Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

B. Beauzamy

Factorisation des propriétés de Banach-Saks

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1977-1978), exp. n° 5, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1977-1978____A4_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   S U R   L A   G E O M E T R I E

D E S   E S P A C E S   D E   B A N A C H

1977-1978

FACTORISATION DES PROPRIETES DE BANACH-SAKS

B. BEAUZAMY

Exposé No V

25 Novembre 1977

Au cours de l'exposé III, nous avons étudié la propriété suivante, notée $(\mathcal{P}_1)$, d'un espace de Banach E :

$(\mathcal{P}_1)$ Il existe un nombre $\delta > 0$ et il existe, dans E, une suite bornée de points $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout choix de signes $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_k = \pm 1$, toute suite croissante de k entiers $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, on ait :

$$\left\|\frac{1}{k}\sum_1^k \varepsilon_i\, e_{n_i}\right\| \geq \delta \quad .$$

Nous avons examiné les liens entre $(\mathcal{P}_1)$ et les propriétés de Banach-Saks et Banach-Saks-Rosenthal. En particulier, nous avons obtenu :

- Si E est réflexif, E possède B.S. si et seulement si E n'a pas $(\mathcal{P}_1)$ (th. 1, b)).
- Si E ne contient pas ℓ^1, E possède B.S.R. si et seulement si E n'a pas $(\mathcal{P}_1)$ (prop. 7).

Dans un premier paragraphe de cet exposé, nous allons décrire, au moyen d'une nouvelle version de la propriété de Banach-Saks, les espaces de Banach qui ne possèdent pas $(\mathcal{P}_1)$. Dans un second paragraphe, nous étendrons au cadre des opérateurs les définitions de ces différentes versions des propriétés de Banach-Saks, et nous obtiendrons des théorèmes de factorisation. Dans un troisième paragraphe, nous nous intéresserons à la factorisation de certaines classes d'opérateurs : les opérateurs uniformément convexifiants et les opérateurs de type Rademacher.

§ I. LES ESPACES DE BANACH QUI NE POSSEDENT PAS $(\mathcal{P}_1)$: LA PROPRIETE DE BANACH-SAKS ALTERNEE.

Nous dirons qu'un espace E possède la seconde propriété de Banach-Saks (en abrégé B.S.$_2$), si, pour toute suite bornée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut trouver une sous-suite $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite infinie de signes $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(\varepsilon_n = \pm 1)$, de telle façon que $\frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_k\, e'_k$ converge dans E.

Tout espace qui possède B.S. possède évidemment B.S.$_2$. Cette propriété B.S.$_2$ va permettre de décrire exactement les espaces de Banach qui ne possèdent pas $(\mathcal{P}_1)$:

<u>Théorème I.1</u> : Un espace de Banach ne possède pas B.S.$_2$ si et seulement si $(\mathcal{P}_1)$ y est satisfaite.

<u>Démonstration</u> :

a) Si $(\mathcal{P}_1)$ est satisfaite pour une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a, pour toute sous-suite de celle-ci, pour tout choix de signes :

$$\left\|\frac{1}{k}\sum_1^k \varepsilon_i\, e'_i - \frac{1}{2k}\sum_1^{2k} \varepsilon_i\, e'_i\right\| = \left\|\frac{1}{2k}\left(\sum_1^k \varepsilon_i\, e'_i - \sum_{k+1}^{2k} \varepsilon_i\, e'_i\right)\right\| > \delta \quad ,$$

et les sommes $\frac{1}{k}\sum_1^k \varepsilon_i\, e'_i$ ne peuvent donc converger.

b) Supposons que E n'ait pas B.S.$_2$. On peut alors trouver une suite bornée (e_n) telle que, pour toute sous-suite (e'_n), pour toute suite de signes (ε_n), les sommes $\frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_k\, e'_k$ ne convergent pas. On peut, bien sûr, se restreindre à la "bonne sous-suite" de Brunel-Sucheston, extraite de la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et encore notée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut aussi supposer $\|e_n\| \le 1\ \forall\ n$.

<u>Proposition 1</u> : Si la suite $\frac{1}{n}\sum_1^n (-1)^k\, e_k$ converge dans F, on peut trouver une sous-suite de la suite e_n dont toutes les sous-suites e'_n sont telles que $\frac{1}{n}\sum_1^n (-1)^k\, e'_k$ converge dans E.

