

# SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. BEAUZAMY

## **Sous-espaces invariants dans les espaces de Banach : quelques résultats positifs**

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1978-1979), exp. n° 13, p. 1-13

<[http://www.numdam.org/item?id=SAF\\_1978-1979\\_\\_\\_A12\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAF_1978-1979___A12_0)>

© Séminaire d'analyse fonctionnelle  
(École Polytechnique), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E

D ' A N A L Y S E F O N C T I O N N E L L E

1978-1979

S O U S - E S P A C E S I N V A R I A N T S D A N S L E S E S P A C E S D E B A N A C H :

Q U E L Q U E S R E S U L T A T S P O S I T I F S

B. BEAUZAMY



Etant donné un espace de Banach  $E$  et un opérateur linéaire continu  $T$  de  $E$  dans  $E$ , on dit que le sous-espace vectoriel fermé  $F$  est invariant par  $T$  si  $TF \subset F$ . On dit que  $F$  est non-trivial si  $F \neq \{0\}$  et  $F \neq E$ . La question de l'existence de sous-espaces invariants non triviaux (en abrégé S.I.N.T.) n'est pas résolue, pour un opérateur quelconque, même dans l'espace de Hilbert. A l'opposé, P. Enflo a construit [2] un exemple d'espace  $E$  et d'opérateur  $T$  sans S.I.N.T.

Nous nous intéresserons ici à la question de l'existence de S.I.N.T. seulement pour les opérateurs  $T$  possédant une propriété particulière :

$$(\mathcal{K}) \quad \|T\| = 1 \quad \text{et} \quad \exists x_0 \in E \quad \text{tel que} \quad T^n x_0 \not\rightarrow 0 \text{ dans } E \quad \text{pour } n \rightarrow \infty.$$

Même pour les opérateurs possédant  $\mathcal{K}$  et même dans les espaces de Hilbert, la question reste ouverte ; le meilleur résultat dans cette direction paraît être celui de C. Foias (voir [3]) : si  $T$  et  ${}^tT$  vérifient tous deux  $\mathcal{K}$  (dans  $E$  et  $E'$  respectivement) et si  $E$  est réflexif,  $T$  a un S.I.N.T.

Nous allons développer ci-dessous un critère permettant d'assurer qu'un opérateur vérifiant  $\mathcal{K}$  possède un S.I.N.T. Ce critère se trouvera satisfait en particulier dans le cas considéré par C. Foias, ce qui nous redonnera une démonstration (peut-être plus simple) du résultat de celui-ci.

Remarquons tout d'abord que l'espace vectoriel fermé engendré par les itérés d'un point :  $\overline{\text{span}\{x_0, Tx_0, T^2x_0, \dots, T^n x_0, \dots\}}$  est toujours invariant par  $T$ . Nous pouvons donc restreindre au cas où, pour chaque  $x_0$ , cet espace est  $E$  tout entier. Nous dirons alors que  $x_0$  est cyclique. Ce sous-espace étant séparable,  $E$  doit être séparable.

Une seconde remarque évidente est que  $T$  doit être injectif et d'image dense (faute de quoi  $\text{Ker } T$  ou  $\overline{\text{Im } T}$  sont des S.I.N.T.).

Une troisième remarque évidente est que si l'on considère

$$F = \left\{ x \in E, \quad T^n x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\},$$

on a un sous-espace fermé, non égal à  $E$  si on admet  $\mathcal{K}$ ; il doit donc être réduit à  $\{0\}$ , sinon le problème est résolu. Autrement dit,

$\mathfrak{K}$  implique que  $\forall x \neq 0, T^n x \not\rightarrow 0$ .

