SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. PISIER

Les inégalités de Khintchine-Kahane, d'après C. Borell

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1977-1978), exp. nº 7, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1977-1978____A6_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   S U R   L A   G E O M E T R I E

D E S   E S P A C E S   D E   B A N A C H

1977-1978

LES INEGALITES DE KHINTCHINE-KAHANE

d'après C. Borell

G. PISIER

Exposé No VII

9 Décembre 1977

§ 1. LES INEGALITES DE KHINTCHINE-KAHANE D'APRES C. BORELL.

Dans tout cet exposé, on note Ω l'espace $\{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$, on note ε_n la n-ième coordonnée sur cet espace et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω muni de la tribu engendrée par $\{\varepsilon_n | n\in\mathbb{N}\}$. La suite $\{\varepsilon_n | n\in\mathbb{N}\}$ est donc une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées sur $(\Omega,\mathbb{P})$ prenant les valeurs +1 et -1 avec la probabilité 1/2. On notera $\|\cdot\|_p$ la norme de l'espace $L^p(\Omega,\mathbb{P})$.

Les inégalités du théorème suivant sont dues à Khintchine dans le cas scalaire, à Kahane [4] pour les espaces de Banach.

Théorème K : Si $0<p<q<\infty$, il existe une constante $K_{p,q}$ ayant la propriété suivante :

pour toute suite finie $\{x_1,\dots,x_n\}$ d'éléments d'un espace de Banach arbitraire, on a :

$$(K) \qquad \left(\int\left\|\sum_1^n \varepsilon_i\ x_i\right\|^q d\mathbb{P}\right)^{1/q} \leq K_{p,q}\left(\int\left\|\sum_1^n \varepsilon_i\ x_i\right\|^p d\mathbb{P}\right)^{1/p} .$$

Dans [6], Kwapień a démontré (K) avec : $\overline{\lim_{q\to\infty}}\ K_{2,q}/\sqrt{q}<\infty$, ce qui améliorait l'estimation de Kahane.

On va présenter dans ce paragraphe une démonstration due à C. Borell, qui est remarquablement simple et qui est aussi plus générale. Pour donner le résultat de Borell en toute généralité, nous considérerons des produits de variables de Bernoulli : pour toute partie finie A de $\mathbb{N}$, nous poserons :

$$w_A = \prod_{n\in A} \varepsilon_n ,$$

avec la convention que si $A=\emptyset$, $w_A\equiv 1$. Les variables $\{w_A\}$ ainsi obtenues forment un système orthonormal complet dans $L^2(\Omega,\mathbb{P})$; à l'indexation près, ce système n'est autre que le système de Walsh (c'est-à-dire l'ensemble des caractères du groupe $\{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$).

On va déduire le théorème K de l'énoncé plus général suivant :

Théorème 1.1 (Borell)♦ : Supposons que $1<p\leq q<\infty$. Posons, une fois pour toutes, pour simplifier $\lambda=\sqrt{\frac{p-1}{q-1}}$. Notons $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des parties de

♦ Voir l'additif à la fin de l'exposé.

$\{1,2,\dots,n\}$. Pour tout entier n et pour toute famille $(x_A)_{A\in\mathcal{P}_n}$ d'éléments d'un espace de Banach arbitraire X, on a :

$$(1.1)\qquad \Big(\int\Big\|\sum_{A\in\mathcal{P}_n}\lambda^{|A|}\,w_A\,x_A\Big\|^q d\mathbb{P}\Big)^{1/q} \le \Big(\int\Big\|\sum_{A\in\mathcal{P}_n} w_A\,x_A\Big\|^p d\mathbb{P}\Big)^{1/p} .$$

[On a noté $|A|$ le cardinal de A.]

Démonstration du théorème : Le point de départ est l'inégalité suivante : si $1<p<q<\infty$

$$(1.2)\quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}\quad \left(\frac{|x+\lambda y|^q+|x-\lambda y|^q}{2}\right)^{1/q} \le \left(\frac{|x+y|^p+|x-y|^p}{2}\right)^{1/p}$$

où l'on a posé $\lambda=\sqrt{\frac{p-1}{q-1}}$.
Cette inégalité est démontrée en détail dans [1] p. 180 , où elle est présentée comme la version 2-dimensionnelle de l'inégalité de Nelson. Le changement de variable $\alpha=x+y$, $\beta=x-y$ transforme (1.2) en

$$(1.2)'\quad \left(\frac{\left|\frac{1+\lambda}{2}\alpha+\frac{1-\lambda}{2}\beta\right|^q+\left|\frac{1-\lambda}{2}\alpha+\frac{1+\lambda}{2}\beta\right|^q}{2}\right)^{1/q} \le \left(\frac{|\alpha|^p+|\beta|^p}{2}\right)^{1/p} .$$

