

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. MAUREY

Isomorphismes entre espaces H_1

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1978-1979), exp. n° 19 et 20, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979__A17_0

© Séminaire d'analyse fonctionnelle
(École Polytechnique), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 P

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E

1978-1979

ISOMORPHISMES ENTRE ESPACES H_1

B. MAUREY

L'espace de Hardy H_1 des fonctions holomorphes F dans le disque unité telle que :

$$\sup_{r < 1} \int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})| d\theta < \infty$$

a été étudié depuis de nombreuses années. Plus récemment, après la découverte de la dualité H_1 -BMO, une théorie parallèle des espaces H_1 de martingales s'est développée. Si (Ω, \mathcal{A}, P) est un espace de probabilité et (\mathfrak{F}_n) une suite croissante de sous σ -algèbres de \mathcal{A} , on introduit l'espace $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$ des \mathfrak{F}_n -martingales dont la fonction maximale est intégrable (voir le paragraphe 1 pour les définitions précises). Nous étudions en particulier le cas où les (\mathfrak{F}_n) sont les algèbres dyadiques sur $[0,1]$, et nous appelons $H_1(\delta)$ l'espace $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$ obtenu dans ce cas.

La similitude des résultats obtenus dans la théorie classique et dans la théorie "martingales" amène à se poser la question de la comparaison de H_1 et $H_1(\delta)$.

Notre résultat essentiel est le suivant :

[Théorème : Les espaces H_1 et $H_1(\delta)$ sont isomorphes.

La question de l'existence d'une base inconditionnelle pour H_1 est restée ouverte. Au contraire $H_1(\delta)$ admet le système de Haar pour base inconditionnelle. Nous obtenons par conséquent :

[Corollaire : L'espace H_1 admet une base inconditionnelle.

Nous n'explicitons pas la base de H_1 dont l'existence résulte du théorème. Ce système de fonctions serait de toute façon trop compliqué pour être utilisable. Le problème suivant reste donc posé :

Problème : Trouver une base inconditionnelle explicite pour H_1 .

Pour démontrer le théorème principal, on peut utiliser la méthode de décomposition, car on constate aisément que les espaces H_1 et $H_1(\delta)$ sont isomorphes à leurs carrés respectifs. Il suffit donc de voir que H_1 et $H_1(\delta)$ sont chacun isomorphe à un sous-espace complété de l'autre. Nous donnerons des indications sur la manière de plonger

H_1 de façon complétée dans $H_1(\delta)$ au paragraphe 2. Pour la possibilité de plonger $H_1(\delta)$ de façon complétée dans H_1 , nous nous contentons de renvoyer à [3] ou [4].

Avant de passer au détail, mentionnons quelques résultats complémentaires. Supposons que (\mathfrak{F}_n) soit une suite croissante d'algèbres finies de parties de Ω et posons :

$$\delta_n = \sup \{P(A) ; A \text{ atome de } \mathfrak{F}_n\} .$$

On démontre dans [4] :

[Théorème 2 : Si $\lim_n \delta_n = 0$, l'espace $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$ est isomorphe à $H_1(\delta)$ (donc à H_1).

On obtient aussi le résultat suivant :

[Théorème 3 : Pour tout $n \geq 1$, les espaces $H_1(\mathbb{R}^n)$ et $H_1(S^n)$ sont isomorphes à H_1 .

Mentionnons pour finir que l'espace $H_1(T^2)$ (cas des fonctions holomorphes dans le bidisque $D \times D$) est isomorphe à l'espace $H_1(\delta^2)$ des martingales dyadiques à deux indices.

§ 1. ESPACES H_1 DE MARTINGALES.