<u>Démonstration de la proposition 1</u> : Cette proposition est tout à fait analogue à la proposition 3 de Brunel-Sucheston [6], et nous la démontrerons en adaptant la méthode de [6]. La seule différence est qu'ici nous nous occupons de signes altèrnés, alors que dans [6] tous les signes sont +.

Supposons que $\frac{1}{n}\sum_1^n (-1)^k\, e_k \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ dans F. Nous allons d'abord montrer que $y = 0$.

<u>Lemme 1</u> : Si, dans F, $\frac{1}{n}\sum_1^n (-1)\, e_k \xrightarrow[n\to\infty]{} y$, on a $y = 0$.

<u>Démonstration du lemme 1</u> : On pose $s_n = \frac{1}{n}\sum_1^n (-1)^k\, e_k$. On a $s_n - s_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, si $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$. Mais :

$$\begin{aligned} s_n - s_{2n} &= \frac{1}{n}\sum_1^n (-1)^k\, e_k - \frac{1}{2n}\sum_1^{2k} (-1)^k\, e_k \\ &= \frac{1}{2n}\left(\sum_1^n (-1)^k\, e_k - \sum_{n+1}^{2n} (-1)^k\, e_k\right) \end{aligned}$$

et donc :

$$|s_n - s_{2n}| = \left|\frac{1}{2n}\left(\sum_1^n (-1)^k e_k - \sum_{n+1}^{2n} (-1)^k e_{k+1}\right|\right.$$

$$= \left|\frac{1}{2n}\left(\sum_1^{2n+1} (-1)^k e_k - (-1)^{n+1} e_{n+1}\right)\right|$$

et donc

$$|s_n - s_{2n}| \geq \frac{2n+1}{2n} |s_{2n+1}| - \frac{1}{2n} \quad ,$$

d'où il résulte que $s_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, et $y = 0$, ce qui prouve le lemme.
Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver un entier $P(\varepsilon)$ tel que si $p \geq P(\varepsilon)$, on ait :

$$\left|\frac{1}{p} \sum_1^p (-1)^k e_k\right| < \varepsilon \quad .$$

D'après la construction du modèle étalé de Brunel-Sucheston, on en déduit qu'il existe, lorsque $p \geq P(\varepsilon)$, un entier N (dépendant de ε, p), tel que :
si $N \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_p$,
on ait

$$\text{(1)} \qquad \left\|\frac{1}{p} \sum_1^p (-1)^k e_{n_k}\right\| < \varepsilon \quad .$$

Choisissons maintenant par récurrence une suite d'entiers P_n avec :

$$\begin{cases} P_n \geq P(\frac{1}{2^n}) \\ P_n > n\, P_{n-1} \quad . \end{cases}$$

Posons $\nu(n) = N(\frac{1}{2^n}, P_n)$, et $r_n = \sum_{j=1}^n (\nu(j) + P_j)$. Les r_n vérifient

$$\begin{cases} r_{n+1} > r_n + P_n \\ r_n \geq \nu(n) \quad . \end{cases}$$

On a, d'après (1) , si :

$$\text{(2)} \qquad \left\|\frac{1}{P_n} \sum_1^{P_n} (-1)^j e_{m_j}\right\| \leq \frac{1}{2^n} \ .$$

Considérons les termes (e_i) d'indices $r_1+1, r_1+2, \dots, r_1+P_1, r_2+1, \dots, r_2+P_2, \dots, r_n+1, \dots, r_n+P_n, \dots$ rangés dans cet ordre, et appelons-les $y_1, y_2, \dots$. Soit (z_j) une sous-suite des (y_i). Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit k l'entier défini par $P_1 + \dots + P_k \leq n \leq P_1 + \dots + P_{k+1}$.

Posons $m = n - \sum_1^k P_i$. On peut écrire les divisions :

$$m = d_k \; P_k + Q_k \quad , \quad Q_k < P_k \quad ,$$

et à nouveau

$$Q_k = d'_k \; P_{k-1} + Q'_k \quad , \quad Q'_k < P_{k-1} \quad .$$

On peut maintenant écrire :