Il est clair que (1.2)' reste valable si α, β sont des éléments d'un espace de Banach quelconque X et l'on obtient alors :

$$(1.2)''\quad \left(\frac{\left\|\frac{1+\lambda}{2}\alpha+\frac{1-\lambda}{2}\beta\right\|^q+\left\|\frac{1-\lambda}{2}\alpha+\frac{1+\lambda}{2}\beta\right\|^q}{2}\right)^{1/q} \le \left(\frac{\|\alpha\|^p+\|\beta\|^p}{2}\right)^{1/p} ;$$

en effet (1.2)" résulte de (1.2)' et des inégalités triangulaires suivantes : (remarquer que $1+\lambda$ et $1-\lambda$ sont positifs)

$$\left\|\frac{1+\lambda}{2}\alpha+\frac{1-\lambda}{2}\beta\right\| \le \left|\frac{1+\lambda}{2}\|\alpha\|+\frac{1-\lambda}{2}\|\beta\|\right|$$

et

$$\left\|\frac{1-\lambda}{2}\alpha+\frac{1+\lambda}{2}\beta\right\| \le \left|\frac{1-\lambda}{2}\|\alpha\|+\frac{1+\lambda}{2}\|\beta\|\right| .$$

On va démontrer l'inégalité (1.1) par récurrence sur n. L'inégalité (1.2)" correspond au cas $n=1$. Supposons que l'on a démontré l'inégalité (1.1) pour un entier n et démontrons-la pour n+1 :
soit $(x_A)_{A\in\mathcal{P}_{n+1}}$ une famille d'éléments de X, notons $A-\{n+1\}$ l'ensemble obtenu en enlevant n+1 à l'ensemble A. Posons, pour tout ω dans Ω et tout θ dans $]0,1]$:

$$x_\omega^\theta = \sum_{\substack{n+1\notin A\\ A\in\mathcal{P}_{n+1}}}{}' \theta^{|A|} w_A(\omega)\, x_A \quad \text{et} \quad y_\omega^\theta = \sum_{\substack{n+1\in A\\ A\in\mathcal{P}_{n+1}}}{}' \theta^{|A|-1} w_{A-\{n+1\}}(\omega)\, x_A \quad .$$

On a, d'après (1.2)", appliqué à $\alpha = x_\omega^1 + y_\omega^1$, $\beta = x_\omega^1 - y_\omega^1$:

$$(1.3) \qquad \left(\frac{\|x_\omega^1+\lambda y_\omega^1\|^q + \|x_\omega^1-\lambda y_\omega^1\|^q}{2}\right)^{1/q} \le \left(\frac{\|x_\omega^1+y_\omega^1\|^p + \|x_\omega^1-y_\omega^1\|^p}{2}\right)^{1/p} \quad .$$

D'autre part, l'hypothèse de récurrence entraîne :

$$(1.4) \qquad \left(\int\|x_\omega^\lambda \pm \lambda y_\omega^\lambda\|^q d\mathbb{P}(\omega)\right)^{1/q} \le \left(\int\|\Sigma\; x_\omega^1 \pm \lambda y_\omega^1\|^p d\mathbb{P}(\omega)\right)^{1/p} \quad .$$

En prenant la norme dans $L^p(d\mathbb{P})$ des deux membres de (1.3), en utilisant (1.4) ainsi que l'inégalité élémentaire : $\forall$ $f,g \in L^p$, si $q \ge p$, $(\|f\|_p^q + \|g\|_p^q)^{1/q} \le \|(|f|^q + |g|^q)^{1/q}\|_p$, on trouve finalement :

$$\left(\int \frac{\|x_\omega^\lambda+\lambda y_\omega^\lambda\|^q + \|x_\omega^\lambda - \lambda y_\omega^\lambda\|^q}{2}\, d\mathbb{P}\right)^{1/q} \le \left(\int \frac{\|x_\omega^1 - y_\omega^1\|^p + \|x_\omega^1-y_\omega^1\|^p}{2}\, d\mathbb{P}\right)^{1/p}$$

et l'on a ainsi démontré (1.1) à l'ordre n+1. Ce qui termine la démonstration par récurrence.