Si  $x_0$  est un point cyclique, les combinaisons linéaires finies  $\sum_{k \geq 0} T^k x_0$  sont denses dans  $E$ . Or sur celles-ci,  $T$  agit comme un

shift :  $T(\sum_{k \geq 0} \alpha_k T^k x_0) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k T^{k+1} x_0$ . On peut donc représenter  $T$

comme la multiplication par  $x$  sur un espace de polynômes, en identifiant :

$$p(x) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k x^k \longleftrightarrow \sum_{k \geq 0} \alpha_k T^k x_0 ;$$

et on pose 
$$\|p\| = \left\| \sum_{k \geq 0} \alpha_k T^k x_0 \right\|_E .$$

L'espace  $E$  s'identifie ainsi isométriquement à la complétion pour la norme  $\|\cdot\|$  d'un espace de polynômes; cet espace sera noté  $B$  ; l'opérateur devient la multiplication par  $x$ . Nous dirons que nous avons fait la représentation de  $T$  sur l'orbite de  $x_0$ . L'hypothèse  $\mathfrak{K}$  se traduit, dans  $B$ , par :

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} \|x\|_{op} = 1 \\ x^n \not\rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty \end{cases} .$$

(On note  $\|p\|_{op}$  la norme d'opérateur de la multiplication par  $p$ , c'est-

à-dire 
$$\sup_{\|q\| \leq 1} \|p \cdot q\| = \sup_{\|\sum \beta_j T^j x_0\| \leq 1} \|(\sum \alpha_i T^i)(\sum \beta_j T^j x_0)\|$$

si  $p(x) = \sum \alpha_i x^i$ .)

Dans la suite, nous supposons toujours (sans le mentionner davantage) l'hypothèse  $\mathfrak{K}$  satisfaite. Nous supposons aussi que nous avons représenté  $T$  sur l'orbite d'un certain point, qui sera si nécessaire précisé par la suite. Nous allons mettre en évidence certains éléments particuliers de  $B$  ; l'approche qui suit nous a été suggérée par P. Enflo.

Nous notons  $A(\mathbb{T})$  l'ensemble des fonctions, définies sur le tore, dont la série de Fourier est absolument convergente :

$$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\theta} , \quad \text{avec} \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k| < \infty .$$

Cet espace est muni de la norme :

$$\|f\|_{A(\mathbb{T})} = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k| .$$

Pour toute fonction  $f \in A(\mathbb{T})$ , si  $f(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\theta}$ , nous poserons (si  $m \in \mathbb{Z}$ ) :

$$\psi_m(f)(\theta) = \sum_{k \geq -m} c_k e^{i(k+m)\theta}$$

(c'est une suite d'éléments de  $A(\mathbb{T})$ ), et

$$\psi_m(f) = \sum_{k \geq -m} c_k x^{k+m}$$

(c'est une suite d'éléments de  $B$ ).

Remarquons que puisque  $\|x\|_{op} = 1$ , on a :

$$\textcircled{2} \quad \|\psi_m(f)\|_{op} \leq \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k| = \|f\|_{A(\mathbb{T})} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

et a fortiori

$$\textcircled{3} \quad \|\psi_m(f)\| \leq \|f\|_{A(\mathbb{T})} \quad \forall m \in \mathbb{Z} ,$$

ce qui signifie que les  $\psi_m(f)$  sont uniformément bornés, en norme et en norme d'opérateurs.

Proposition 1 : Il existe deux fonctions  $f$  et  $g$ , sur le tore, à supports disjoints, appartenant à  $A(\mathbb{T})$ , telles que :

$$\begin{aligned} \psi_m(f) &\not\rightarrow 0 \text{ dans } B \text{ quand } m \rightarrow +\infty \\ \psi_m(g) &\not\rightarrow 0 \text{ dans } B \text{ quand } m \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

Démonstration de la proposition 1 : Nous allons construire  $f$  et  $g$  successivement.

Lemme 1 : Pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , soit  $f_{N,j}$  ( $j = 1, \dots, N$ ) une partition de l'unité sur  $\mathbb{T}$ , faite de fonctions  $C^\infty$ , avec, pour tout  $j$ ,  $f_{N,j} = 1$  sur un intervalle de largeur  $\frac{2\pi}{N}$ , chaque  $f_{N,j}$  étant à support dans un intervalle de largeur  $\frac{4\pi}{N}$ .

Alors, pour chaque  $N \geq 1$ , il y a au moins un  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$  pour lequel  $\psi_m(f_{N,j}) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$  dans B.

