J. STERN

Arbres dont toutes les branches sont faiblement Cauchy

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1977-1978), exp. n° 6, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1977-1978____A5_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E S U R L A G E O M E T R I E

D E S E S P A C E S D E B A N A C H

1977-1978

ARBRES DONT TOUTES LES BRANCHES SONT FAIBLEMENT CAUCHY

J. STERN

Exposé No VI

2 Décembre 1977

§ 1. DEFINITIONS ; RESULTATS.

Rosenthal a prouvé il y a quelques années le résultat suivant :

Théorème 1.1 (Rosenthal [1]) : Soit (x_n) une suite bornée de points d'un espace de Banach E. (x_n) admet une sous-suite (x'_n) qui est soit faiblement Cauchy soit équivalente à la base canonique de ℓ^1.

On rappelle qu'une suite (x_n) est faiblement Cauchy si la limite $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ existe pour tout élément f du dual E' de E.

Une suite (x_n) est équivalente à la base canonique de ℓ^1 s'il existe une constante $\delta > 0$ telle que, pour tout choix de scalaires $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ on ait

$$\delta \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, x_i \right\| .$$

Le but de cet exposé est de présenter un résultat qui étend le théorème de Rosenthal aux arbres. Pour présenter cette généralisation, quelques définitions sont utiles.

Soit S l'ensemble des suites de 0 et de 1 ordonné par la relation

" s est un segment initial de s' "

notée $s \leq s'$. On appelle sous-arbre de S tout sous-ensemble X de S qui, muni de la restriction de la relation $\leq$, est isomorphe à l'ensemble ordonné $(S,\leq)$. En somme, les sous-arbres de S sont les sous-ensembles X qui admettent un unique élément minimal et qui sont tels que tout élément de X admet exactement deux sucesseurs immédiats dans X.

Une chaîne de S est un sous-ensemble infini totalement ordonné ; une branche de S est une chaîne maximale ; toute chaîne est contenue dans une unique branche. On définit de même les chaînes et les branches d'un sous-arbre T de S. On note $\mathcal{C}(S)$ (resp. $\mathcal{C}(T)$) l'ensemble des chaînes de D (resp. de T).

L'extension du théorème 1 s'énonce alors

Théorème 1.2 : *Soit $(x_s)_{s\in S}$ une suite bornée de points d'un espace de Banach E, indexée par S. Il existe un sous-arbre T de S qui satisfait l'une des deux alternatives suivantes* :

i) *pour toute chaîne b de T, la suite $(x_s)_{s\in b}$ est faiblement Cauchy,*

ii) *pour toute chaîne b de T, la suite $(x_s)_{s\in b}$ est équivalente à la base canonique de ℓ^1.*

Ce théorème répond à une question de Brunel et Sucheston. Sa preuve, donnée dans [3], utilise des techniques de nature métamathématique, en particulier la méthode du forcing de Cohen. J'ignore si on peut donner une preuve "classique" du théorème 2. Dans cet exposé, je me propose de présenter une preuve "classique" dans l'hypothèse où le continu n'est pas de puissance $\aleph_s$. Que cette hypothèse soit superflue est, là encore, une question métamathématique et je ne présenterai pas la méthode par laquelle on peut l'éliminer.

§ 2. ENSEMBLES ANALYTIQUES ET COANALYTIQUES.

Dans ce paragraphe, X, Y, ... désignent des espaces polonais (c-à-d. des espaces métriques complets séparables). Les ensembles *boréliens* d'un espace polonais X sont, comme on sait, les éléments de la plus petite σ-algèbre de parties de X qui contient les ouverts. On appelle sous-ensemble *analytique* de X, tout ensemble qui est la projection sur X d'un borélien B d'un espace produit de la forme $X\times Y$. Un sous-ensemble de X est *coanalytique* si son complémentaire est analytique.

On rappelle les résultats classiques suivants sur les coanalytiques :

Théorème 2.1 : *Tout ensemble coanalytique est réunion de $\aleph_1$ ensembles boréliens.*

Théorème 2.2 (théorème d'uniformisation) : *Pour tout sous-ensemble coanalytique C d'un espace produit $X\times Y$, il existe un ensemble coanalytique $C'\subseteq C$ qui a les propriétés suivantes* :

i) *les projections de C' et C sur X sont identiques,*

ii) *pour tout élément x de X, il existe au plus un élément y de Y tel que $(x,y)\in C'$.*

On dit que C' uniformise C.