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^j z_j =$$

$$[(-1)z_1 + \dots + (-1)^{P_1} z_{P_1}] + [(-1)^{P_1+1} z_{P_1+1} + \dots + (-1)^{P_1+P_2} z_{P_1+P_2}]$$

$$+ \dots + [(-1)^{P_1+\dots+P_{k-1}+1} z_{P_1+\dots+P_{k-1}+1} + \dots + (-\varepsilon)^{P_1+\dots+P_k} z_{P_1+\dots+P_k}]$$

$$+ (-1)^{P_1+\dots+P_k+1} z_{P_1+\dots+P_k+1} + \dots + (-1)^n z_n \quad .$$

Pour les termes entre crochets, la relation 2 permet d'écrire :

$$\|(-1) z_1 + \dots + (-1)^{P_1} z_{P_1}\| \leq P_1 \cdot 2^{-1}$$

$$\|(-1) z_{P_1+1} + \dots + (-1)^{P_2} z_{P_1+P_2}\| \leq P_2 \cdot 2^{-2} \quad ,$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\|(-1) z_{P_1+\dots+P_{k-1}+1} + \dots + (-1)^{P_k} z_{P_1+\dots+P_k}\| \leq P_k \cdot 2^{-k} \quad .$$

Il reste à considérer les m termes de la somme

$$(-1) \; z_{P_1+\dots+P_k+1} + \dots + (-1)^m z_{P_1+\dots+P_k+m} \quad .$$

Pour les $d_k P_k$ premiers, on les groupe en d_k blocs de longueur P_k, et, on a, pour chacun de ces blocs, en vertu de la relation 2 , la majoration $P_k \cdot 2^{-k}$, soit au total $d_k \, P_k \, 2^{-k}$.

Il reste Q_k termes. Les $d'_k\ P_{k-1}$ premiers donnent de même la majoration $d'_k\ P_{k-1}\ 2^{-k+1}$. Il reste alors Q'_k termes, qu'on majore par inégalité triangulaire.

On obtient finalement, en divisant par n :

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_1^n z_j\right\| \leq \frac{\sum_{j=1}^{k} 2^{-j}\ P_j}{\sum_1^k P_j} + 2^{-k} + 2^{1-k} + \frac{Q'_k}{P_k} \quad ,$$

car $\frac{d_k\ P_k}{n} \leq 1$, puisque $d_k\ P_k \leq m \leq n$, et $\frac{Q_{k-1}}{n} \leq \frac{Q_{k-1}}{P_k}$ puisque $n \geq P_k$.

Or si $n \to +\infty$, $k \to +\infty$, et tous les termes du second membre tendent vers 0 (on a $\frac{Q'_k}{P_k} < \frac{P_{k-1}}{P_k} < \frac{1}{k}$), et ceci achève la démonstration de la proposition.

Revenons à la démonstration du théorème. Si E ne possède pas B.S.$_2$, les sommes $\frac{1}{n}\sum_1^n (-1)^k\ e_k$, calculées sur la bonne sous-suite, ne peuvent converger : la proposition 1 implique donc que $\frac{1}{n}\sum_1^n (-1)^k\ e_k$ ne converge pas dans F.

<u>Lemme 2</u> : Si $\frac{1}{n}\sum_1^n (-1)^k\ e_k$ ne converge pas dans F, on peut trouver un nombre $\delta > 0$ tel que $\forall$ n,

$$\left|\frac{1}{n}\sum_1^n (-1)^k\ e_k\right| > \delta \quad .$$

Ce lemme se démontre exactement comme le lemme 3 de l'exposé III.

<u>Lemme 3</u> : Si, pour tout n, $\left|\frac{1}{n}\sum_1^n (-1)^k\ e_k\right| > \delta$, on a, pour tout choix de signes $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n = \pm 1$,

$$\left|\frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_k\ e_k\right| > \frac{\delta}{4} \quad .$$

<u>Démonstration du lemme 3</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ un choix de n signes. On peut écrire :

$$|\varepsilon_1\ e_1 + \ldots + \varepsilon_n\ e_n| = |\varepsilon_1\ e_1 + \varepsilon_2\ e_3 + \ldots + \varepsilon_n\ e_{2n-1}|$$

et aussi

$$= |-\varepsilon_1\ e_2 - \ldots - \varepsilon_n\ e_{2n}| \quad .$$

Par conséquent

$$|\varepsilon_1 e_1 + \dots + \varepsilon_n e_n| \geq \frac{1}{2} |\varepsilon_1(e_1 - e_2) + \varepsilon_2(e_3 - e_4) + \dots + \varepsilon_n(e_{2n-1} - e_{2n})| \quad .$$

Mais on sait que les différences consécutives $e_{2k-1} - e_{2k}$ sont inconditionnelles, et, plus précisément, (Brunel-Sucheston [5], lemme 2.3) que :

$$|\varepsilon_1(e_1 - e_2) + \dots + \varepsilon_n(e_{2n-1} - e_{2n})| \geq \frac{1}{2} |e_1 - e_2 + e_3 - e_4 + \dots + e_{2n-1} - e_{2n}| \quad ;$$

le lemme en résulte aussitôt.

