ki} et

$$\sum_{i,k} \varepsilon_{ki}^{1/p} (\|d_k^i\|_{L^\infty} \|d_k^{i*}\| + \|d_k'^i\|_{L^\infty} \|d_k'^{i*}\|) + |1 - \lambda_{ki}| \|d_k^i\| \|d_k^{i*}\| < 1$$

alors les suites basiques considérées sont équivalentes dans $L^p(\ell_r)$.

Démonstration : Supposons d'abord $\lambda_{ki} = 1$ et posons

$$E_{ik} = \{t / |d_k^i(t)| = |d_k'^i(t)|\} .$$

On a
$$\|d_k^i \otimes e_i - d_k^i \mathbb{1}_{E_{ik}} \otimes e_i\| \leq \|d_k^i\|_{L^\infty} \varepsilon_{ik}^{1/p} .$$

D'après l'hypothèse (b) on a

$$\sum_{i,k} \|d_k^i \otimes e_i - d_k^i \mathbb{1}_{E_{ik}} \otimes e_i\| \|d_k^{i*} \otimes e_i^*\| < 1 .$$

Les suites $\{d_k^i \otimes e_i\}$ et $\{d_k^i \mathbb{1}_{E_{ik}} \otimes e_i\}$ sont donc équivalentes. De même

les suites $\{d_k'^i \otimes e_i\}$ et $\{d_k'^i \mathbb{1}_{E_{ik}} \otimes e_i\}$ sont équivalentes, donc en

appliquant le lemme I.1 aux suites $\{d_k^i \mathbb{1}_{E_{ik}} \otimes e_i\}$ et $\{d_k'^i \mathbb{1}_{E_{ik}} \otimes e_i\}$

on en déduit le corollaire dans ce cas. Si $\lambda_{ki} \neq 1$, posons $z_k^i = \lambda_{ki} d_k^i$,

alors $z_k^{i*} = \frac{1}{\lambda_{ki}} d_k^{i*}$. Les suites $(z_k^i \otimes e_i)$ et $(d_k'^i \otimes e_i)$ sont équivalentes car

$$\sum_{k,i} \varepsilon_{ki}^{1/p} \|z_k^i\|_{L^\infty} \|z_k^{i*}\| = \sum_{k,i} \varepsilon_{ki}^{1/p} \|d_k^i\|_{L^\infty} \|d_k^{i*}\|.$$

On peut donc appliquer la première partie de la démonstration.

D'autre part : $\|z_k^i \otimes e_i - d_k^i \otimes e_i\| = |1 - \lambda_{ki}| \|d_k^i\|$. Donc

$\sum_{k,i} \|z_k^i \otimes e_i - d_k^i \otimes e_i\| \|d_k^{i*} \otimes e_i^*\| < 1$ d'après (b). On peut conclure que les suites $\{z_k^i \otimes e_i\}$ et $\{d_k^i \otimes e_i\}$ sont équivalentes, ce qui achève la démonstration.

Nous allons maintenant étudier l'espace engendré par une sous-suite $(h_k \otimes e_i)_{i \geq 1}$. Etant donnée une partie Φ_i de $\mathbb{N}$ nous poserons

$$\hat{\Phi}_i = \{t \in [0,1] / h_k(t) \neq 0 \text{ pour une infinité de } k \text{ dans } \Phi_i\}.$$

Théorème I.3 : L'espace engendré par la suite $(h_k \otimes e_i)_{i \geq 1}$ est isomorphe à $L^p(\ell_r)$ si l'une des deux hypothèses suivantes est réalisée.

(1) Il existe une partie infinie M de $\mathbb{N}$ telle que $\bigcap_{i \in M} \hat{\Phi}_i$ soit de mesure positive.

(2) Pour toute partie infinie M de $\mathbb{N}$, $\bigcap_{i \in M} \hat{\Phi}_i^c$ est de mesure nulle.

Démonstration : Nous allons d'abord nous placer dans l'hypothèse (1).

Posons $Z = [h_k \otimes e_i]_{i \geq 1}$, d'après la méthode de décomposition de Pełczyński

il suffit de montrer que Z contient un sous-espace complémenté isomorphe $L^p(\ell_r)$, on peut donc supposer $M = \mathbb{N}$ et choisir un compact K de mesure positive dans $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \hat{\Phi}_i$.

Nous allons énoncer plusieurs lemmes qui donnent des conditions suffisantes pour qu'une suite de $L^p(\ell_r)$ engendre un sous-espace complémenté isomorphe à $L^p(\ell_r)$ et nous construirons ensuite une suite dans Z qui vérifie ces conditions.

Lemme I.4 : Soit $(d_k)_{k \geq 1}$ une suite de fonctions de K dans $\{-1,1,0\}$.

On suppose qu'il existe deux constantes positives K_1 et K_2 telles que

(a) $d_1 = \mathbb{1}_K$, $|d_2| = \mathbb{1}_K$, $K_1 \leq \mu(K) \leq K_2$.

(b) Si pour $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots, 2^n$ on pose

$$D_{n,2m-1} = S(d_{2^{n+m}}^+) \quad \text{et} \quad D_{n,2m} = S(d_{2^{n+m}}^-)$$

alors $D_{n,2m-1} \cup D_{n,2m} = D_{n-1,m}$ et $K_1 \leq 2^{n+1} \mu(D_{n,j}) \leq K_2$.

Alors la suite $\{d_k \otimes e_i\}$ est équivalente à $\{h_k \otimes e_i\}$ et l'espace U_0 qu'elle engendre est identique à $L^P(K, \mathcal{Q}, \ell_r)$ où $\mathcal{Q}$ est la σ -algèbre engendrée par les $D_{n,j}$.

En effet $L^P(K, \mathcal{Q}, \ell_r)$ est engendré par les fonctions $(d_k^+ \otimes e_i)$ et $(d_k^- \otimes e_i)$. En utilisant l'hypothèse (b) on voit facilement que l'opérateur T de $L^P(\ell_r)$ dans U_0 , défini par $T(h_k \otimes e_i) = d_k \otimes e_i$ est un isomorphisme d'espace réticulé de $L^P(\ell_r)$ sur U_0 . L'espace U_0 , contenu dans $L^P(K, \mathcal{Q}, \ell_r)$, réticulé et contenant toutes les fonctions $(d_k \otimes e_i)$ est donc identique à $L^P(K, \mathcal{Q}, \ell_r)$.

CQFD

Remarque : U_0^* s'identifie à $L^q(K, \mathcal{Q}, \ell_s)$ et l'injection de U_0^* dans $L^q(\ell_s)$ est donc une isométrie.