En utilisant le fait que tout ensemble borélien non dénombrable contient un ensemble parfait compact non vide, on déduit du théorème 2.1 la :

Proposition 2.3 : On suppose que le continu n'est pas de puissance $\aleph_1$. Alors, tout ensemble coanalytique qui a la puissance du continu contient un sous-ensemble parfait compact non vide.

Pour la suite, on munit P(S) de la topologie dont une base est fournie par les ensembles de la forme

$$\{x : s_1 \in x, \ldots, s_n \in x \ ; \ s'_1 \notin x, \ldots, s'_k \notin x\}$$

où les s_i et les s'_j sont des éléments de S. Il est facile de voir que cet espace peut être muni d'une distance d qui en fait un espace polonais : soit en effet (s_n) un énumération des éléments de S, si on pose

$$\begin{aligned} d_n(x,x') &= 0 \qquad \text{si } s_n \in x \text{ et } s_n \in x' \\ &\qquad\quad \text{ou si } s_n \notin x \text{ et } s_n \notin x' \\ d_n(x,x') &= 1 \quad \text{dans le cas contraire} \quad , \end{aligned}$$

alors $\Sigma \dfrac{d_n(x,x')}{2^n}$ est une telle distance.

L'introduction des ensembles analytiques et coanalytiques est justifiée par le résultat suivant :

Proposition 2.4 : Soit $(x_s)_{s\in S}$ une suite d'éléments d'un espace de Banach E, indexée par S ; alors :

i) $\{y : y$ est une chaîne de S et $(x_s)_{s\in y}$ est faiblement Cauchy$\}$ est un ensemble coanalytique,.

ii) $\{y : y$ est une chaîne de S et $(x_s)_{s\in y}$ est équivalente à la base canonique de $\ell^1\}$ est un borélien. (C'est en fait l'intersection d'un G_δ et d'un F_σ).

Le reste de ce paragraphe est consacré à la preuve de la proposition 2.4. On considère pour cela l'espace $X = P(S) \times \mathbb{R}^S$ qui peut être muni d'une métrique en faisant un espace polonais.

Lemme 2.5 : Soit Y_1 l'ensemble des éléments (y,f) de Y qui sont tels qu'il existe une application linéaire continue $\bar{f}$ de norme ≤ 1 vérifiant

$$\forall s \qquad \bar{f}(x_s) = f(s) \quad .$$

Y_1 est fermé.

Preuve : En effet l'existence d'une application linéaire continue de norme ≤ 1 vérifiant

$$\bar{f}(x_s) = f(s)$$

s'exprime par les inégalités

$$|\alpha_1 f(s_1) + \dots + \alpha_k f(s_k)| \leq \|\alpha_1 x_{s_1} + \dots + \alpha_k x_{s_k}\|$$

où $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ sont des scalaires et $s_1,\dots,s_k$ des éléments de S.
Chaque inégalité définit un fermé d'où le résultat.

Lemme 2.6 : Soit Y_2 l'ensemble des éléments (y,f) de Y qui sont tels que la suite $f(s)_{s\in y}$ n'est pas de Cauchy ; Y_2 est borélien (c'est en fait un $G_{\delta\sigma}$).

Preuve : Soit σ une partie finie de S et q un rationnel strictement positif ; on pose

$$A_{q,\sigma} = \bigcup_{\substack{s\notin\sigma \\ s'\notin\sigma}} \{(y,f)\in Y : s\in y \ , \ s'\in y \ , \ |f(s)-f(s')| > q\} \quad .$$

$A_{q,\sigma}$ est ouvert et on constate que

$$Y_2 = \bigcup_{\substack{q\in\mathbb{Q} \\ q>0}} \ \bigcap_{\substack{\sigma\subseteq S \\ \sigma \text{ fini}}} A_{q,\sigma} \quad .$$

Lemme 2.7 : L'ensemble $\mathcal{C}(S)$ est un borélien (en fait un G_δ).