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité et (\mathfrak{F}_n) une suite croissante de sous σ -algèbres de \mathcal{A} . On définit l'espace $H_1[\Omega, (\mathfrak{F}_n), P]$, en abrégé $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$, comme l'espace des martingales (complexes) (f_n) telles que :

$$\sup_{n \geq 0} |f_n| \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P) .$$

On sait d'après [1] que cette condition équivaut à l'intégrabilité de la fonction des carrés, c'est-à-dire :

$$(|f_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f_{n-1}|^2)^{1/2} \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P) .$$

Sous la condition précédente, on sait que la martingale (f_n) converge dans $L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ vers une limite f , qui est \mathfrak{F}_∞ -mesurable, $\mathfrak{F}_\infty = \bigvee_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}_n$ étant la σ -algèbre engendrée par la réunion $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}_n$. Inversement la donnée de f permet de retrouver la martingale (f_n) par $f_n = E(f | \mathfrak{F}_n)$. On peut donc considérer $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$ comme un espace de fonctions \mathfrak{F}_∞ -mesurables, l'espace des fonctions $f \in L_1(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ telles que la martingale $f_n = E(f | \mathfrak{F}_n)$ ait une fonction maximale intégrable. Cet espace $H_1[(\mathfrak{F}_n)]$ peut être muni de deux normes équivalentes :

$$\|f\|_{H_1,1} = E(|f_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f_{n-1}|^2)^{1/2}$$

$$\|f\|_{H_1,2} = E \sup_{n \geq 0} |f_n| .$$

Rappelons la définition des martingales BMO. Soit (f_n) une \mathfrak{F}_n -martingale, posons $d_0 = f_0$ et pour $n \geq 1$, $d_n = f_n - f_{n-1}$. On dit que la martingale (f_n) est une martingale BMO, de norme $BMO \leq c$, si on a :

$$\forall k \geq 0 , \quad E(\sum_{n \geq k} |d_n|^2 | \mathfrak{F}_k) \leq c^2 .$$

(Noter que $E(\sum_{n \geq k} |d_n|^2 | \mathfrak{F}_k) = E(|f - f_{k-1}|^2 | \mathfrak{F}_k)$.)

Ici encore, on peut identifier l'espace $BMO[(\mathfrak{F}_n)]$ à un espace de fonctions \mathfrak{F}_∞ -mesurables.

Dans le cas d'une famille continue $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ de sous- σ -algèbres de \mathcal{A} , on définira l'espace $H_1[(\mathfrak{F}_t)]$ comme l'espace des fonctions $f \in L_1(\Omega, \mathfrak{F}_\infty, P)$ telles que

$$E \sup_{t \geq 0} |f_t| < \infty , \quad \text{où } f_t = E(f | \mathfrak{F}_t) .$$

Nous utiliserons la dualité entre les espaces H_1 et BMO de martingales, que l'on trouvera dans [1]. Cette dualité s'accompagne d'une difficulté : en général le produit fg n'est pas intégrable pour $f \in H_1[(\mathfrak{F}_n)]$, $g \in BMO[(\mathfrak{F}_n)]$. Nous nous limiterons ici au cas où $f \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dans ce cas on peut écrire :

$$|Efg| \leq C \|f\|_{H_1[(\mathfrak{F}_n)]} \cdot \|g\|_{BMO[(\mathfrak{F}_n)]} ,$$

où C est une constante universelle. Le résultat analogue est vrai dans le cas des familles continues (\mathfrak{F}_t) .

§ 2. L'ESPACE H_1 ET LES MARTINGALES DU BROWNIEN.

Désignons par $(X_t)_{t \geq 0}$ le mouvement brownien complexe partant de 0, normalisé par $E|X_t|^2 = 2t$, par $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$ la famille des σ -algèbres du brownien et par τ le premier temps t tel que X_t atteigne le cercle unité $\{|z| = 1\}$. Rappelons la formule d'Ito : si f est une fonction réelle de classe C^2 dans un voisinage du disque unité, on peut écrire :

$$f(X_{t \wedge \tau}) = f(0) + \int_0^{t \wedge \tau} \text{grad } f(X_s) \cdot dX_s + \frac{1}{2} \int_0^{t \wedge \tau} \Delta f(X_s) \cdot ds$$

(où $t \wedge \tau = \inf(t, \tau)$).