Soit maintenant U_1 l'espace engendré par $[d_k \otimes e_i]_{\substack{k \geq 2 \\ i \geq 1}}$. En utilisant l'iso-

morphisme T on voit facilement que U_1 est isomorphe au sous-espace de $L^P(\ell_r)$ formé des fonctions d'intégrales nulles. Il est assez facile de démontrer que ce dernier est isomorphe à $L^P(\ell_r)$. Si (d_k^*) désigne la suite biorthogonale de (d_k) , il est clair que la restriction à U_1 de $(d_k^* \otimes e_i^*)_{i \geq 1}$ est la suite biorthogonale de $(d_k \otimes e_i)_{\substack{i \geq 1 \\ k \geq 2}}$ et engendre donc U_1^* . On a

donc une injection canonique de U_1^* dans U_0^* définie par

$$j[(d_k^* \otimes e_i^*)|_{U_1}] = d_k^* \otimes e_i^*.$$

Soit π la projection naturelle de U_0 sur U_1 , qui est continue car la base de U_0 est inconditionnelle. Comme pour tout fonction f de U_0 , $f - \pi(f)$ est orthogonale à $(d_k^* \otimes e_i^*)_{\substack{k \geq 2 \\ i \geq 1}}$. On a

$$\langle \pi^* \varphi ; f \rangle = \langle \varphi, \pi f \rangle$$

$$= \langle j\varphi, \pi f \rangle = \langle j\varphi, f \rangle.$$

Donc $\pi^* = j$.

Ce qui montre que j est continue car π l'est.

Ces deux remarques nous montrent que si $\psi = \sum_{i \geq 1} \sum_{k \geq 2} \alpha_{ki} (d_k^* \otimes e_i^*)$ alors

$$\|\psi\|_{U_1^*} \approx \|\psi\|_{L^q(\ell_s)}.$$

Notation : Pour faciliter l'écriture nous appellerons suite bloc (b_k) une suite bloc de la base de Haar de la forme suivante

$$b_k = \sum_{j \in \sigma_k} h_j, \quad \text{avec} \quad \sigma_k \cap \sigma_\ell = \emptyset \quad \text{et} \quad h_j h_i = 0$$

si i et j sont dans σ_k et $i \neq j$.

Si on pose $b_k^* = \frac{b_k}{\mu(S(b_k))}$, cela définit une suite de fonctions dans

$L^q = (L^p)^*$ et la restriction de ces formes linéaires à l'espace engendré par les (b_k) est exactement la suite biorthogonale à (b_k) .

Lemme 1.5 : K_1 et K_2 étant donnés, il existe des nombres $(\varepsilon_k)_{k \geq 2}$ positifs tels que si $(b_k)_{k \geq 2}$ est une suite bloc de la base de Haar qui vérifie

(a) la suite $(d_k)_{k \geq 1}$ définie par $d_1 = \mathbb{I}_K$ et $d_2 = b_k \mathbb{I}_K$ pour $k \geq 2$, vérifie les hypothèses du lemme 1.4 avec les constantes K_1 et K_2 ;

(b) $b_k(t) = d_k(t)$ sauf sur un ensemble de mesure ε_k .

Alors les suites $(d_k^* \otimes e_i^*)_{\substack{i \geq 1 \\ k \geq 2}}$ et $\left(\frac{d_k}{\mu(Sd_k)} \otimes e_i^* \right)_{\substack{i \geq 1 \\ k \geq 2}}$ sont équivalentes dans

dans $L^q(\ell_s)$.

Démonstration : Posons $\zeta_k = \frac{d_k}{\mu(S(d_k))}$. On sait que la suite $(d_k^* \otimes e_i^*)$ est inconditionnelle dans U_o^* , donc aussi dans $L^q(\ell_s)$ car U_o^* se plonge isométriquement dans $L^q(\ell_s)$. Soit α la constante d'inconditionnalité. d_k est un élément de $L^q(K, \mathcal{Q})$ donc

$$\zeta_k = \sum_{\ell=1}^{\infty} \lambda_{k\ell} d_\ell^*$$

avec

$$\lambda_{k\ell} = \int \frac{d_\ell(t) d_k(t)}{\mu(Sd_k)} dt.$$

On a

$$\lambda_{\ell\ell} = 1.$$

Pour $k \neq \ell$, on a

$$\lambda_{k\ell} = \frac{1}{\mu(S(d_k))} [\langle d_\ell - b_\ell, d_k - b_k \rangle + \langle b_\ell, d_k - b_k \rangle + \langle b_k, d_\ell - b_\ell \rangle] \quad .$$

On voit facilement que $|\lambda_{k\ell}| \leq \frac{3 \inf(\varepsilon_k, \varepsilon_\ell)}{\mu(S(d_k))}$ donc

$$\begin{aligned} \|\zeta_k - d_k^*\| &= \left\| \sum_{\ell=1}^{\infty} (\lambda_{k\ell} - \delta_{k\ell}) d_\ell^* \right\| \\ &\leq \frac{3}{\mu(S(d_k))} \sum_{\ell=1}^{\infty} \inf(\varepsilon_k, \varepsilon_\ell) \|d_\ell^*\| \quad . \end{aligned}$$

On peut choisir par récurrence des nombres $\varepsilon_1 = 1 > \varepsilon_2 > \dots$ tels que

$$\|\zeta_k - d_k^*\|_{L^q} \leq \frac{\|d_k^*\|}{2^{k_\alpha}} \quad .$$

Ce choix est possible et ne dépend que de K_1 et K_2 car $\|d_\ell^*\|$ et $\mu(S(d_k))$ sont évalués en fonction de K_1 et K_2 . Si $(x_k^*)_{k \geq 2}$ est une suite de ℓ_s on pose

$$\varphi = \sum_{k \geq 2} d_k^* \otimes x_k^* \quad \text{et} \quad \psi = \sum_{k \geq 2} \zeta_k \otimes x_k^*$$

alors
$$\|x_k^*\| \leq \frac{\alpha \|\varphi\|}{\|d_k^*\|}$$

et par conséquent
$$\|\varphi - \psi\|_{L^q(\ell_s)} \leq \sum_{k \geq 2} \frac{\|\varphi\|}{2^k} \leq \frac{1}{2} \|\varphi\| \quad .$$

On a donc
$$\|\varphi\| \approx \|\psi\| \quad .$$

Ceci démontre l'équivalence des deux suites.

CQFD.

Remarque : Ce lemme exprime en fait que les (d_k) sont presque orthogonales.

Lemme I.6 : Soient K_1 et K_2 fixés et $(b_k)_{k \geq 2}$ une suite comme au lemme I.5. Il existe des nombres positifs $(\varepsilon_{k,i})_{\substack{i \geq 1 \\ k \geq 2}}$ tels que si $(b_k^i)_{\substack{i \geq 1 \\ k \geq 2}}$ est une famille de suites bloc de la base de Haar telles que $|b_k^i(t)| = |d_k(t)|$ sauf sur un ensemble de mesure $\varepsilon_{k,i}$, alors l'espace $Z_1 = [b_k^i \otimes e_i]_{\substack{i \geq 1 \\ k \geq 2}}$ est isomorphe à $L^p(\ell_r)$ et complété.