Preuve : Pour chaque partie finie σ de S, on pose

$$B_\sigma = \bigcup_{s\notin\sigma} \{y : s\in y\}$$

B_δ est ouvert et l'ensemble des parties infinies de de S est précisément le G_δ

$$B = \bigcap_{\substack{\sigma \subseteq S \\ \sigma \text{ fini}}} B_\sigma \ .$$

Or $\mathcal{C}(S)$ est l'intersection de B et de l'ensemble des parties de S formées d'éléments deux à deux comparables qui est un fermé.

On peut maintenant donner la preuve de 2.4 i).

Pour montrer que

$$\{y : y \in \mathcal{C}(S) \text{ et } (x_s)_{s \in y} \text{ est faiblement Cauchy}\}$$

est coanalytique. Il suffit de voir que

$$\{y \subseteq S : (x_s)_{s \in y} \text{ n'est pas faiblement Cauchy}\}$$

est un ensemble analytique. Or c'est la projection sur X de $Y_1 \cap Y_2$.

Pour établir 2.4 ii) on considère pour $\delta > 0$ l'ensemble Z_δ des éléments y de P(s) tels que

$$\delta \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, x_{s_i} \right\|$$

pour tout choix de scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et toute suite d'éléments de y $s_1, \ldots, s_n$. Z_δ est fermé et

$$\{y \in \mathcal{C}(S) : (x_s)_{s \in y} \text{ est équivalente à la base canonique de } \ell^1\}$$

est exactement

$$\mathcal{C}(S) \cap \Big(\bigcup_{\substack{q > 0 \\ q \in \mathbb{Q}}} Z_q \Big) \ .$$

§ 3. PREUVE DU THEOREME 1.2.

Le lemme suivant est le pas décisif dans la preuve.

Lemme 3.1 : Soit X un sous-ensemble de $\mathcal{C}(S)$; on suppose qu'il existe un ensemble parfait non vide $P \subseteq \mathcal{C}(S)$ tel que

i) pour tout y dans P, toute chaîne extraite de y est dans X,

ii) si y et y' sont deux éléments distincts de P, leur union $y \cup y'$

<u>n'est pas une chaîne,</u>

<u>alors il existe un sous-arbre</u> T <u>de</u> S <u>tel que</u> $\mathcal{C}(T) \subseteq X$.

<u>Preuve</u> : On définit par induction sur la longueur de s une application t de S dans S ainsi qu'une application z de S dans $\mathcal{C}(S)$ telles que l'on ait

i) t est croissante

ii) $t(s^\frown 0)$ et $t(s^\frown 1)$ sont incomparables

iii) $t(s) \in z(s) \in P$

iv) si $s \leq s'$ alors $\{u \leq t(s) : u \in z(s)\} = \{u \leq t(s) : u \in z(s')\}$.

Pour réaliser cette construction, il suffit de montrer comment on choisit $t(s^\frown 0)$, $t(s^\frown 1)$ et $z(s^\frown 0)$, $z(s^\frown 1)$ à partir de $t(s)$, $z(s)$.

Soit X_s l'ensemble défini par

$$X_s = \{y : \{u \leq t(s) : u \in y\} = \{u \in t(s) : u \in z(s)\}\} .$$

X_s est ouvert et $P \cap X_s$ n'est pas vide (puisqu'il contient $z(s)$) ; on peut donc choisir deux éléments distincts dans $P \cap X_s$ soit $z(s^\frown 0)$ et $z(s^\frown 1)$. Comme la réunion de $z(s^\frown 0)$ et $z(s^\frown 1)$ n'est pas une chaîne, il existe des éléments $t(s^\frown 0)$, $t(s^\frown 1)$ tels que

$$t(s^\frown 0) \in z(s^\frown 0)$$
$$t(s^\frown 1) \in z(s^\frown 1)$$
$$t(s^\frown 0) \text{ et } t(s^\frown 1) \text{ sont incomparables}$$
$$t(s^\frown 0) \geq t(s)$$
$$t(s^\frown 1) \geq t(s) \quad .$$

Soit T l'image de t. T est clairement un sous-arbre de S. On va voir que $\mathcal{C}(T) \subseteq X$. Pour cela, on se donne une chaîne y de $\mathcal{C}(T)$. Soit v l'ensemble des s tels que $t(s) \in y$. Alors, la condition iv) implique que $z(s)_{s \in v}$ est une suite convergente. Soit z la limite de cette suite ; clairement y est une chaîne extraite de z ; comme z est élément de P (puisque P est fermé) on conclut que y appartient à X.