La démonstration de la proposition 3 de l'exposé III montre alors que la suite (e_n) est équivalente, dans F, à la base canonique de ℓ^1 ; le théorème 1 de l'exposé III implique alors que E possède la propriété $(\mathcal{P}_1)$. Ceci achève la démonstration du théorème.

Il est clair que la démonstration utilise seulement le fait que les sommes de Césaro alternées $\frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^k e_k$ ne convergent pas. On en déduit :

<u>Proposition 2</u> : Les propriétés suivantes sont équivalentes, pour un espace de Banach E :

- pour toute suite bornée (e_n) de E, on peut trouver une sous-suite (e'_n) et une suite de signes (ε_n) telles que $\frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_k e'_k$ converge (propriété B.S.$_2$).
- Pour toute suite bornée (e_n) de E, on peut trouver une sous-suite (e'_n) et une suite de signes (ε_n) telles que $\frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_k e'_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
- De toute suite bornée (e_n), on peut extraire une sous-suite (e'_n) telles que les sommes de Césaro alternées $\frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^k e'_k$ convergent.
- De toute suite bornée (e_n), on peut extraire une sous-suite (e'_n) telle que $\frac{1}{n} \sum_1^n (-1)^k e'_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Cette dernière propriété a été dénommée A.B.S. par Brunel-Sucheston (Alternate signs Banach-Saks), qui ont démontré qu'un espace la possédait dès qu'il ne contenait pas de $\ell^1_{(n)}$ uniformément. Le théorème 1 améliore considérablement ce résultat, puisqu'il prouve que E a A.B.S. si et seulement s'il ne possède pas de modèle étalé isomorphe à ℓ^1.

Pour suivre la terminologie de Brunel-Sucheston, nous adopterons désormais la notation A.B.S. plutôt que B.S.$_2$.

On peut caractériser de façon analogue le fait que E ne contienne pas de $\ell^1_{(n)}$ uniformément. Cela a été fait par B. Maurey et G. Pisier [9] : cela se produit si et seulement si, pour toute suite bornée (x_n), il existe une suite de signes ε_n telle que $\frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_k\, x_k \to 0$ dans E (il n'y a pas de sous-suite à extraire).

En résumé, nous avons les implications suivantes :

$$\text{B.S.} \Longrightarrow \text{A.B.S.} \Longrightarrow \text{B.S.R.}$$

(la première est triviale, la seconde résulte de Non B.S.R. $\Rightarrow (\mathcal{P}_1) \Rightarrow$ non A.B.S) et ces propriétés coïncident pour les espaces réflexifs.

c_o est un exemple d'espace qui a A.B.S. (Brunel-Sucheston [5]) sans avoir B.S., ℓ^1 est un exemple d'espace qui a B.S.R. sans avoir A.B.S.

Nous allons maintenant étendre la définition de ces trois propriétés au cadre des opérateurs entre espaces de Banach, et obtenir des théorèmes de factorisation.

§ II. PROPRIETES DE BANACH-SAKS POUR DES OPERATEURS ; LES THEOREMES DE FACTORISATION.

Soient maintenant E_1 et E_2 deux espaces de Banach, et T un opérateur linéaire continu de E_1 dans E_2. Nous dirons que :

- T possède la propriété de Banach-Saks si de toute suite bornée dans E_1 on peut extraire une sous-suite dont les images par T sont de Banach-Saks dans E_2.
- T possède B.S.$_2$ si, pour toute suite bornée (e_n) dans E_1, on peut trouver une sous-suite $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite de signes $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de telle façon que $\frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_k\, T(e'_k)$ converge dans E_2.
- T possède A.B.S. si de toute suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée dans E_1, on peut extraire une sous-suite $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\frac{1}{n}\sum_1^n (-1)^k\, T(e'_k)$ converge dans E_2.
- T possède B.S.R. si de toute suite (e_n) faiblement convergente vers 0 dans E_1, on peut extraire une sous-suite dont les images par T sont de Banach-Saks dans E_2.