Démonstration : On va d'abord montrer que les suites $(b_k^i \otimes e_i)$ et

$(d_k \otimes e_i)$ sont équivalentes. On impose d'abord ε_{ki} assez petit pour que

$$\frac{1}{2} \mu(S(d_k)) \leq \mu(S(b_k^i)) \leq 2 \mu(Sd_k) \quad .$$

On montre facilement que, si $k = 2^{n+m}$:

$$\|b_k^{i*}\|_{L^q} \leq \frac{2^{\frac{n+1}{p}}}{K_1^{1/p}} \quad \text{et} \quad \|d_k^*\|_{L^q} \leq \frac{2^{n/p}}{K_1^{1/p}} \quad .$$

Comme $\|d_k\|_\infty = \|b_k^i\|_\infty = 1$, on peut appliquer le corollaire I.2 et si on a

$$\sum_{i \geq 1} \sum_{k \geq 2} \varepsilon_{ki}^{1/p} (\|b_k^{i*}\|_{L^q} + \|d_k^*\|_{L^q}) < 1 \quad ,$$

alors les espaces Z_1 et U_1 ont des bases équivalentes et sont donc isomorphes. La remarque qui suit le lemme I.4 nous montre que Z_1 est isomorphe à $L^p(\ell_r)$.

L'espace Z_1^* est engendré par les restrictions à Z_1 des formes linéaires définies par $(b_k^{i*} \otimes e_i^*)_{\substack{i \geq 1 \\ k \geq 2}}$. Nous allons montrer que l'injection canonique de Z_1^* dans $L^q(\ell_s)$ est continue. La transposée de cette injection nous donnera une projection continue de $L^p(\ell_r)$ sur Z_1 .

pour cela, nous allons montrer que les suites $(b_k^{i*} \otimes e_i^*)$ et $(d_k^* \otimes e_i^*)$ sont équivalentes dans $L^q(\ell_s)$. On sait déjà d'après le lemme I.5 que $(d_k^* \otimes e_i^*)$ est équivalente à $(\zeta_k \otimes e_i^*)$, où $\zeta_k = \frac{d_k}{\mu(Sd_k)}$. Cette dernière suite est donc basique inconditionnelle dans $L^q(\ell_s)$. D'autre part $b_k^{i*} = \frac{b_k^i}{\mu(Sb_k^i)}$,

donc la suite $(b_k^{i*} \otimes e_i^*)$ est une suite bloc de la base de $L^q(\ell_s)$ et est donc aussi inconditionnelle. On a $|b_k^{i*}(t)| = \lambda_{ki} |\zeta_k(t)|$ sauf sur un ensemble de mesure $\varepsilon_{k,i}$ avec

$$\lambda_{ki} = \frac{\mu(S(d_k))}{\mu(S(b_k^i))} \quad \text{donc} \quad |1 - \lambda_{ki}| \leq \frac{2\varepsilon_{k,i}}{\mu(S(d_k))} \leq \frac{2^{n+1}}{K_1} \varepsilon_{ki} \quad .$$

On peut choisir ε_{ki} de façon que

$$\sum_k \sum_i \varepsilon_{ki}^{1/q} (\|b_k^{i*}\|_{L^\infty} \|b_k^i\| + \|\zeta_k\|_{L^\infty} \|\zeta_k^*\|) + \sum_{k,i} |1 - \lambda_{ki}| < 1 \quad ,$$

alors d'après le corollaire I.2, on a l'équivalence des deux suites

$(b_k^{i*} \otimes e_i^*)$ et $(\zeta_k \otimes e_i^*)$ dans $L^q(\ell_s)$.

On en déduit l'équivalence de $(b_k^{i*} \otimes e_i^*)$ et $(d_k^* \otimes e_i^*)$. Par conséquent, si

$$\eta = \sum_{i \geq 1} \sum_{k \geq 2} \alpha_{ki} b_k^{i*} \otimes e_i^*$$

$$\varphi = \sum_{i \geq 1} \sum_{k \geq 2} \alpha_{ki} d_k^* \otimes e_i^*$$

on a

$$\|\varphi\|_{L^q(\ell_s)} \approx \|\eta\|_{L^q(\ell_s)}.$$

Mais d'après la première partie de la démonstration les suites $(b_k^i \otimes e_i)$ et $(d_k \otimes e_i)$ sont équivalentes donc

$$\|\eta\|_{Z_1^*} \approx \|\varphi\|_{U_1^*}.$$

Enfin nous avons vu dans la remarque qui suit le lemme I.4 que

$$\|\varphi\|_{U_1^*} \approx \|\varphi\|_{L^q(\ell_s)}.$$

On en déduit alors

$$\|\eta\|_{L^q(\ell_s)} \approx \|\eta\|_{Z_1^*}.$$

Ceci nous montre que l'injection de Z_1^* dans $L^q(\ell_s)$ est continue.

CQFD.

Nous fixons $K_2 = 2\mu(K)$ et $K_1 = \mu(K)/2$. Nous allons construire une suite $(b_k)_{k \geq 1}$ qui vérifient les conditions du lemme I.5 pour ces valeurs de K_1 et K_2 . Pour chaque i nous construirons alors une suite $(b_k^i)_{k \geq 2}$, bloc de $(h_j)_{j \in \Phi_i}$, qui vérifie les conditions du lemme I.6. En appliquant ce lemme nous aurons donc montré qu'il existe dans Z_1 un sous-espace complété isomorphe à $L^p(\ell_r)$.

Construction de $(b_k)_{k \geq 2}$ et $(b_k^i)_{k \geq 2, i \geq 1}$.

Première étape : $i = 1$. Nous allons construire (b_k^1) et (b_k) . Pour chaque t dans K on peut construire une suite strictement croissante

$n_1(t) < n_2(t) < \dots < n_j(t) < \dots$ telle que $n_j(t) = k$ si k est le j -ième indice dans Φ_1 tel que $h_k(t) \neq 0$. Soit $\psi_j' = \{n_j(t) / t \in K\}$. On voit facilement que $\psi_j' \cap \psi_i' = \emptyset$ si $i \neq j$. On considère une sous-suite ψ_1 et ψ_1' telle que $\{h_k\}_{k \in \psi_1}$ soit une famille maximale à support disjoint dans $\{h_k\}_{k \in \psi_1'}$.