En particulier, si l'on applique (1.1) au cas où $x_A = 0$ sauf si $|A| = 1$, on obtient

$$\left(\int\|\sum_1^n x_{\{i\}}\; \varepsilon_i\|^q d\mathbb{P}\right)^{1/q} \le \frac{1}{\lambda}\left(\int\|\sum_1^n x_{\{i\}}\; \varepsilon_i\|^p d\mathbb{P}\right)^{1/p} \quad .$$

Soit : $K_{p,q} \le \sqrt{\frac{q-1}{p-1}}$; par conséquent, le résultat de Kwapien mentionné ci-dessus résulte de (1.1).

Similairement, pour chaque entier k, on peut appliquer (1.1) dans le cas particulier où $x_A = 0$ sauf si $|A| = k$; dans ce cas, si l'on pose $S = \sum_{\substack{A\in\mathcal{P}_n\\ |A|=k}} w_A\, x_A$, on obtient :

$$(1.5) \qquad \|S\|_{L^q(X)} \le \left(\frac{q-1}{p-1}\right)^{k/2} \|S\|_{L^p(X)} \quad .$$

Ce qui généralise au cas vectoriel des estimations connues dans le cas scalaire (cf. [2]).

A priori, on a obtenu ainsi les inégalités (K) seulement pour $p > 1$; en fait le cas $0 < p \le 1$ s'en déduit aisément grâce à la 1ère partie du lemme élémentaire suivant :

Lemme 1.1 : Soit f une fonction mesurable scalaire sur $(\Omega,\mathbb{P})$ et soient p, q avec $1<p<q<\infty$. On suppose que $\|f\|_q \leq C\|f\|_p$ pour une certaine constante C. Alors :

i) $\forall\, r\in\,]0,1]$, on a

$$\|f\|_q \leq C^{1/\theta}\ \|f\|_r \quad \text{où } \theta \text{ est défini par } \frac{1}{p}=\frac{\theta}{r}+\frac{1-\theta}{q}\quad .$$

ii) De plus, si Ω_o est l'ensemble où $|f|\geq \frac{1}{2C}\ \|f\|_q$ alors

$$\mathbb{P}(\Omega_o)\geq\left(\frac{1}{2C}\right)^{pq/(q-p)}.$$

Démonstration : i) : Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\|f\|_q \leq C\|f\|_p \leq C\|f\|_r^{\theta}\ \|f\|_q^{1-\theta}\quad ,$$

d'où la 1ère partie.

ii) : Pour la deuxième partie, notons 1_{Ω_o} la fonction caractéristique de Ω_o et soit α tel que $\frac{1}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{\alpha}$. On a :

$$\begin{aligned}\|f\|_q &\leq C\|f\|_p \leq C[\|f\,1_{\Omega_o}\|_p+\|f(1-1_{\Omega_o})\|_p] \\ &\leq C\|f\|_q\ \mathbb{P}(\Omega_o)^{1/\alpha}+\frac{1}{2}\ \|f\|_q\quad ,\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{P}(\Omega_o)^{1/\alpha}\geq\frac{1}{2C}\quad ,$$

ce qui est le résultat annoncé.

Remarque 1.1 : Notons $\mathcal{R}(X)$ l'espace vectoriel formé de toutes les sommes finies de la forme $\sum\varepsilon_i x_i$ avec $\{x_i\}\subset X$. On notera simplement $L^p(X)$ l'espace $L^p(\Omega,\mathbb{P};X)$. Les inégalités (K) montrent que les normes de $L^p(X)$ et $L^q(X)$ sont équivalentes sur $\mathcal{R}(X)$, si $0<p<q<\infty$. En fait, le lemme 1.1 ii) ci-dessus montre que cela reste vrai quand $p\to 0$: la topologie définie par la convergence en probabilité est équivalente sur $\mathcal{R}(X)$ à celle induite par la norme de $L^q(X)$ pour chaque $q<\infty$.

On obtient aussi un résultat limite quand $q\to\infty$, à l'aide du lemme élémentaire suivant :

Lemme 2.1 : Soit k un entier ≥ 1. Soit $f : (\Omega, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Posons

$$|f|_{[k]} = \inf\{C > 0 \int \exp\{|\frac{f}{C}|^{2/k}\} d\mathbb{P} \leq e\} .$$

Il existe des constantes a_k, $b_k > 0$ indépendantes de f telles que :

$$a_k \sup_{1 \leq q < \infty} (q^{-k/2} \|f\|_q) \leq |f|_{[k]} \leq b_k \sup_{1 \leq q < \infty} (q^{-k/2} \|f\|_q) .$$

Démonstration : laissée au lecteur (utiliser le développement en série entière de la fonction $\exp t^{2/k}$ ainsi que la formule de Stirling).
D'où la :