On passe maintenant à la preuve du théorème. A tout élément a de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, on peut associer la branche $\sigma(a)$ de S, formée des sections commençantes de a. On considère alors les deux ensembles coanalytiques suivants

$$C_1 = \{(a,y) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times P(S) : y \in \mathcal{C}(S) \ , \ y \subseteq \sigma(a)$$
$$\text{et } (x_s)_{s \in y} \text{ est faiblement Cauchy}\}$$

$$C_2 = \{(a,y) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times P(S) : y \in \mathcal{C}(S) \text{ , } y \subseteq \sigma(a)$$
$$\text{et } (x_s)_{s \in y} \text{ est équivalente à la base canonique de } \ell^1\} \text{ .}$$

Soient C'_1 et C'_2 des ensembles coanalytiques qui sont respectivement contenus dans C_1 et C_2 et qui uniformisent C_1 et C_2 (cf. théorème 2.2). Soient π_1 (resp. π_2) la projection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times P(S)$ sur $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (resp. $P(S)$). Le théorème de Rosenthal (1.1) a pour conséquence que

$$\pi_1(C'_1) \cup \pi_1(C'_2) = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \text{ .}$$

Il en résulte que l'un au moins des ensembles C'_1, C'_2 a la puissance du continu. Supposons pour fixer les idées que C'_1 a la puissance du continu. Comme on a fait l'hypothèse que le continu n'est pas $\aleph_1$, C'_1 contient un ensemble parfait compact non vide K. Il est facile de voir que la restriction de π_2 à C_1 est injective, en effet si (a,y) est dans C_1, $\sigma(a)$ est l'unique branche qui contient y. $\pi_2(K)$ est donc l'image de K par une fonction continue injective. C'est donc un ensemble parfait P. Pour conclure par le lemme 3.1 il suffit de voir que si

$$X = \{y \in \mathcal{C}(S) : (x_s)_{s \in y} \text{ est faiblement Cauchy}\}$$

alors P, X satisfont les hypothèses du lemme 3.1. La première de ces deux hypothèses est conséquence de la définition de C_1.
Pour vérifier la seconde on se donne deux éléments distincts y et y' de P. Soit $y = \pi_2(a,y)$, $y' = \pi_2(a',y')$. Puisque C'_1 uniformise C_1, on a $a \neq a'$, donc l'unique branche qui contient y est distincte de l'unique branche qui contient y' ; par suite $y \cup y'$ n'est pas une branche.

§ 4. CONCLUSION.

On a prouvé, étant donnée une suite $(x_s)_{s \in S}$ bornée d'un espace de Banach E et moyennant l'hypothèse que le continu n'est pas $\aleph_1$, qu'un ensemble U est non vide où

$U = \{T : T$ est un sous-arbre de S et ou bien pour toute chaîne b de T la suite $(x_s)_{s \in b}$ est faiblement Cauchy, ou bien pour toute chaîne b de T, la suite $(x_s)_{s \in b}$ est équivalente à la base canonique de $\ell^1\}$.

On peut voir que U est un ensemble coanalytique. Or, on démontre en général que l'hypothèse du continu ou sa négation peuvent être éliminées des preuves où le résultat à obtenir est une assertion du type

U n'est pas vide ,

où U est un coanalytique. Ceci justifie l'utilisation d'hypothèses parasites (comme ici la négation de l'hypothèse du continu).

Pour terminer, on peut noter que le théorème 1.2 est la version appliquée d'un théorème abstrait qui s'énonce

Théorème 4.1 : Soit $\mathcal{X}$ un sous-ensemble analytique de $\mathcal{C}(S)$; alors il existe un sous-arbre T de S tel que l'on ait

i) ou bien $\mathcal{C}(T) \subseteq \mathcal{X}$

ii) ou bien $\mathcal{C}(T) \cap \mathcal{X} = \emptyset$.

Ce théorème est l'extension d'un théorème de Silver [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] H.P. Rosenthal, A characterization of Banach spaces containing ℓ^1,

[2] J. Silver, Every analytic set is Ramsey, J. Symbolic Logic 35 (1970) 60-64.

[3] J. Stern, A Ramsey theorem for trees with an application to Banach spaces, Israel J. Math., à paraître.