Démonstration du lemme 1 : Fixons  $N$  et écrivons les décompositions en série de Fourier des  $f_{N,j}$  :

$$f_{N,j}(\theta) = \sum_k a_k^{(N,j)} e^{ik\theta} .$$

On a :

$$\sum_{j=1}^N \sum_k a_k^{(N,j)} e^{ik\theta} = 1$$

et donc  $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^N \sum_k a_k^{(N,j)} e^{i(k+m)\theta} = e^{im\theta} .$$

d'où l'on déduit, d'après l'unicité du développement en série trigonométrique

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N a_k^{(N,j)} &= 1 \quad \text{si } k = 0 \\ &= 0 \quad \text{si } k \neq 0 . \end{aligned}$$

On a donc, dans l'espace B :

$$\sum_{k \geq -m} \sum_{j=1}^N a_k^{(N,j)} x^{k+m} = x^m ,$$

ou encore

$$\sum_{j=1}^N \psi_m(f_{N,j}) = x^m .$$

Puisque  $x^m \neq 0$  dans B, pour chaque  $N$ , il existe au moins un  $j \in \{1, \dots, N\}$  pour lequel  $\psi_m(f_{N,j}) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$  ; remarquons que l'on obtient facilement, pour cet indice  $j$ ,

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \|\psi_m(f_{N,j})\| \geq \frac{\alpha_0}{N} , \quad \text{où } \alpha_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x^m\| .$$

Ceci achève la démonstration du lemme 1. Si pour un certain  $N$ , il y a deux indices  $j_1$  et  $j_2$  non consécutifs modulo  $N$  pour lesquels

$\psi_m(f_{N,j}) \not\rightarrow 0$  dans B, la proposition est démontrée, (avec  $f = f_{N,j_1}$  et  $g = f_{N,j_2}$ ), car si  $f_1$  et  $f_2$  ne pas consécutifs modulo N,  $f_{N,j_1}$  et  $f_{N,j_2}$  sont à supports disjoints.

Supposons donc maintenant que, pour tout  $N \geq 1$ , il n'y ait qu'un seul j, ou deux consécutifs modulo N, qui conviennent.

Notons  $\mathcal{U}_N$  la réunion des supports des  $f_{N,j}$  tels que  $\psi_m(f_{N,j}) \not\rightarrow 0$  dans B.

Alors  $\mathcal{U}_N$  est un intervalle, et

$$\textcircled{4} \quad \frac{4\pi}{N} \leq \text{mes. } \mathcal{U}_N \leq \frac{8\pi}{N} .$$

Si, pour deux N différents,  $N_1$  et  $N_2$ , on peut trouver deux fonctions  $f_{N_1,j_1}$  et  $f_{N_2,j_2}$  à supports disjoints telles que

$\psi_m(f_{N_1,j_1}) \not\rightarrow 0$  et  $\psi_m(f_{N_2,j_2}) \not\rightarrow 0$ , là encore, la proposition est démontrée. Le cas qui nous reste à étudier est donc celui où  $\forall N_1, N_2$ ,  $\mathcal{U}_{N_1}$  et  $\mathcal{U}_{N_2}$  ont une intersection non vide. Comme il s'agit d'intervalles fermés, il résulte alors de  $\textcircled{4}$  que l'intersection  $\bigcap_{N \geq 1} \mathcal{U}_N$  contient exactement un point, que nous noterons  $a = e^{i\theta_0}$ .

Lemme 2 : Il existe une fonction  $g(\theta) \in A(\mathbb{T})$ , identiquement nulle sur un voisinage de a, telle que  $\psi_m(g) \not\rightarrow 0$  dans B.

Démonstration du lemme 2 : Le point  $x_0$  sur l'orbite duquel on a fait la représentation de T ne peut être vecteur propre de T, puisqu'il est cyclique. On a donc en particulier  $Tx_0 - ax_0 \neq 0$ , c'est-à-dire, dans B,  $x - a \neq 0$ .

Posons  $p_0 = a - x$ . On a vu que l'on pouvait supposer  $x^m p_0 \neq 0$  dans B, et donc  $\exists \gamma > 0$  avec  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,  $\|x^m p_0\| \geq \gamma > 0$ .