Remarque 1.2 : Si l'on définit pour un élément $S = \sum \varepsilon_i x_i$ de l'espace $\mathcal{R}(X)$ la norme

$$|||S||| = \inf\{c > 0 \mid \int \exp\|\frac{S}{c}\|^2 d\mathbb{P} \leq e\} ,$$

alors le lemme 1.2 et l'estimation de $K_{p,q}$ quand $q \to \infty$ montrent que la norme $|||\cdot|||$ est équivalente sur $\mathcal{R}(X)$ à la norme induite par $L^p(X)$ pour chaque $p < \infty$.
En conclusion, la topologie de la convergence en probabilité équivaut à celle définie par la norme $|||\cdot|||$ sur l'espace $\mathcal{R}(X)$.

Remarque 1.3 : La formulation initiale du résultat de Kahane (en incorporant l'amélioration de [6]) est la suivante : soit $\{x_n\}$ une suite dans un espace de Banach X ; posons $S_n = \sum_1^n \varepsilon_i x_i$. S'il existe une sous-suite de $\{S_n\}$ qui converge en probabilité, alors en fait :

a) S_n tend vers une limite S dans $L^p(X)$ pour tout $p < \infty$.

b) Il existe $\varepsilon > 0$ ♦ tel que

$$\int \exp \varepsilon\|S\|^2 d\mathbb{P} < \infty .$$

c) $\|S_n - S\| \to 0$ p.s. quand $n \to \infty$.

♦ On peut voir (cf. [6]) que cela est même vrai pour tout $\varepsilon > 0$.

Les points a) et b) résultent des remarques précédentes. Par contre, pour démontrer c) il faut connaître une inégalité maximale due à Paul Lévy : si l'on pose $S^* = \sup_{n\geq 1} \|S_n\|$, alors on a :

$$\forall\, C > 0 \qquad \mathbb{P}\{S^* > C\} \leq 2\mathbb{P}\{\|S\| > C\}$$

et par conséquent :

$$(1.6) \qquad \forall\, p > 0 \qquad \int S^{*p} d\mathbb{P} \leq 2\int \|S\|^p d\mathbb{P} \quad .$$

Pour cette inégalité bien connue, le lecteur peut se référer à [4] p. 12. Bien entendu, on peut aussi déduire c) des résultats classiques sur les martingales vectorielles (cf. [8] p. 100).

Donnons une autre variante importante des inégalités (K) :

Remarque 1.4 : Soit encore $\{x_n\}$ une suite d'éléments de X, et soit $\{a_n\}$ une suite non décroissante♦ de réels positifs. On pose $S_n = \sum_1^n \varepsilon_i x_i$ et $U_n = \sup_{k\leq n} \|S_k/a_k\|$. Alors, si $U = \lim_{n\to\infty} \uparrow U_n < \infty$ p.s., on a nécessairement

$$(1.7) \qquad \int \exp \varepsilon U^2 \, d\mathbb{P} < \infty \quad \text{pour un certain } \varepsilon > 0 \quad .$$

En effet, considérons l'espace de Banach $\ell^\infty(X)$ formé des suites bornées d'éléments de X muni de sa norme habituelle. On définit une suite $(\tilde{x}_n)_n$ d'éléments de $\ell^\infty(X)$ de la manière suivante :

$$\tilde{x}_1 = \left(\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_1}{a_2}, \ldots, \frac{x_1}{a_n}, \ldots\ldots\right)$$

$$\tilde{x}_2 = \left(0, \frac{x_2}{a_2}, \ldots\ldots, \frac{x_2}{a_n}, \ldots\ldots\right)$$

$$\vdots$$

$$\tilde{x}_n = \left(0, \qquad 0, \frac{x_n}{a_n}, \frac{x_n}{a_{n+1}}, \ldots\ldots\right) \quad .$$

$$\vdots$$

♦ En fait, on peut se passer de cette hypothèse.

Alors, on peut remarquer que :

$$U_n = \|\sum_1^n \varepsilon_i \tilde{x}_i\| \quad .$$

Par conséquent, la série $\sum_1^n \varepsilon_i \tilde{x}_i$ est bornée p.s. dans $\ell^\infty(X)$ si l'on suppose que $U < \infty$ p.s. ; la conclusion de la remarque 1.2 appliquée à l'espace $\ell^\infty(X)$ entraîne bien (1.7).