On voit facilement que le processus :

$$Y_t = \int_0^{t \wedge \tau} \text{grad } f(X_s) \cdot dX_s$$

est une martingale par rapport aux tribus $(\mathfrak{F}_{t \wedge \tau})$. On voit donc que $(f(X_{t \wedge \tau}))$ est une martingale lorsque f est harmonique. Ceci implique que $(F(X_{t \wedge \tau}))$ est une martingale complexe lorsque F est holomorphe. De plus :

Proposition 1 : L'application $T : F \rightarrow (F(X_{t \wedge \tau}))$ est continue de H_1 dans $H_1[(\mathfrak{F}_{t \wedge \tau})]$.

Démonstration : Soit $F(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$. On voit que la fonction

$g = |F|^{1/2}$ vérifie $\Delta g \geq 0$ (g est sous-harmonique), donc d'après la formule d'Ito $(g(X_{t \wedge \tau}))$ est une sous-martingale. En utilisant l'inégalité de Doob dans L^2 , nous aurons :

$$E \sup_{t \geq 0} g^2(X_{t \wedge \tau}) \leq 4 E g^2(X_\tau) \quad .$$

Si on remarque que $E g^2(X_\tau) = \int_0^{2\pi} |F(e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi}$, (car la loi

de X_τ est la loi uniforme sur le cercle) on obtient :

$$E \sup_{t \geq 0} |F(X_{t \wedge \tau})| \leq 4 \|F\|_1 \quad ,$$

ce qui démontre la proposition.

Soit f une fonction harmonique réelle dans le disque unité. Nous désignerons par \tilde{f} la fonction harmonique réelle telle que $f + i\tilde{f}$ soit holomorphe et que $\tilde{f}(0) = 0$. D'après les relations de Cauchy, on a :

$$|\text{grad } f| = |\text{grad } \tilde{f}| .$$

Supposons que f soit bornée dans le disque unité (c'est-à-dire sur le cercle unité). Il est clair que $(f(X_{t \wedge \tau}))$ est une martingale BMO, de norme $\text{BMO} \leq 2 \|f\|_\infty$. Mais la martingale $(f(X_{t \wedge \tau}))$ est également BMO. En effet :

$$\begin{aligned} & E(|\tilde{f}(X_\tau) - \tilde{f}(X_{t \wedge \tau})|^2 \mid \mathfrak{F}_{t \wedge \tau}) \\ &= E(2 \int_{t \wedge \tau}^{\tau} |\text{grad } \tilde{f}(X_s)|^2 ds \mid \mathfrak{F}_{t \wedge \tau}) \\ &= E(2 \int_{t \wedge \tau}^{\tau} |\text{grad } f(X_s)|^2 ds \mid \mathfrak{F}_{t \wedge \tau}) \\ &= E(|f(X_\tau) - f(X_{t \wedge \tau})|^2 \mid \mathfrak{F}_{t \wedge \tau}) . \end{aligned}$$

Considérons dans $L^2(\Omega, \mathfrak{F}_\tau, P)$ le sous-espace X formé par les fonctions $F(X_\tau)$, avec $F \in H_2$, et désignons par Q la projection orthogonale de $L^2(\Omega, \mathfrak{F}_\tau, P)$ sur X .

Soit u une fonction de $L_2(\Omega, \mathfrak{F}_\tau, P)$. La projection Qu est de la forme $F(X_\tau)$, où $F \in H_2$. Nous avons :

Proposition 2 : $\|F\|_1 \leq 9C \|u\|_{H_1}[(\mathfrak{F}_{t \wedge \tau})]$.