Posons  $f_0(\theta) = e^{i\theta_0} - e^{i\theta}$ . Modulo  $2\pi$ ,  $f_0$  s'annule au seul point  $\theta = \theta_0$ . Il résulte du théorème de Wiener-Ditkin (voir [3]) qu'on peut trouver une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions de  $A(\mathbb{T})$ , convergeant vers  $f_0$  dans  $A(\mathbb{T})$ , et s'annulant chacune identiquement sur un voisinage de  $a = e^{i\theta_0}$ .

On choisit  $n_0$  assez grand pour que si  $n \geq n_0$ ,

$$\|f_n - f_0\|_{A(\mathbb{T})} \leq \frac{\gamma}{4} .$$

On a alors,  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,

$$\|e^{im\theta} f_n(\theta) - e^{im\theta} f_o(\theta)\|_{A(\mathbb{T})} \leq \frac{\gamma}{4} \quad \text{si } n \geq n_o .$$

On choisit ensuite  $m_o$  assez grand pour que si  $m \geq m_o$ ,

$$\|e^{im\theta} f_{n_o}(\theta) - \varphi_m(f_{n_o})(\theta)\|_{A(\mathbb{T})} \leq \frac{\gamma}{4} .$$

On aura alors  $\forall m \geq m_o$ ,

$$\|\varphi_m(f_{n_o})(\theta) - e^{im\theta} f_o(\theta)\|_{A(\mathbb{T})} \leq \frac{\gamma}{4}$$

et donc

$$\|\psi_m(f_{n_o}) - x^m p_o\| \leq \frac{\gamma}{2}$$

et donc

$$\|\psi_m(f_{n_o})\| \geq \frac{\gamma}{2} \quad \text{pour } m \geq m_o ,$$

ce qui prouve le lemme 2, avec  $g = f_{n_o}$ .

Achevons maintenant la démonstration de la proposition 1 : il nous reste, comme nous l'avons vu, le cas où  $\bigcap_{N \geq 1} \mathcal{U}_N = \{a\}$ . Soit  $g$  la fonction donnée par le lemme 2, telle que  $\psi_m(g) \not\equiv 0$ . Cette fonction s'annule identiquement sur un certain voisinage de  $a$ ,  $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ , et, pour  $N$  assez grand,  $\mathcal{U}_N$  est contenu dans  $]a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}[$ . La fonction  $f$  de la proposition est alors  $f_{N,j}$ , pour le  $N$  et le  $j$  correspondants.

Nous allons maintenant voir à quoi correspond, dans  $B$ , le fait que  $f$  et  $g$  soient à supports disjoints :

**Proposition 2** : Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $A(\mathbb{T})$ , à supports disjoints. On note  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  les coefficients de Fourier de  $f$ ,  $(b_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  ceux de  $g$ . On a, dans  $B$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{N}$  :

$$\|\psi_m(f) \cdot \psi_n(g)\|_{op} \leq \|g\|_{A(\mathbb{T})} \cdot \sum_{k < 0} |a_{k-m}| + \|f\|_{A(\mathbb{T})} \sum_{j < 0} |b_{j-n}| .$$

**Démonstration de la proposition 2** : Posons

$$\varphi'_m(f)(\theta) = \sum_{k < -m} a_k e^{i(k+m)\theta}$$

et 
$$\varphi'_n(g)(\theta) = \sum_{j < -n} b_j e^{i(j+n)\theta} ,$$

si bien que

$$\begin{cases} \varphi'_m(f) + \varphi_m(g) = e^{im\theta} f(\theta) & \forall m \in \mathbb{N} \\ \varphi'_n(g) + \varphi_n(f) = e^{in\theta} f(\theta) & \forall n \in \mathbb{N} . \end{cases}$$

Nous allons calculer  $\varphi_m(f) \cdot \varphi_n(g)$ , qui n'a de coefficients non nuls que sur les exponentielles positives, puisque c'est le cas pour  $\varphi_m(f)$  et  $\varphi_n(g)$ .