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer les conséquences du théorème 1.1 et de (1.5) en analogie avec les remarques qui précèdent :

Théorème 1.2 (Borell) : Soit k un entier ≥ 1. Soit I_k l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ de cardinal k. Soit $(x_A)_{A\in I_k}$ une famille d'éléments d'un espace de Banach arbitraire X. Posons

$$S_n = \sum_{\substack{A\in I_k \\ A\subset\{1,\dots,n\}}} w_A \, x_A \quad .$$

On suppose que la suite $\{S_n\}$ (ou seulement une sous-suite) est convergente en probabilité. Alors nécessairement :

a) S_n converge vers une limite S dans $L^p(X)$ pour tout $p < \infty$.

b) $\int \exp \varepsilon\|S\|^{2/k} d\mathbb{P} < \infty$ pour tout $\varepsilon > 0$.

c) $S_n \to S$ presque sûrement.

(Noter que $\{S_n\}$ est une martingale.)

Pour finir, signalons que le théorème limite central permet de remplacer la suite $\{\varepsilon_n\}$ par une suite de variables gaussiennes indépendantes, orthonormales, équidistribuées, dans les inégalités (K), (1.1) et (1.5). En particulier on obtient ainsi le résultat bien connu de Fernique [3].

§ 2. UNE REMARQUE SUR LES ENSEMBLES DE SIDON.

Le but de ce paragraphe est de montrer que les résultats précédents sur les séries $\sum \varepsilon_k x_k$ sont encore valables pour des séries lacunaires de la forme $\sum x_k \cos n_k t$ ou $\sum x_k \sin n_k t$. On verra que, si $\{n_k\}$ est un ensemble de Sidon dans $\mathbb{Z}$, ces séries se comportent d'une manière essentiellement équivalentes. Les démonstrations qui suivent ne sont que des adaptations évidentes de méthodes classiques (cf. principalement [9] p. 128-129), mais semblent être passées inaperçues dans le cas vectoriel (sauf, dans une certaine mesure, dans [5]).

Dans toute la suite Φ désignera une fonction convexe (continue) non décroissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Les notations $\{\varepsilon_n\}$, Ω, $\mathbb{P}$ sont celles du 1er paragraphe.

Le premier lemme est un principe de contraction bien connu :

<u>Lemme 2.1</u> : Soient $(x_1,\dots,x_n)$ des éléments d'un espace de Banach X.

(i) Si $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$, on a :

$$(2.1)\qquad \int \Phi(\|\sum_1^n \alpha_i\ \varepsilon_i\ x_i\|)d\mathbb{P} \le \int \Phi(\max|\alpha_i|\ \|\sum_1^n \varepsilon_i\ x_i\|)d\mathbb{P}\ .$$

(ii) Si $(\omega_1,\dots,\omega_n)\in\mathbb{C}^n$ avec $|\omega_i| = 1$ pour $i = 1,\dots,n$, on a :

$$(2.2)\quad \int \Phi(\tfrac{1}{2}\ \|\sum \varepsilon_i\ x_i\|)d\mathbb{P} \le \int \Phi(\|\sum \omega_i\ \varepsilon_i\ x_i\|)d\mathbb{P} \le \int \Phi(2\|\sum \varepsilon_i\ x_i\|)d\mathbb{P}\ .$$

<u>Démonstration</u> :

(i) On peut supposer que $\max|\alpha_i| = 1$; soit C l'ensemble des $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ tels que $\max|\alpha_i| = 1$,la fonction convexe

$$C \ni (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \longrightarrow \int \Phi(\|\sum_1^n \alpha_i\ \varepsilon_i\ x_i\|)d\mathbb{P}$$

atteint son maximum sur C en un point extrémal de C, c'est-à-dire un point $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ tel que $\alpha_i = +1$ ou -1 ; par raison de symétrie ce maximum est donc égal à $\int \Phi(\|\sum_1^n \varepsilon_i\ x_i\|)d\mathbb{P}$, ce qui démontre (2.1).

(ii) On a :

$$(\|\sum_1^n \omega_i\ \varepsilon_i\ x_i\|) \le \|\sum_1^n (\mathrm{Re}\ \omega_i)\varepsilon_i\ x_i\| + \|\sum_1^n (\mathrm{Im}\ \omega_i)\varepsilon_i\ x_i\|$$

d'où

$$2\Phi(\|\sum \omega_i\ \varepsilon_i\ x_i\|) \le \Phi(2\|\sum \mathrm{Re}\ \omega_i\ \varepsilon_i\ x_i\|) + \Phi(2\|\sum \mathrm{Im}\ \omega_i\ \varepsilon_i\ x_i\|)$$

soit en intégrant et en appliquant (2.1) (puisque $|\mathrm{Re}\ \omega_i| \le 1$ et $|\mathrm{Im}\ \omega_i| \le 1$) :

$$(2.3) \qquad \int \Phi\left(\left\|\sum_1^n \omega_i \varepsilon_i x_i\right\|\right) d\mathbb{P} \leq \int \Phi\left(2\left\|\sum_1^n \varepsilon_i x_i\right\|\right) d\mathbb{P} .$$