Pour tout i_0 dans ψ_1 on définit de même ψ_{2,i_0} , sous-suite de ψ_2' , telle

que $\{h_k\}_{k \in \psi_{2,i_0}}$ soit une famille maximale à support disjoint dans

$\{h_k / k \in \psi'_2, S(h_k) \subset S(h_{i_0})\}$. On pose $\psi_2 = \bigcup_{i_0 \in \psi_1} \psi_{2,i_0}$. On définit ainsi

des familles disjointes ψ_n , telles que pour $i \in \psi_n$, il existe $j \in \psi_{n-1}$ tel que $S(h_i) \subset S(h_j)$. Posons $K_n = \bigcup_{j \in \psi_n}$, il est facile de voir que

$\bigcap K_n = K$. Si on se donne une suite de nombres $(\delta_{n,1})_{n \geq 0}$ positifs, on peut extraire une sous-suite $\ell(n)$ telle que

$$\mu(K_{\ell(n)} \setminus K) < \delta_{n,1}.$$

Posons alors

$$b_2 = \sum_{j \in \psi_{\ell(0)}} h_j.$$

Supposons définis les b_k pour $k \leq 2^n$, on posera alors

$$b_{2^n + (2m-1)} = \sum_{\substack{k \in \psi_{\ell(n)} \\ S(h_k) \subset S(b_{2^{n-1}+m}^+)}} h_j$$

$$b_{2^n + 2m} = \sum_{\substack{k \in \psi_{\ell(n)} \\ S(h_k) \subset S(b_{2^{n-1}+m}^-)}} h_j.$$

Il faut montrer que la suite $d_1 = \mathbb{1}_K$ et $d_k = \mathbb{1}_K \cdot b_k$ pour $k \geq 2$ vérifie les conditions du lemme I.4.

Pour tout $n \geq 0$ et $m = 1, 2, \dots, 2^n$ posons

$$B_{n,2m-1} = S(b_{2^n+m}^+), \quad D_{n,2m-1} = S(d_{2^n+m}^+)$$

$$B_{n,2m} = S(b_{2^n+m}^-), \quad D_{n,2m} = S(d_{2^n+m}^-).$$

Il est clair que $D_{n,j} = B_{n,j} \cap K$

et $D_{n,2m-1} \cup D_{n,2m} = D_{n-1,m} = S(d_{2^{n-1}+m})$.

Minorons d'abord $\mu(D_{n,j})$ pour évaluer K_1 , supposons par exemple que $j = 2k-1$,

$$\mu(D_{n,2k-1}) = \mu(B_{n,2k-1}) - \mu(B_{n,2k-1} \setminus K).$$

Mais $(B_{n,2k-1} \setminus K) \subset (K_{\ell(n)} \setminus K)$ donc $\mu(B_{n,2k-1} \setminus K) < \delta_{n,1}$. D'autre part les fonctions $b_{2^{n+k}}$ sont symétriques donc

$$\mu(B_{n,2k-1}) = \mu(S(b_{2^{n+k}}^+)) = \frac{1}{2} \mu(S(b_{2^{n+k}})) \geq \frac{1}{2} \mu(S(d_{2^{n+k}})) .$$

On a donc

$$\mu(D_{n,2k-1}) \geq \frac{1}{2} \mu(D_{n-1,k}) - \delta_{n,1} .$$

De même

$$\mu(D_{n-1,k}) \geq \frac{1}{2} \mu(D_{n-2,\ell}) - \delta_{n-1,1}$$

si $k = 2\ell - 1$ ou $k = 2\ell$.

La dernière inégalité est de la forme

$$\mu(D_{1,t}) \geq \frac{1}{2} \mu(D_{0,u}) - \delta_{1,1} \quad \text{avec } u = 1 \text{ ou } 2$$

$$\mu(D_{0,u}) \geq \frac{1}{2} \mu(S(b_2)) - \delta_{01} \geq \frac{1}{2} \mu(K) - \delta_{01} .$$

En multipliant membre à membre on obtient

$$\begin{aligned} \mu(D_{n,2k-1}) &\geq \frac{1}{2^{n+1}} \mu(K) - \left(\frac{\delta_{01}}{2^n} + \dots + \delta_{n,1} \right) \\ &\geq \frac{1}{2^{n+1}} \left(\mu(K) - \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j+1} \delta_{j,1} \right) . \end{aligned}$$

On peut choisir la suite $\delta_{j,1}$ de façon que $K_1 \geq \frac{\mu(K)}{2}$. Nous allons maintenant majorer $\mu(D_{n,2k-1})$ pour évaluer K_2 :

$$\mu(D_{n,2k-1}) \leq \mu(B_{n,2k-1}) = \frac{1}{2} \mu(Sb_{2^{n+k}}) .$$

Mais $\mu(Sb_{2^{n+k}}) \leq \frac{1}{2} \mu(Sb_{2^{n-1+\ell}})$ si $k = 2\ell$ ou $2\ell - 1$.

La dernière inégalité est

$$\mu(Sb_{2+u}) \leq \mu(Sb_2) \leq \frac{1}{2} (\mu(K) + \delta_{01}) .$$

On en déduit $\mu(D_{n,2k-1}) \leq \frac{1}{2^{n+1}} (\mu(K) + \delta_{01})$.

On peut choisir δ_{01} de façon que $K_2 \leq 2\mu(K)$.

D'autre part on a $b_k(t) = d_k(t)$ sauf sur un ensemble de mesure δ_{n1} , si

$k = 2^{n+m}$. Il suffit donc d'imposer

$$\delta_{n1} < \varepsilon_k \quad \forall k = 2^{n+1}, \dots, 2^{n+1}.$$

2ème étape : Construction de b_k^i . Si on impose $\delta_{n1} < \varepsilon_{k1} \quad \forall k = 2^{n+1}, \dots, 2^{n+1}$ alors on peut poser $b_k^1 = b_k$.

Fixons $i > 1$. On peut alors définir comme précédemment une suite (Ψ_n) de sous-suites de Φ_i , et si $K_n = \bigcup_{j \in \Psi_n} S(h_j)$, on aura de même $\bigcap K_n = K$.

Donnons-nous, pour i fixé, une suite $\delta_{n,i} > 0$. On peut extraire une suite $\ell(n)$ telle que $\mu(K_{\ell(n)} \setminus K) < \delta_{n,i}$. On posera alors

$$b_k^i = \sum_{\substack{j \in \Psi_{\ell(n)} \\ S(h_j) \subset S(b_k)}} h_j.$$

Il est facile de voir que l'on obtient ainsi une suite bloc de $(h_j)_{j \in \Phi_i}$.

Nous allons montrer que si la suite $\ell(n)$ est bien choisie, alors on a $|b_k^i(t)| = |b_k(t)|$ sauf sur un ensemble de mesure $\varepsilon_{k,i}$. Comme $S(b_k^i) \subset S(b_k)$, il est clair que $|b_k^i(t)| = |b_k(t)|$ sauf sur $S(b_k) \setminus S(b_k^i)$.