Puisque  $f$  et  $g$  sont à supports disjoints, on a

$$[\varphi_m(f) + \varphi'_m(f)] \cdot [\varphi_n(g) + \varphi'_n(g)] = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N} ,$$

et donc :

$$\varphi_m(f) \cdot \varphi_n(g) = -\varphi'_m(f) e^{in\theta} g - \varphi_m(f) \cdot \varphi'_n(g) .$$

On sait que

$$\|\psi_m(f) \cdot \psi_n(g)\|_{\text{op}} \leq \|\varphi_m(f) \cdot \varphi_n(g)\|_{A(\mathbb{T})} ,$$

et il nous reste donc à calculer la somme des coefficients de Fourier d'indices positifs de  $\varphi'_m(f) \cdot e^{in\theta} g$  et de  $\varphi_m(f) \cdot \varphi'_n(g)$  (puisque les coefficients négatifs doivent s'annuler).

- Pour  $\varphi'_m(f) \cdot e^{in\theta} g = \left( \sum_{k < -m} a_k e^{i(k+m)\theta} \right) \left( \sum_j b_j e^{i(j+n)\theta} \right) ,$

le coefficient de  $e^{i\nu\theta}$  dans le produit est donc :

$$\sum_{\substack{k+m+j+n=\nu \\ k < -m}} a_k b_j - \sum_{\substack{k'+j'=\nu \\ k' < 0}} a_{k'-m} b_{j'-n} .$$

Le terme à estimer vaut :

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \geq 0} \left| \sum_{\substack{k'+j'=\nu \\ k' < 0}} a_{k'-m} b_{j'-n} \right| &= \sum_{\nu \geq 0} \left| \sum_{k' < 0} a_{k'-m} b_{\nu-k'-n} \right| \\ &\leq \sum_{\nu \geq 0} \sum_{k' < 0} |a_{k'-m}| |b_{\nu-k'-n}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k' < 0} |a_{k'-m}| \left( \sum_{v > 0} |b_{v-k'-n}| \right) \\ &\leq \|g\|_{A(\mathbb{T})} \sum_{k < 0} |a_{k-m}| . \end{aligned}$$

$$- \text{ Pour } \varphi_m(f) \cdot \varphi_n(g) = \left( \sum_{k \geq -m} a_k e^{i(k+m)\theta} \right) \left( \sum_{j < -n} b_j e^{i(j+n)\theta} \right) ,$$

le coefficient de  $e^{i\nu\theta}$  dans le produit est donc :

$$\sum_{\substack{k+m+j+n=\nu \\ k \geq -m, j < -n}} a_k b_j = \sum_{j' < 0} a_{\nu-j'-m} b_{j'-n} .$$

Le terme à estimer vaut donc :

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \geq 0} \left| \sum_{j' < 0} a_{\nu-j'-m} b_{j'-n} \right| &\leq \sum_{\nu \geq 0} \sum_{j' < 0} |a_{\nu-j'-m}| |b_{j'-n}| \\ &\leq \sum_{j' < 0} \left( \sum_{\nu \geq 0} |a_{\nu-j'-m}| \right) |b_{j'-n}| \\ &\leq \|f\|_{A(\mathbb{T})} \cdot \sum_{j' < 0} |b_{j'-n}| , \end{aligned}$$

d'où l'estimation donnée par la proposition 2.

Posons, pour simplifier les notations,  $h_m = \frac{1}{\|f\|_{A(\mathbb{T})}} \psi_m(f)$  ,

$p_k = \frac{1}{\|g\|_{A(\mathbb{T})}} \psi_k(g)$ ,  $m, k \in \mathbb{N}$ , où  $f$  et  $g$  sont les fonctions données par

la proposition 1. Il résulte de celle-ci que, pour un certain  $\alpha > 0$ ,

$$\textcircled{5} \quad \begin{cases} \|h_m\| \geq \alpha & \forall m \\ \|p_k\| \geq \alpha & \forall k \end{cases} ,$$

$$\textcircled{6} \quad \|h_m\|_{op} \leq 1 \quad , \quad \|p_k\|_{op} \leq 1 \quad ,$$

et, d'après la proposition 2,  $\|h_m p_k\|_{op} \rightarrow 0$  lorsque  $m, k \rightarrow +\infty$  (i.e. lorsque  $\min(m, k) \rightarrow \infty$ ).