Nous dirons enfin que T se factorise par un espace Y s'il existe deux opérateurs $\mathfrak{U}$, de E_1 dans Y, et V, de Y dans E_2, avec $V \circ \mathfrak{U} = T$.

Note but, dans ce paragraphe, sera d'établir les théorèmes qui suivent ; le premier a été publié par l'auteur dans [3].

Théorème 1 : Tout opérateur qui possède la propriété de Banach-Saks se factorise par un espace qui possède cette même propriété.

Théorème 2 : Pour un opérateur, les propriétés $B.S._2$ et A.B.S. sont équivalentes. Tout opérateur qui les possède se factorise par un espace qui les possède.

Pour B.S.R., l'énoncé est moins satisfaisant :

Théorème 3 : Toute injection, partant d'un espace de contenant pas ℓ^1, qui possède la propriété de Banach-Saks-Rosenthal, se factorise par un espace qui possède cette même propriété.

A quelques modifications de détail près, la démonstration suit celle donnée par l'auteur dans [3] ; l'espace construit pour la factorisation est un espace d'interpolation, construit par la méthode de Lions-Peetre [8]. Faisons quelques rappels sur cette construction.

Soient A_o et A_1 deux espaces de Banach ; on suppose qu'il existe une injection continue i de A_o dans A_1. Les espaces d'interpolation réels de Lions-Peetre sont définis par :

$$(A_o,A_1)_{\theta,p} = \{x\in A_1,\ \exists\ x(t) \text{ avec } \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = x, \quad \text{et}$$
$$\max(\|e^{\xi_o t}\, x(t)\|_{L^p(A_o)}, \|e^{\xi_1 t}\, x(t)\|_{L^p(A_1)}) < \infty\} ,$$

où ξ_o et ξ_1 sont des nombres réels avec $\xi_o < 0$, $\xi_1 > 0$; p est un réel avec $1 < p < \infty$. On pose $\theta = \dfrac{\xi_o}{\xi_o - \xi_1}$. La norme de $(A_o,A_1)_{\theta,p} = A$ est définie par :

$$① \qquad \|x\|_A = \inf\{\max(\|e^{\xi_o t}\, x(t)\|_{L^p(A_o)}, \|e^{\xi_1 t}\, x(t)\|_{L^p(A_1)}) \ ;$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = x\}$$

et on a la formule dite "d'interpolation" :

$$(2) \qquad \|x\|_A = \inf\{\|e^{\xi_o t}\, x(t)\|^{1-\theta}_{L^p(A_o)} \circ \|e^{\xi_1 t}\, x(t)\|^{\theta}_{L^p(A_1)} \; ; \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt = x\} \; .$$

Il résulte de cette formule qu'il existe une constante C telle que, $\forall\, x \in A_o$, on ait :

$$(3) \qquad \|x\|_A \leq C \; \|x\|^{1-\theta}_{A_o} \circ \|x\|^{\theta}_{A_1} \; .$$

Nous renvoyons à [4] pour une étude détaillée de ces espaces. Les espaces $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ sont intermédiaires entre A_o et A_1 ; il en résulte que si A_o désigne l'espace E_2 muni de la jauge de $T(\mathcal{B}_{E_1})$, et si on pose $A_1 = E_2$, l'opérateur T se factorise par $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ $(0 < \theta < 1,\ 1 < p < \infty)$. Ce seront ces espaces qui possèderont les propriétés énoncées aux théorèmes 1, 2 et 3. Nous allons établir :

<u>Proposition 1</u> : Si les espaces $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ possèdent la propriété $(\mathcal{P}_1)$, on peut trouver dans A_o une suite bornée (e_n) et un nombre $\delta' > 0$ tels que, pour tout k, tout choix de signes $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k = \pm 1$, toute suite croissante de k entiers $n_1 < \dots < n_k$, on ait :

$$\|\frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i \; e_{n_i}\|_{A_1} \geq \delta' \; .$$

(On identifie, dans la notation, un point de A_o et son image par l'injection de A_o dans A_1.)

Comme cette condition est alors automatiquement satisfaite dans A_o, nous traduirons la conclusion de la proposition en disant que A_o et A_1 possèdent $(\mathcal{P}_1)$ homothétique.