Si l'on applique maintenant (2.3) en remplaçant ω_i par $\overline{\omega}_i$ et x_i par $\omega_i x_i$, on trouve (puisque $\omega_i \overline{\omega}_i = 1$) :

$$(2.4) \qquad \int \Phi\left(\left\|\sum_1^n \varepsilon_i x_i\right\|\right) d\mathbb{P} \leq \int \Phi\left(2\left\|\sum_1^n \varepsilon_i \omega_i x_i\right\|\right) d\mathbb{P} .$$

On obtient bien (2.2) en combinant (2.3) et (2.4).

Définition 2.1 : Soit G un groupe abélien compact et Γ le groupe discret dual de G. Un sous-ensemble Λ de Γ est dit "de Sidon" s'il existe une constante C telle que, pour toute famille $(\alpha_\gamma)_{\gamma\in\Lambda}$ de scalaires dont au plus un nombre fini sont non nuls :

$$(2.5) \qquad \sum_{\gamma\in\Lambda} |\alpha_\gamma| \leq C \left\| \sum_{\gamma\in\Lambda} \alpha_\gamma \gamma \right\|_{C(G)}$$

où l'on a noté C(G) l'espace des fonctions continues sur G (et on a considéré les éléments de Γ comme des fonctions continues sur G). Si Λ vérifie (2.5), on dira que Λ est "de Sidon de constante C".

Théorème 2.1 : Soit G un groupe abélien compact de dual Γ. Notons m la mesure de Haar normalisée de G. Soit $\Lambda = \{\gamma_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma$ un ensemble de Sidon de constante C.
Pour toute suite finie $(x_1,\ldots,x_n)$ dans un espace de Banach arbitraire X, on a :

$$(2.6) \quad \int \Phi\left(\frac{1}{2C}\left\|\sum_1^n \varepsilon_i x_i\right\|\right) d\mathbb{P} \leq \int \Phi\left(\left\|\sum_1^n \gamma_i(g) x_i\right\|\right) m(dg) \leq \int \Phi\left(2C\left\|\sum_1^n \varepsilon_i x_i\right\|\right) d\mathbb{P} .$$

Démonstration : On va montrer que pour tout élément $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ fixé dans $\{-1,+1\}^n$, on a :

$$(2.7) \qquad \int \Phi\left(\left\|\sum \varepsilon_i \gamma_i(g) x_i\right\|\right) m(dg) \leq \int \Phi\left(C\left\|\sum \gamma_i(g) x_i\right\|\right) m(dg) .$$

En effet, soit C_Λ le sous-espace linéairement engendré par Λ dans C(G) ; d'après (2.5), la forme linéaire ξ définie sur C_Λ par

$$\xi\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \gamma_i\right) = \sum_1^n \varepsilon_i \alpha_i$$

vérifie : $\forall\, x \in C_\Lambda \qquad |\xi(x)| \leq C\|x\|_{C(G)}$.

D'après le théorème de Hahn-Banach , il existe une mesure μ sur G de masse totale $\|\mu\| \leq C$ et telle que $\forall\, x \in C_\Lambda$, $\int x\, d\mu = \xi(x)$. On a en particulier $\int \gamma_i(g)\, \mu(dg) = \varepsilon_i$.
Soit ν l'image de μ par l'application $g \to -g$. Posons $Z = \sum_1^n \gamma_i\, x_i$, et

$Z * \nu(g) = \int Z(gh^{-1})\, \nu(dh)$. On voit aisément que

$$(2.8) \qquad Z * \nu(g) = \sum \gamma_i(g)\, \varepsilon_i\, x_i \quad .$$

Par ailleurs, on a :

$$\|Z * \nu(g)\| \leq \int \|Z(gh^{-1})\|\ |\nu|(dh)$$

donc par la convexité de Φ :

$$\Phi(\|Z * \nu(g)\|) \leq \int \Phi(\|Z(gh^{-1})\|\ \|\nu\|)\ \frac{|\nu|(dh)}{\|\nu\|}$$

soit en intégrant et en permutant l'ordre d'intégration :

$$\int \Phi(\|Z * \nu(g)\|) m(dg) \leq \int [\int \Phi(\|Z(gh^{-1})\|\ \|\nu\|) m(dg)]\ \frac{|\nu|(dh)}{\|\nu\|} \quad ;$$

comme $\int \Phi(C\|Z(gh^{-1})\|) m(dg)$ est indépendante de h, on a finalement

$$\int \Phi(\|Z * \nu(g)\|) m(dg) \leq \int \Phi(C\|Z(g)\|) m(dg) \quad .$$

D'après l'identité (2.8), on a bien démontré l'inégalité annoncée (2.7).