Remarquons aussi qu'il résulte de l'estimation évidente

$$\|h_{m+m'} - x^{m'} h_m\| \leq \left( \sum_{j < -m} |b_j| \right) \cdot \frac{1}{\|g\|_{A(\mathbb{T})}} \quad , \quad \forall m, m' \in \mathbb{N}$$

que l'on a aussi

$$(7) \quad \|x^{m'} h_m\| \geq \frac{\alpha}{2} \quad \text{si } m \geq m_0, \quad \forall m' \in \mathbb{N}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner le critère assurant qu'il existe un sous-espace invariant non trivial.

**Théorème** : S'il existe une suite de polynômes  $\ell_k$  et un  $q \in B$ ,  $q \neq 0$ , avec

$$\ell_k p_k \longrightarrow q \quad \text{faiblement dans } B,$$

$$\sup_k \|x^k \ell_k\| < \infty,$$

il existe un sous-espace invariant non trivial.

**Démonstration** : Si  $\ell_k p_k \rightarrow q$  faiblement, on peut trouver une suite d'entiers  $\nu_k$  et une suite de coefficients  $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\alpha_i \geq 0 \quad \forall i$ , avec

$$\sum_{i=\nu_k}^{\nu_{k+1}} \alpha_i = 1, \quad \forall k, \quad \text{tels que}$$

$$p'_k = \sum_{i=\nu_k}^{\nu_{k+1}} \alpha_i \ell_i p_i \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} q \quad \text{dans } B.$$

Posons  $K_1 = \sup_k \|x^k \ell_k\| < \infty$ . On a, si  $\|x^k \ell_k\| \leq K_1$ , a fortiori

$$\|x^{k+j} \ell_k\| \leq K_1 \quad \forall j, \quad \text{et donc}$$

$$(8) \quad \|x^{\nu_{k+1}} \ell_i\| \leq K_1 \quad \text{si } \nu_k < i \leq \nu_{k+1}.$$

Posons  $p''_k = x^{\nu_{k+1}} p'_k$ , supposons la conclusion du théorème fautive : tout élément non nul de  $B$  est cyclique, et en particulier  $q$  est cyclique. Pour tout  $\delta > 0$ , on peut alors trouver un polynôme  $\ell$  tel que  $\|\ell q - 1\| < \delta$  ; en particulier, on peut trouver un polynôme  $\ell$  tel que  $\|\ell q - 1\| < \frac{\alpha}{4}$ . Soit  $K = \|\ell\|_{\text{op}}$ . Posons  $\varepsilon = \frac{\alpha}{8K}$ . Pour  $k_0$  assez grand, on a, si  $k \geq k_0$ ,

$$\|p'_k - q\| < \varepsilon, \quad \text{et donc} \quad \|p''_k - x^{\nu_{k+1}} q\| < \varepsilon.$$

On peut écrire, d'après (7), si  $k \geq k_1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2} &\leq \|h_{\nu_{k+1}} x^{\nu_{k+1}}\| \leq \|h_{\nu_{k+1}} x^{\nu_{k+1}} \ell_q - h_{\nu_{k+1}} x^{\nu_{k+1}}\| + \|h_{\nu_{k+1}} x^{\nu_{k+1}} \ell_q\| \\ &\leq \|\ell_q - 1\| + \|\ell\|_{\text{op}} \|h_{\nu_{k+1}} x^{\nu_{k+1}} q\| \end{aligned}$$

puisque  $\|h_{\nu_{k+1}}\|_{\text{op}} \leq 1$ , et donc :

$$\frac{\alpha}{2} \leq \frac{\alpha}{4} + K \|h_{\nu_{k+1}} x^{\nu_{k+1}} q\|$$

$$\text{d'où, si } k \geq k_1, \quad \|h_{\nu_{k+1}} x^{\nu_{k+1}} q\| \geq \frac{\alpha}{4K} .$$