Démonstration : Supposons d'abord $Eu = 0$. On a alors $F(0) = 0$, et on peut écrire $F = f + i\tilde{f}$. On a :

$$\|F\|_1 \leq 2 \max(\|f\|_1, \|\tilde{f}\|_1) .$$

Dans le cas $\|f\|_1 \geq \|\tilde{f}\|_1$, on définit g sur le cercle unité par $g = \text{sign } f$, dans le cas $\|\tilde{f}\|_1 > \|f\|_1$ on posera $g = \text{sign } \tilde{f}$. On désigne encore par g le prolongement harmonique de g dans le disque unité. Posons $G = g + ig$.

Notons que $\int_0^{2\pi} FG(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = F(0)G(0) = 0$ donc :

$$\int_0^{2\pi} fg \, d\theta = \int_0^{2\pi} \widetilde{fg} \, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} (f\widetilde{g} + \widetilde{f}g) \, d\theta = 0 \quad .$$

On aura dans tous les cas :

$$\left| \int_0^{2\pi} F(e^{i\theta}) \overline{G(e^{i\theta})} \frac{d\theta}{2\pi} \right| \geq 2 \max(\|f\|_1, \|\widetilde{f}\|_1) \geq \|F\|_1 \quad .$$

D'après les considérations qui précèdent la proposition 2, $\overline{G(X_t \wedge \tau)}$ est une martingale de norme BMO ≤ 4 . On a donc, en utilisant $G(X_\tau) \in X$ et la dualité H_1 -BMO :

$$\begin{aligned} \|F\|_1 &\leq \left| \int_0^{2\pi} F\overline{G} \frac{d\theta}{2\pi} \right| = E(F(X_\tau)\overline{G(X_\tau)}) \\ &= (Qu \mid G(X_\tau)) = (u \mid G(X_\tau)) \\ &\leq 4 C \|u\|_{H_1[\mathfrak{F}_t \wedge \tau]} \quad , \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition 2 lorsque $Eu = 0$.

Si on applique la proposition 2 à $u = F(X_\tau)$, on voit que

$\|F\|_1 \leq 9C \|T(F)\|_{H_1}$, ce qui montre que T est en fait un plongement de H_1 dans $H_1[\mathfrak{F}_t \wedge \tau]$, et la proposition 2 montre que ce plongement est complétement.

Ce résultat n'est pas ce que nous cherchions, car nous voulions plonger H_1 dans $H_1(\delta)$ de façon complétement. Néanmoins il est facile d'obtenir ce résultat à partir de ce qui précède : il suffit de discrétiser convenablement les tribus du brownien. On montre ainsi dans [4] :

Proposition 3 : Il existe une constante K et une suite croissante (\mathfrak{F}_n) de sous-algèbres finies de \mathfrak{F}_τ , isomorphe à la suite dyadique (\mathcal{Q}_n) telle que pour tout polynôme F on ait :

$$\frac{1}{K} \|F(X_\tau)\|_{H_1[\mathfrak{F}_n]} \leq \|F(X_\tau)\|_{H_1[\mathfrak{F}_t \wedge \tau]} \leq K \|F(X_\tau)\|_{H_1[\mathcal{Q}_n]}$$

et

$$\|F(X_\tau)\|_{BMO[\mathfrak{F}_n]} \leq K \|F(X_\tau)\|_{BMO[\mathfrak{F}_t \wedge \tau]} \quad .$$

A partir de la proposition 3 et du raisonnement de la proposi-

tion 2 il est clair que H_1 se plonge de façon complétée dans $H_1[(\mathfrak{S}_n)]$, qui est isométrique à $H_1(\delta)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.M. Garsia : Martingale inequalities, Benjamin.
- [2] B. Maurey : Plongement de H_1 dans un espace à base inconditionnelle, Note aux C. R. Acad. Sc. Paris, t. 287, p. 865-867.
- [3] B. Maurey : Isomorphismes entre espaces H_1 , Note aux C. R. Acad. Sc. Paris, t. 288, p. 272-273.
- [4] B. Maurey : Isomorphismes entre espaces H_1 , article en préparation.