Notons en passant que si l'on applique (2.7) en remplaçant x_i par $\varepsilon_i x_i$, on obtient :

$$(2.9) \qquad \int \Phi(\|\sum \gamma_i\, x_i\|) dm \leq \int \Phi(C\|\sum \varepsilon_i\, \gamma_i\, x_i\|) dm \quad .$$

Si maintenant on fait la moyenne des inégalités (2.7) sur tous les choix de signes, on trouve :

$$\int [\int \Phi(\|\sum \varepsilon_i(\omega)\, \gamma_i(g)\, x_i\|) d\mathbb{P}(\omega)] dm(g) \leq \int \Phi(C\|\sum \gamma_i\, x_i\|) dm$$

d'où il résulte, d'après (2.2) :

$$\int \Phi(\frac{1}{2}\|\Sigma\ \varepsilon_i\ x_i\|)d\mathbb{P} \leq \int \Phi(C\|\Sigma\ \gamma_i\ x_i\|)dm \quad .$$

Le même traitement appliqué à (2.9) conduit à :

$$\int \Phi(\|\Sigma\ \gamma_i\ x_i\|)dm \leq \int \Phi(2C\|\Sigma\ \varepsilon_i\ x_i\|)d\mathbb{P} \quad .$$

Finalement, on obtient (2.6) en combinant les deux dernières inégalités.

<u>Corollaire 2.1</u> : Soit $\{n_k \mid k\geq 1\}$ une suite d'entiers positifs. On suppose que♦ l'ensemble $\Lambda = \{n_k\ k\geq 1\} \cup \{-n_k\ k\geq 1\}$ est un ensemble de Sidon de constante C dans le groupe $\mathbb{Z}$. On a alors, pour toute suite x_k dans un espace de Banach X telle que $\sum\limits_1^\infty \varepsilon_k\ x_k$ converge presque sûrement :

$$\int \Phi(\frac{1}{8C}\ \|\sum_1^\infty \varepsilon_k\ x_k\|)d\mathbb{P} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\|\sum_{k=1}^\infty\ x_{2k}\ \cos(n_k t) + x_{2k-1}\ \sin(n_k t)\|)dt$$

$$\leq \int \Phi(4C\ \|\sum_1^\infty \varepsilon_k\ x_k\|)d\mathbb{P} \quad .$$

La démonstration facile est laissée au lecteur.

Donnons une liste des conséquences du théorème 2.1 (dont nous conservons ici les notations) :

a) Si $1 \leq p < q < \infty$, on a :

$$(\int \|\sum_1^n \gamma_i\ x_i\|^q\ dm)^{1/q} \leq 4C^2\ K_{q,p}(\int \|\sum_1^n \gamma_i\ x_i\|^p\ dm)^{1/p} \quad .$$

b) On peut donc appliquer la même méthode qu'aux remarques 1.1 et 1.2 : soit $\mathfrak{R}_\Lambda(X)$ le sous-espace vectoriel de $L^1(G,m;X)$ engendré par les fonctions de la forme $S = \sum\limits_1^n \gamma_i\ x_i$ avec $\{x_i\} \subset X$. Ici encore, on voit que la topologie de la convergence en probabilité est équivalente à celle

---

♦ Signalons qu'un résultat de Drury (voir [7] pour plus de détails) affirme que la réunion des deux ensembles de Sidon est encore de Sidon. Il suffit donc ici que $\{n_k \mid k\geq 1\}$ soit de Sidon.

définie par les normes de $L^p(G,m;X)$ pour tout $p<\infty$ ou bien par la norme

$$|S| = \inf\{C>0 \quad \int \exp\{\|S(g)/C\|^2\}m(dg) \le e\} \quad .$$

c) On obtient aussi des inégalités maximales en combinant (1.6) et le théorème 2.1 : si l'on pose $S_k = \sum_{1\le j\le k} \gamma_j x_j$, on a :

$$\int \Phi(\sup_{k\le n} \|S_k(g)\|)m(dg) \le 2\int \Phi(4C^2 \|S_n(g)\|)m(dg) \quad .$$

On peut aussi appliquer le théorème 2.1 pour démontrer une forme affaiblie de la loi du logarithme itéré de [10] et on retrouve un résultat de [5] :