Mais par ailleurs :

$$\begin{aligned} \|h_{\nu_{k+1}} x^{\nu_{k+1}} q\| &\leq \|h_{\nu_{k+1}} (p_k'' - x^{\nu_{k+1}} q)\| + \|h_{\nu_{k+1}} p_k''\| \\ &\leq \|p_k'' - x^{\nu_{k+1}} q\| + \|h_{\nu_{k+1}} p_k''\| \\ &\leq \frac{\alpha}{8K} + \|h_{\nu_{k+1}} p_k''\| , \quad \text{si } k \geq k_0 . \end{aligned}$$

Pour obtenir une contradiction, il nous reste à montrer que

$h_{\nu_{k+1}} p_k'' \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ . On a en effet :

$$\begin{aligned} \|h_{\nu_{k+1}} p_k''\| &= \left\| \sum_{\nu_{k+1}}^{\nu_{k+1}} \alpha_i \ell_i h_{\nu_{k+1}} x^{\nu_{k+1}} p_i \right\| \\ &\leq \sum_{\nu_{k+1}}^{\nu_{k+1}} \alpha_i \|x^{\nu_{k+1}} \ell_i\| \|h_{\nu_{k+1}} p_i\|_{\text{op}} \\ &\leq K_1 \sum_{\nu_{k+1}}^{\nu_{k+1}} \alpha_i \|h_{\nu_{k+1}} p_i\|_{\text{op}} . \end{aligned}$$

Mais  $\|h_{\nu_{k+1}} p_i\|_{\text{op}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$  si  $i > \nu_k$ , d'après la proposition 2 ; ceci

achève la démonstration du théorème.

Nous allons maintenant, pour terminer, montrer que le critère donné par le théorème est satisfait lorsque  ${}^t T$  vérifie aussi  $\mathcal{K}$ , et retrouver ainsi le résultat de Foias [3].

**Proposition 3** (C. Foias [3]) : Si  $E$  est réflexif et si  $T$  et  ${}^tT$  vérifient  $\mathfrak{K}$ , dans  $E$  et  $E'$  respectivement,  $T$  a un sous-espace invariant non trivial.

**Démonstration** : Supposons qu'il existe  $\xi_0 \in E'$  avec  ${}^tT^n \xi_0 \neq 0$ . On peut supposer  $\|\xi_0\| = 1$  ; comme  $\|{}^tT\| = 1$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $\|{}^tT^n \xi_0\| \geq \delta$ .

Soit  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $\|y_n\| = 1$  et  ${}^tT^n \xi_0(y_n) = \|{}^tT^n \xi_0\|$ ,  $\forall n$ , on a donc

$$\textcircled{9} \quad \xi_0(T^n y_n) > \delta .$$

La suite  $(T^n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $E$  et en converge pas faiblement vers 0 au vu de  $\textcircled{9}$  ; on peut donc trouver une sous-suite  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$  des entiers et un  $z_0 \neq 0$  tel que  $T^{n_k} y_{n_k} \rightarrow z_0$  faiblement dans  $E$ . Donc,

pour une suite d'entiers  $v_k$ , de coefficients  $\beta_i \geq 0$ , avec

$$\sum_{v_{k+1}}^{v_{k+1}} \beta_i = 1, \quad \sum_{v_{k+1}}^{v_{k+1}} \beta_i T^{n_i} y_{n_i} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} z_0 \text{ dans } E. \text{ On peut écrire}$$

$$\sum_{v_{k+1}}^{v_{k+1}} \beta_i T^{n_i} y_{n_i} = T^k \left[ \sum_{v_{k+1}}^{v_{k+1}} \beta_i T^{n_i - k} y_{n_i} \right] = T^k y'_k ,$$

en posant  $y'_k = \sum_{v_{k+1}}^{v_{k+1}} \beta_i T^{n_i - k} y_{n_i}$ , et on a  $\|y'_k\| \leq 1 \forall k$  ; par ailleurs

$$\xi_0(z_0) \geq \delta , \text{ et donc } \|z_0\| \geq \delta .$$

Faisons la représentation de  $T$  sur l'orbite d'un point quelconque (on pourrait choisir  $z_0$  par commodité, mais c'est sans importance). On a, en notant encore  $y'_k$  dans la représentation :

$$x^k y'_k \rightarrow z_0 \text{ dans } B$$

et donc, pour tout  $n$ ,

$$\textcircled{10} \quad x^k y'_k p_n \xrightarrow[k \rightarrow 0]{} p_n \cdot z_0 .$$

**Lemme** : L'ensemble  $G = \{z \in B, p_n \cdot z \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0\}$  est un sous-espace fermé invariant dans  $B$ .