Considérons une somme finie $\hat{b}_k$ de la somme définissant b_k , telle que $S(\hat{b}_k) \subset S(b_k)$ et $\mu(S(b_k) \setminus S(\hat{b}_k)) < \delta_{n,i}$ pour $k = 2^{n+m}$. Je choisis alors $\ell(n)$ assez grand pour que l'on ait la propriété suivante : si $j \in \Psi_{\ell(n)}$ et $S(h_j)$ rencontre $S(\hat{b}_k)$, alors $S(h_j) \subset S(\hat{b}_k)$ et ceci pour tout $k = 2^{n+1}, 2^{n+2}, \dots, 2^{n+1}$.

On peut faire ce choix car les $\hat{b}_k$ sont des sommes finies. Il est clair alors que $K \cap S(\hat{b}_k) \subset S(b_k^i) \subset S(b_k)$, donc pour $t \in K$ on aura $|b_k^i(t)| \neq |d_k(t)|$ seulement si $t \in S(b_k) \setminus S(\hat{b}_k)$, et pour $t \notin K$ on aura $|b_k^i(t)| \neq |d_k(t)|$ seulement si $t \in S(b_k^i) \setminus K$. La réunion de ces deux ensembles est de mesure inférieure à $2\delta_{n,i}$. Il suffit donc de choisir $2\delta_{n,i} < \varepsilon_{n,i}$.

La construction est donc possible et ceci achève la démonstration du théorème I.3 dans l'hypothèse (1).

Démonstration du théorème I.3 dans l'hypothèse (2) : Nous gardons les mêmes notations et supposons maintenant que pour toute partie infinie M de $\mathbb{N}$ on a

$$\bigcap_{i \in M} \hat{\Phi}_i^C = \emptyset \quad \text{p.s.}.$$

Donc pour tout entier k , $\bigcup_{i \geq k} \hat{\Phi}_i = [01]$ p.s. On peut facilement construire une suite (P_n) d'entiers telle que si $B_n = \bigcup_{i=P_n+1}^{P_{n+1}} \hat{\Phi}_i$, alors $\mu(B_n) > 1 - \frac{1}{4^n}$.

Fixons n et posons $B_{ni} = \hat{\Phi}_i / \bigcup_{P_n < j < i} \hat{\Phi}_j$, $i = P_n+1, \dots, P_{n+1}$. Les B_{ni} sont

deux-à-deux disjoints et $\bigcup_{i=P_n+1}^{P_{n+1}} B_{ni} = B_n$. On peut donc trouver des

compacts $C_{n,i} \subset B_{n,i}$ tels que $C_n = \bigcup_{i=P_n+1}^{P_{n+1}} C_{n,i}$ soit de mesure $> 1 - \frac{1}{4^n}$.

Pour n fixé, la famille des compacts $C_{n,i}$ est finie et disjointe, donc leur distance respective est minorée par un nombre $\varepsilon_n > 0$. Posons alors pour $P_n < i \leq P_{n+1}$:

$$\Phi'_i = \{k \in \Phi_i / S(h_k) \text{ rencontre } C_{ni} \text{ et } \mu(S(h_k)) < \frac{\varepsilon_n}{2}\}.$$

Il est clair que $\hat{\Phi}'_i \supset C_{n,i}$ et de plus si $k \in \Phi'_i$, $\ell \in \Phi'_j$ alors

$$S(h_k) \cap S(h_\ell) = \emptyset.$$

Posons alors $\Psi_n = \bigcup_{i=P_n+1}^{P_{n+1}} \Phi'_i$. Nous allons montrer que Z contient un sous-

espace complété isomorphe à l'espace $Y = [h_k \otimes e_n]_{\substack{n \geq 1 \\ k \in \Psi_n}}$. Comme $\hat{\Psi}_n$ con-

tient C_n et que $\mu(\bigcap_n C_n) > 0$ on sait d'après la première partie de la

démonstration que Y est isomorphe à $L^p(\ell_r)$. Le théorème sera donc démontré. Considérons $Z_o = [h_k \otimes e_i]_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ k \in \Phi'_i}} = [E_n]_{n \in \mathbb{N}}$, où $E_n = [h_k \otimes e_i]_{\substack{P_n < i \leq P_{n+1} \\ k \in \Phi'_i}}$.

Or il est facile de voir que si f_n est dans E_n on a

$$\|\sum_n f_n(t)\|_{\ell_r}^p = (\sum_n \|f_n(t)\|_{\ell_r}^r)^{p/r}.$$

D'autre part, comme les compacts C_{ni} sont disjoints, on a

$$\|f_n(t)\|_{\ell_r} = |\langle f_n(t); \zeta_n \rangle| \quad \text{où } \zeta_n = e_{P_n+1}^* + \dots + e_{P_{n+1}}^*.$$

Z_0 est donc isométrique à l'espace engendré par les fonctions de la forme $\langle f_n(t), \zeta_n \rangle \otimes e_n$, où $f_n \in E_n$. Mais on voit facilement que, pour n fixé :

$$[\langle f_n(\cdot), \zeta_n \rangle / f_n \in E_n] = [h_k / k \in \Psi_n] \quad .$$

Donc Z_0 est isométrique à Y . On sait que Z_0 est complété dans $L^p(\ell_r)$ car c'est un espace engendré par une sous-suite de la base.

Ceci achève la démonstration du théorème I.3.

II - PRIMARITE DE $L^p(\ell_r)$.

Nous allons utiliser une méthode semblable `celle de [1] pour démontrer que $L^p(\ell_r)$ est primaire.

Proposition II.1 : Les espaces $L^p(\ell_r)$ et $L^p((\otimes_2)_{\ell_r})$ sont isomorphes.

Démonstration : Le premier est manifestement isométrique à un sous-espace complété du second, il nous suffit de montrer que le second est isomorphe à un sous-espace complété de $L^p([01]^2, \ell_r)$. Soit $F \in L^p((\otimes_2)_{\ell_r})$, $F = (F_n)_{n \geq 1}$, $F_n(t) \in \ell_2$ et $F_n(t) = (f_k^{(n)}(t))_{k \geq 1}$. On a

$$\|F\|^p = \int \|F(t)\|^p dt$$

$$\|F\|^p = \int \left(\sum_n \left(\sum_k f_k^{(n)}(t)^2 \right)^{r/2} \right)^{p/r} dt \quad .$$

Considérons l'opérateur $T: L^p((\otimes_2)_{\ell_r}) \rightarrow L^p([01]^2, \ell_r)$ défini par

$$(TF)(t, u) = (g_n(t, u))_{n \geq 1}$$

avec

$$g_n(t, u) = \sum_k f_k^{(n)}(t) \varepsilon_k(u) \quad ,$$

$\varepsilon_k(\cdot)$ désigne la k -ième fonction de Rademacher. On a

$$\|TF\|^p = \int \int \|TF(t, u)\|_{\ell_r}^p dt du \quad .$$

Posons

$$\varphi_k(t) = (f_k^{(n)}(t))_{n \geq 1}$$

alors
$$TF(t,u) = \sum_k \varphi_k(t) \varepsilon_k(u) \quad .$$

D'après les inégalités de Kahane on a

$$\int \left\| \sum_k \varphi_k(t) \varepsilon_k(u) \right\|_{\ell_r}^p du \approx \left(\int \left\| \sum_k \varphi_k(t) \varepsilon_k(u) \right\|_{\ell_r}^r du \right)^{p/r} .$$