<u>Corollaire 2.2</u> : Soit Λ comme dans le corollaire 2.1 et soit x_n une suite dans un espace de Banach X. Posons

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (x_{2k} \cos n_k t + x_{2k-1} \sin n_k t)$$

et $\forall\, \omega\in\Omega$ $$S_n^\varepsilon(\omega) = \sum_{k=1}^{2n} x_k\, \varepsilon_k(\omega) \quad .$$

Soit a_n une suite non décroissante de réels positifs. Posons

$$\mathcal{S}(t) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\|S_n(t)\|}{a_n} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}^\varepsilon(\omega) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\|S_n(\omega)\|}{a_n} \quad . \text{ Alors :}$$

i) $\mathcal{S}(t)<\infty$ p.s. si et seulement si $\mathcal{S}^\varepsilon(\omega)<\infty$ p.s.

et ii) $\mathcal{S}(t)=0$ p.s. si et seulement si $\mathcal{S}^\varepsilon(\omega)=0$ p.s.

De plus si $\mathcal{S}(t)<\infty$ p.s. alors $\exists\ \delta>0$ tel que

$$\int \exp\{\delta \sup\|S_n(t)/a_n\|^2\}dt < \infty \quad .$$

<u>Démonstration</u> : On applique le corollaire 2.1 en utilisant la variante décrite à la remarque 1.4. On obtient donc pour chaque entier N :

$$(2.10) \quad \frac{1}{8C}\int \sup_{n\ge N} \|S_n^\varepsilon/a_n\|d\mathbb{P} \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sup_{n\ge N} \|S_n(t)/a_n\|dt \le 4C\int \sup_{n\ge N} \|S_n^\varepsilon/a_n\|d\mathbb{P} \quad .$$

D'après les remarques précédentes, $\mathcal{S}(t)<\infty$ p.s. (resp. $=0$ p.s.) si et seulement si $\int \sup_{n\geq 1} \|S_n(t)/a_n\| dt < \infty$

(resp. $\int \sup_{n\geq N} \|S_n(t)/a_n\| dt \to 0$ quand $N \to \infty$) ;

et on a aussi un résultat analogue pour $\mathcal{S}^{\varepsilon}(\omega)$.
Les deux premières assertions résultent donc de (2.10) ; la dernière résulte du corollaire 2.1 dans la situation de la remarque 1.4.

Conclusion : Le théorème 2.1 montre que dans toutes ces questions d'intégrabilité de normes, le cas des ensembles de Sidon généraux se ramène au cas particulier de l'ensemble de Sidon fondamental que forme la suite $\{\varepsilon_n\}$ dans le dual du groupe $\{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$. On peut d'ailleurs souligner qu'un ensemble Λ vérifiant les conclusions du théorème 2.1 pour tout espace de Banach X, pour une constante C et (par exemple) pour $\Phi(t) = t^2$ est nécessairement un ensemble de Sidon.

Additif : Après avoir rédigé cet exposé, je me suis aperçu que dans [11] (chapitre III, théorème 3) A. Bonami démontre le théorème 1.1 dans le cas scalaire d'une manière essentiellement identique à celle présentée au paragraphe 1. Le lecteur trouvera aussi dans [11] une démonstration de l'inégalité (1.2).

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. Beckner, Inequalities in Fourier analysis, Annals of Maths. 102 (1975).

[2] A. Bonami, Ensembles $\Lambda(p)$ dans le dual D^{∞}, Ann. Inst. Fourier 18 (1968) 193-204.

[3] X. Fernique, Intégrabilité des vecteurs gaussiens, C.R. Acad. Sc. Paris A 270 (1970) 1698-1699.

[4] J.P. Kahane, Some random series of functions, Heath Mathematical Monographs (1968).

[5] J. Kuelbs et W. Woyczynski, Lacunary series and exponential moments, à paraître.

[6] S. Kwapień, A theorem on Rademacher series with vector valued coefficients. Probability in Banach spaces, Springer Lecture Notes 526 (1976) 157-158.

[7] J. Lopez and K. Ross, Sidon sets, Lecture Notes on pure and applied maths. No 13, Marcel Dekker (1975).

[8] J. Neveu, Martingales à temps discret, Masson.

[9] W. Rudin, Fourier analysis on groups, Interscience tracts in pure and applied maths. No 12, New York (1962).

[10] M. Weiss, The law of the iterated logarithm for lacunary trigonometric series, Trans. A.M.S. 91 (1958) 444-469.

[11] A. Bonami, Etude des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(G)$, Ann. Inst. Fourier 20 (1970) 335-402.