La démonstration du lemme est immédiate, compte tenu du fait que  $\|p_n\|_{op} \leq 1 \forall n$ . Comme  $G \neq 1$ , puisque  $p_n \neq 0$ , on peut supposer, sans quoi le problème est résolu, que  $G$  est réduit à  $\{0\}$ . En particulier  $p_n z_0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . Il existe donc  $\delta' > 0$  tel que  $\forall n$ ,

$$11 \quad \|p_n z_0\| \geq \delta' > 0 .$$

Choisissons  $n_0$  assez grand pour que,  $\forall n$ ,

$$\|p_{n+n_0} - x^n p_n\|_{op} \leq \frac{\delta'}{4} .$$

On aura, d'après (10), pour  $k \geq k_0$ ,

$$\|x^k y'_k p_{n_0} - p_{n_0} z_0\| \leq \frac{\delta'}{4} ,$$

et donc, pour  $k \geq k_0$  :

$$\begin{aligned} \|p_{k+n_0} y'_k - p_{n_0} z_0\| &\leq \|p_{k+n_0} y'_k - x^k y'_k p_{n_0}\| + \|x^k y'_k p_{n_0} - p_{n_0} z_0\| \\ &\leq \|y'_k\| \cdot \|p_{k+n_0} - x^k p_{n_0}\| + \|x^k y'_k p_{n_0} - p_{n_0} z_0\| \\ &\leq \frac{\delta'}{2} . \end{aligned}$$

Il en résulte qu'une sous-suite des  $(y'_k p_{k+n_0})_{k \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers un  $q$ , avec  $\|q - p_{n_0} z_0\| < \frac{\delta'}{2}$ , et donc  $q \neq 0$ .

On a donc, dans ce cas (quitte à prendre une sous-suite),

$$\ell_k p_k \longrightarrow q \quad \text{faiblement} ,$$

et  $\|\ell_k\| \leq 1$  ;

les hypothèses du théorème sont donc satisfaites. On remarquera qu'elles sont beaucoup plus générales, puisqu'elles admettent  $\sup_k \|x^k \ell_k\| < \infty$ .

Remarques : 1<sup>o</sup>) On dit qu'un sous-espace fermé  $F$  de  $E$  est hyperinvariant par  $T$  s'il est invariant par tous les opérateurs qui commutent avec  $T$ . Le sous-espace que nous obtenons grâce au théorème est en

réalité hyper-invariant : il suffit, pour s'en convaincre, de modifier convenablement la fin de la démonstration du théorème.

2<sup>o</sup>) On peut remplacer l'hypothèse  $\|T\| = 1$  par la suivante :

$$\exists M, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|T^n\| \leq M .$$

Mais il ne s'agit que d'une généralisation apparente, car la norme

$$[[x]] = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T^n x\|$$

est équivalente à la norme d'origine, et rend  $T$  de norme 1.

3<sup>o</sup>) Au lieu de  $E$  réflexif, on peut supposer, comme nous l'a fait observer A. Pełczynski, que  $T$  est faiblement compact, et utiliser le résultat dû à W.J. Davis, T. Figiel, W.B. Johnson et A. Pełczynski [1] suivant lequel tout opérateur faiblement compact se factorise par un espace réflexif.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] W.J. Davis, T. Figiel, W.B. Johnson, A. Pełczynski, Factoring weakly compact operators, J. of Funct. Anal. 17, 3 (Nov. 1974).
- [2] P. Enflo, On the invariant subspace problem, à paraître.
- [3] Colojoara et C. Foias, General spectral theory, Gordon and Breach, 1968.
- [4] J.P. Kahane, Séries de Fourier absolument convergentes, Springer Verlag, 1970.

-----