On en tire

$$\|TF\|^p \approx \int dt \left[\int_n \sum_k |f_k^{(n)}(t) \varepsilon_k(u)|^r du \right]^{p/r} .$$

En utilisant maintenant les inégalités de Khintchine on a

$$\|TF\|^p \approx \int \left(\sum_n \left(\sum_k f_k^{(n)}(t)^2 \right)^{r/2} \right)^{p/r} dt = \|F\|^p .$$

T est donc un isomorphisme sur son image qui est l'espace Z engendré par les fonctions de la forme $\varphi_k(t) \otimes \varepsilon_k(u)$ où φ_k est à valeurs dans ℓ_r et ε_k la k-ième fonction de Rademacher. Il reste à montrer que cet espace est complété dans $L^p([01]^2, \ell_r)$. On définit un opérateur de $L^p([01]^2, \ell_r)$ dans Z en posant

$$(Qf)(t,u) = \sum_k \langle f(t, \cdot), \varepsilon_k(\cdot) \rangle \varepsilon_k(u)$$

où
$$\langle f(t, \cdot), \varepsilon_k(\cdot) \rangle = \int f_k(t,s) \varepsilon_k(s) ds \quad .$$

Il faut montrer que Q est une projection bornée sur Z. Il est facile de voir que $Q|_Z = \text{id}|_Z$ car si

$$f(t,u) = \varphi_{k_0}(t) \varepsilon_{k_0}(u)$$

$$\langle f(t, \cdot), \varepsilon_k(\cdot) \rangle = \delta_{k,k_0} \varphi_{k_0}(t) \quad .$$

D'autre part
$$Qf(t,u) = \sum_k \varphi_k(t) \varepsilon_k(u)$$

où
$$\varphi_k(t) = (\varphi_k^n(t))_{n \geq 1}$$

$$\varphi_k^n(t) = \langle f^n(t, \cdot), \varepsilon_k(\cdot) \rangle \quad .$$

D'après le calcul fait dans la première partie de la démonstration, on a

$$\|Qf\|^p \approx \int \left(\sum_n \left(\sum_k \varphi_k^n(t)^2 \right)^{r/2} \right)^{p/r} dt .$$

Désignons par P la projection orthogonale sur la suite de Rademacher.
Pour tout t fixé on a

$$\|Pf^n(t, \cdot)\|_{L^2} = \left[\sum_k \varphi_k^n(t)^2 \right]^{1/2} .$$

Or on sait que

$$\|Pf^n(t, \cdot)\|_{L^2} \approx \|Pf^n(t, \cdot)\|_{L^r} \leq K \|f^n(t, \cdot)\|_{L^r} ,$$

puisque cette projection est bornée dans L^r , si $r > 1$. On a donc

$$\begin{aligned} \left(\sum_k \varphi_k^n(t)^2 \right)^{r/2} &\leq K^r \int |f^n(t, u)|^r du \\ \|Qf\|^p &\leq K' \int dt \left[\sum_n \int |f^n(t, u)|^r du \right]^{p/r} \\ &\leq K' \int dt \left[\int \|f(t, u)\|_{\ell_r}^r du \right]^{p/r} . \end{aligned}$$

Supposons $p \geq r$ alors $\| \cdot \|_{L^r} \leq \| \cdot \|_{L^p}$ donc

$$\|Qf\|^p \leq K' \int dt \int \|f(t, u)\|_{\ell_r}^p du = K' \|f\|^p .$$

Pour tout $p \geq r$ nous avons montré que Z est complété dans $L^p([01]^2, \ell_r)$ et par conséquent la proposition est vraie pour $p \geq r > 1$. En passant aux duaux, on voit qu'elle est également vraie pour $1 < p \leq r$.

Proposition II.2 : La base naturelle $(h_k \otimes e_j^i)$ de $L^p((\oplus_2^\ell)_{\ell_r})$ est une base inconditionnelle.

Lemme II.3 : Soit $x_k \in (\oplus_2^\ell)_{\ell_r}$ telle que $\sum_k h_k \otimes x_k$ converge, alors cette série converge inconditionnellement.

Démonstration : D'après la remarque faite par Pisier [3], il suffit de le démontrer lorsque $p = r$. Posons

$$x_k = \sum_i \left(\sum_j \lambda_{ijk} e_j^i \right) ,$$

où $(e_j^i)_{j \geq 1}$ est la base de ℓ_2 .

On a
$$\left\| \sum_k h_k(t) x_k \right\|_{(\otimes \ell_2)_p}^p = \sum_i \left(\sum_j \left(\sum_k \lambda_{ijk} h_k(t) \right)^2 \right)^{p/2} .$$

Soit
$$\Delta^p = \int \left\| \sum_k h_k(t) x_k \right\|^p dt .$$

On utilise les inégalités de Khintchine :

$$\begin{aligned} \Delta^p &\approx \int \sum_i \int \left| \sum_{j,k} \lambda_{ijk} h_k(t) \varepsilon_j(u) \right|^p dt du \\ &\approx \sum_i \iint \left| \sum_k h_k(t) g_{k,i}(u) \right|^p dt du , \end{aligned}$$

où
$$g_{k,i}(u) = \sum_j \lambda_{ijk} \varepsilon_j(u) .$$

Mais la base de Haar est inconditionnelle et par conséquent

$$\begin{aligned} \Delta^p &\approx \sum_i \iint \left| \sum_k \pm h_k(t) g_{k,i}(u) \right|^p dt du \\ \Delta^p &\approx \left\| \sum_k \pm h_k \otimes x_k \right\|^p . \end{aligned}$$

CQFD.

Démonstration de la proposition : Nous allons donner une expression équivalente de la norme Δ qui montrera qu'elle ne dépend que du carré de λ_{ijk}

$$\Delta^p = \int \left\| \sum_k h_k(t) x_k \right\|_{(\oplus \ell_2)_{\ell_r}}^p dt .$$

D'après le lemme II.3 on a

$$\Delta^p \approx \iint \left\| \sum_k \varepsilon_k(u) h_k(t) x_k \right\|^p dt du .$$

Fixons maintenant t , si on applique les inégalités de Kahane on a

$$\begin{aligned} E &= \int \left\| \sum_k \varepsilon_k(u) h_k(t) x_k \right\|^p du \approx \left[\int \left\| \sum_k \varepsilon_k(u) h_k(t) x_k \right\|^r du \right]^{p/r} \\ E^{r/p} &\approx \int \sum_i \left(\sum_j \left(\sum_k \varepsilon_k(u) h_k(t) \lambda_{ijk} \right)^2 \right)^{r/2} du . \end{aligned}$$

On utilise à nouveau les inégalités de Khintchine

$$E^{r/p} \approx \iint \sum_i \left| \sum_{j,k} \varepsilon_j(s) \varepsilon_k(u) h_k(t) \lambda_{ijk} \right|^r du ds .$$

Il est alors facile de vérifier que

$$E^{r/p} \approx \sum_i \left(\sum_{j,k} \lambda_{ijk}^2 h_k^2(t) \right)^{r/2}$$

donc
$$\Delta^p \approx \int \left[\sum_i \left(\sum_{j,k} \lambda_{ijk}^2 h_k^2(t) \right)^{r/2} \right]^{p/r} dt .$$

CQFD.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème principal.

[Théorème II.4] : L'espace $L^p(\ell_r)$ est primaire si p et $r \in]1, +\infty[$.

Démonstration : D'après la proposition II.1 il suffit de montrer que si P est une projection de $L^p((\oplus_2 \ell_r)) = Y$, alors l'un des deux espaces PY ou $(I-P)(Y)$ contient un sous-espace complété isomorphe à $L^p(\ell_r)$.

Nous considérons la base naturelle de Y

$$h_k^{i,j} = h_k \otimes e_j^i \quad \text{où} \quad e_j^i = (0, 0, \dots, e_j, 0, \dots) ,$$

le vecteur e_j étant écrit à la i -ième place.

$(h_k^{i,j})^*$ désigne la suite biorthogonale et P une projection de Y . Posons

$$\Phi_i = \{k / |\langle h_k^{ij*}, Ph_k^{i,j} \rangle| \geq \frac{1}{2} \text{ pour une infinité d'indices } j\}$$

$$\Psi_i = \{k / |\langle h_k^{ij*}, (I-P)h_k^{i,j} \rangle| \geq \frac{1}{2} \text{ pour une infinité d'indices } i\} .$$

En reprenant les notations de la première partie on voit facilement

$\hat{\Phi}_i \cup \hat{\Psi}_i = [01]$ pour tout i . Deux cas peuvent alors se produire :

- ou bien l'une des deux suites (Φ_i) ou (Ψ_i) vérifient l'hypothèse (1) du théorème I.2 ;
- ou bien ni l'une, ni l'autre ne la vérifie, mais alors (Φ_i) vérifie l'hypothèse (2) car $\hat{\Phi}_i^C \subset \Psi_i$.

Supposons donc que (Φ_i) vérifie l'une des hypothèses du théorème I.3.

Soit $\Omega = \{k, i / i \in \mathbb{N}, k \in \Phi_i\}$; cet ensemble est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Comme d'autre part pour tout i et k fixés, $h_k^{i,j}$ tend vers 0 faiblement, on peut construire des indices $(j(k,i))_{(k,i) \in \Omega}$ deux-à-deux distincts et tels que

$$10) \quad |\langle h_k^{i,j(k,i)*}, Ph_k^{i,j(k,i)} \rangle| \geq \frac{1}{2} \quad \forall (k,i) \in \Omega .$$

2o) Il existe des blocs $y_{k,i}$ de la base tels que

$$\|Ph_k^{i,j(k,i)} - y_{ki}\| < \frac{\delta}{2^{k+i+1}},$$

où δ est un nombre fixé.

On peut alors appliquer le lemme 1 de [1] si δ a été choisi assez petit et on en conclut :

1o) La suite $\{Ph_k^{i,j(k,i)}\}_{(k,i) \in \Omega}$ est équivalente à $\{h_k^{i,j(k,i)}\}_{(k,i) \in \Omega}$.

2o) L'espace qu'elle engendre est complété dans $L^p((\oplus \ell_2)_{\ell_r})$.

Il nous suffit donc de montrer que l'espace engendré par la suite $\{h_k^{i,j(k,i)}\}_{(k,i) \in \Omega}$ est isomorphe à $L^p(\ell_r)$. Soit

$$\Delta = \sum_{(k,i) \in \Omega} \lambda_{ki} h_k \otimes e_{j(k,i)}^i$$

$$\|\Delta(t)\|^r = \sum_i \left(\sum_{n \in B_{ni}} \left(\sum_{k \in B_{n,i}} \lambda_{ki} h_k(t) \right)^2 \right)^{r/2},$$

où $B_{ni} = \{k/j(k,i) = n\}$.

Par construction B_{ni} a au plus un élément et on a donc

$$\left(\sum_{k \in B_{ni}} \lambda_{ki} h_k(t) \right)^2 = \sum_{k \in B_{ni}} \lambda_{ki}^2 h_k^2(t)$$

$$\|\Delta(t)\|^r = \sum_i \left(\sum_k \lambda_{ki}^2 h_k^2(t) \right)^{r/2}$$

$$\|\Delta\|^p = \int \|\Delta(t)\|^p dt = \int \left[\sum_i \left(\sum_k \lambda_{ki}^2 h_k^2(t) \right)^{r/2} \right]^{p/r} dt.$$

Le lemme I.1 nous montre que la suite est équivalente à la suite $\{h_k \otimes e_i\}_{i \in \mathbb{N}}_{k \in \Phi_i}$ dans $L^p(\ell_r)$. Comme (Φ_i) vérifie les hypothèses du théorème

I.3, l'espace engendré est bien isomorphe à $L^p(\ell_r)$. Ceci achève la démonstration.

III - PRIMARITE DE $\ell_p(L^r)$ pour $p \geq 1$ et $r > 1$.

Dans ce paragraphe nous démontrerons que les espaces $\ell_p(L^r)$ sont primaires pour $1 \leq p < +\infty$ et $r > 1$, et aussi l'espace $C_0(L^r)$. Si (h_k)

est la base de Haar de L^r , alors la suite $h_k^i = (0, 0, \dots, 0, h_k, 0, \dots)$, où h_k est écrit à la i -ème place, est une base inconditionnelle de $Y = \ell_p(L^r)$. Cela résulte immédiatement du fait que la suite (h_k) est une base inconditionnelle de L^r et de la définition de la norme de Y .

Nous allons d'abord étudier l'espace engendré par une sous-suite de la base, $(h_k^i)_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ k \in \Phi_i}}$. Nous gardons les mêmes notations qu'aux

paragraphes précédents.

Proposition III.1 : S'il existe $\varepsilon > 0$, et une partie infinie I de $\mathbb{N}$ telle que $\mu(\hat{\Phi}_i) \geq \varepsilon$ pour tout i dans I , alors l'espace engendré par la sous-suite $(h_k^i)_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ k \in \Phi_i}}$ est isomorphe à $\ell_p(L^r)$.

Démonstration : Si on désigne par Z cet espace, il est complété dans Y et en utilisant la méthode de décomposition de Pełczyński, il suffit de montrer que Z contient un sous-espace complété isomorphe à $\ell_p(L^r)$. On peut donc supposer que $I = \mathbb{N}$.

Si on regarde la démonstration de [2] on voit que pour chaque i il existe un isomorphisme entre L^r et l'espace engendré par la suite $(h_k)_{k \in \Phi_i}$ et en outre on peut construire un isomorphisme T_i tel que $\|T_i\| \|T_i^{-1}\|$ ne dépend que de $\mu(\hat{\Phi}_i)$.

Supposons donc construit une telle famille d'isomorphismes avec

$$\|T_i^{-1}\| \leq \varphi(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \|T_i\| = 1 \quad .$$

On définit alors un opérateur de $\ell_p(L^r)$ sur Z en posant

$$Tf = (T_i f_i)_{i \in \mathbb{N}} \quad \text{si} \quad f = (f_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

$$\|Tf\|^p = \sum_i \|T_i f_i\|_{L^r}^p \leq \sum_i \|T_i\|^p \|f_i\|_{L^r}^p \leq \sum_i \|f_i\|_{L^r}^p = \|f\|^p$$

$$\|Tf\| \leq \|f\| \quad .$$

On démontre de même que $\|Tf\| \geq \frac{1}{\varphi(\varepsilon)} \|f\|$.

Il est facile de voir que l'image de T est Z tout entier, donc Z est isomorphe à $\ell_p(L^r)$.

Théorème III.2 : Les espaces $C_0(L^r)$ et $\ell_p(L^r)$ sont primaires, pour $1 < r < +\infty$ et $1 \leq p < \infty$.

Démonstration : Comme L^r est isomorphe à $L^r(\ell_2)$ pour $r > 1$, on a un isomorphisme entre $\ell_p(L^r)$ et $\ell_p(L^r(\ell_2))$. Je fais la démonstration dans le cas de ℓ_p . Elle serait analogue pour $C_0(L^r)$. Soit $Y = \ell_p(L^r(\ell_2))$ et P une projection de Y dans lui-même. Il suffit de montrer que PY ou $(I-P)(Y)$ contient un sous-espace complété isomorphe à $\ell_p(L^r)$. Soit $(h_{k,j}^i)$ la base naturelle de Y

$$h_{k,j}^i = (0, \dots, 0, h_k \otimes e_j, 0, \dots) \quad ,$$

où $h_k \otimes e_j$ est écrit à la i -ème place.

Pour tout i posons

$$\Phi_i = \{k \in \mathbb{N} / |\langle h_{k,j}^{i*}, Ph_{k,j}^i \rangle| \geq \frac{1}{2} \text{ pour une infinité de } j\}$$

$$\Psi_i = \{k \in \mathbb{N} / |\langle h_{k,j}^{i*}, (I-P)h_{k,j}^i \rangle| \geq \frac{1}{2} \text{ pour une infinité de } j\} \quad .$$

Pour chaque i , on a $\Phi_i \cup \Psi_i = \mathbb{N}$. On en déduit facilement que $\hat{\Phi}_i \cup \hat{\Psi}_i = [01]$ et par conséquent on peut supposer qu'il existe une partie infinie I de $\mathbb{N}$ telle que $\mu(\hat{\Phi}_i) \geq \frac{1}{2}$ pour tout i dans I . Sur l'ensemble d'indices $\Omega = \{(k,i) / i \in I, k \in \Phi_i\}$ on peut mettre un ordre, et en utilisant le fait $\lim_{j \rightarrow +\infty} h_{k,j}^i = 0$ on peut construire par récurrence des indices $(j(k,i))_{(k,i) \in \Omega}$, deux-à-deux distincts tels que

$$(1) \quad |\langle h_{k,j(k,i)}^{i*}, Ph_{k,j(k,i)}^i \rangle| \geq \frac{1}{2} \quad .$$

(2) Il existe une suite bloce $(\mathcal{J}_{k,i})$ telle que

$$\|Ph_{k,j(k,i)}^i - \mathcal{J}_{ki}\| < \delta/2^{k+i} \quad .$$

Si δ est assez petit on peut appliquer le lemme 1 de Alspach, Enflo et Odell [1] ; on en déduit que PY contient un sous-espace complété isomorphe à l'espace engendré par la suite $(h_{k,j(k,i)}^i)_{(k,i) \in \Omega}$. Or

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{(k,i) \in \Omega} \alpha_{ki} h_{k,j(k,i)}^i \right\|_p^p &= \sum_i \left\| \sum_k \alpha_{ki} \otimes e_{j(k,i)} \right\|_{L^r(\ell_2)}^p \\ &= \sum_{i \in I} \left[\int \left(\sum_{k \in B_{i,n}} \alpha_{ki} h_k(t) \right)^{2r/2} dt \right]^{p/r} , \end{aligned}$$

où $B_{i,n} = \{k/j(k,i) = n\}$.

Par construction $B_{i,n}$ contient au plus un indice, donc l'expression Δ ci-dessus s'écrit encore

$$\begin{aligned}\Delta &= \sum_{i \in I} \left[\int \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \in B_{i,n}} \alpha_{ki}^2 h_k^2(t) \right)^{r/2} dt \right]^{p/r} \\ &= \sum_{i \in I} \left[\int \left(\sum_{k \in \Phi_i} \alpha_{ki}^2 h_k^2(t) \right)^{r/2} dt \right]^{p/r} .\end{aligned}$$

En utilisant le lemme I.1, on obtient donc

$$\left\| \sum_{(k,i) \in \Omega} \alpha_{ki} h_{k,j(k,i)}^i \right\|^p \approx \sum_{i \in I} \left\| \sum_{k \in \Phi_i} \alpha_{ki} h_p \right\|_{L^r}^p .$$

PY contient donc un sous-espace complété isomorphe à l'espace engendré, dans $\ell_p(L^r)$, par la suite $(h_k^i)_{\substack{i \in I \\ k \in \Phi_i}}$. D'après la proposition III.1, ce dernier espace est isomorphe à $\ell_p(L^r)$ et ceci achève la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

- =====
- [1] Alspach-Enflo-Odell : On the structure of separable ℓ_p spaces, *Studia Math.* LX (1977).
 - [2] Gamlem-Gaudet : On the subsequences of the Haar system in $L^p(0,1)$ $1 < p < \infty$, *Israel J. Math.* 15 (1973).
 - [3] Maurey : Système de Haar, Séminaire Maurey-Schwartz 1974-75, exposé No 2.
 - [4] Pisier : Les inégalités de Khintchine-Kahane, Séminaire Maurey-Schwartz 1977-78, exposé No 7.