<u>Démonstration de la proposition 1</u> : Nous avons vu, au cours de l'exposé III, que si $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ possédait $(\mathcal{P}_1)$, on pouvait, pour tout $\eta > 0$, trouver une suite (e_n) avec :

$$(4) \quad \begin{cases} \forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_k = \pm 1,\ \forall\, n_1 < \dots < n_k \; : \\ \qquad 1 - \eta \leq \|\frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i \; e_{n_i}\|_A \leq 1 + \eta \; . \end{cases}$$

Soit $\eta > 0$, que nous choisirons par la suite. Choisissons, pour chaque n, en représentant $e_n(t)$ de e_n, avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e_n(t)\,dt = e_n \quad ;$$

$$\max(\|e^{\xi_o t}\, e_n(t)\|_{L^p(A_o)} \,,\; \|e^{\xi_1 t}\, e_n(t)\|_{L^p(A_1)}) \leq 1 + 2\eta \quad .$$

D'après (2) , on peut écrire :

$$1 - \eta \leq \|\frac{1}{k}\sum_1^k \varepsilon_i\, e_{n_i}\|_A \leq$$

$$\|e^{\xi_o t}\, \frac{1}{k}\sum_1^k \varepsilon_i\, e_{n_i}(t)\|^{1-\theta}_{L^p(A_o)} \circ \|e^{\xi_1 t}\, \frac{1}{k}\sum_1^k \varepsilon_i\, e_{n_i}(t)\|^{\theta}_{L^p(A_1)}$$

et donc :

$$(5) \quad \begin{cases} \|e^{\xi_o t}\, \frac{1}{k}\sum_1^k \varepsilon_i\, e_{n_i}(t)\|_{L^p(A_o)} \geq \left(\dfrac{1-\eta}{(1+2\eta)^{\theta}}\right)^{1/1-\theta} \\[2ex] \|e^{\xi_1 t}\, \frac{1}{k}\sum_1^k \varepsilon_i\, e_{n_i}(t)\|_{L^p(A_1)} \geq \left(\dfrac{1-\eta}{(1+2\eta)^{1-\theta}}\right)^{1/\theta} \end{cases} .$$

Posons $\eta' = 1 - \min\left(\left(\dfrac{1-\eta}{(1+2\eta)^{\theta}}\right)^{1/1-\theta}, \left(\dfrac{1-\eta}{(1+2\eta)^{1-\theta}}\right)^{1/\theta}\right)$; on aura donc les estimations (5) avec $1 - \eta'$ aux seconds membres. Choisissons η assez petit pour que

$$\eta' < (\tfrac{1}{20})^p \quad .$$

<u>Lemme 1</u> : Il existe un nombre $M > 0$ et un indice i tels que, $\forall\, i \geq i_o$, on ait à la fois

$$(6) \quad \begin{aligned} &(\int_{-M}^{+M} \|e^{\xi_o t}\, e_i(t)\|^p_{A_o}\, dt)^{1/p} \geq 1 - 2\eta' \\ &(\int_{-M}^{+M} \|e^{\xi_1 t}\, e_i(t)\|^p_{A_1}\, dt)^{1/p} \geq 1 - 2\eta' \quad . \end{aligned}$$

Ce lemme signifie évidemment que les fonctions $e_i(t)$ prennent presque toute leur masse sur un compact fixe, à la fois dans A_o et dans A_1 .

Démonstration du lemme 1 : Il suffit clairement de montrer séparément, pour A_o et A_1, l'existence de M et i_o. Montrons-la pour A_o. Si la conclusion (6) était en défaut, on pourrait trouver une suite de réels positifs M_k, strictement croissante et tendant vers l'infini, et une suite d'entiers i_k, strictement croissante, avec :

$$(7) \qquad \left(\int_{-M_k}^{M_k} \|e^{\xi_o t} e_{i_k}(t)\|_{A_o}^p \, dt\right)^{1/p} < 1 - 2\eta'$$

$$(8) \qquad \left(\int_{|t|>M_{k+1}} \|e^{\xi_o t} e_{i_k}(t)\|_{A_o}^p \, dt\right)^{1/p} < \eta'/2 \quad .$$

Notons $e'_{i_k}(t) = e_{i_k}(t)$ si $M_k \leq |t| < M_{k+1}$,

$= 0$ sinon ,

et $$e''_{i_k}(t) = e_{i_k}(t) - e'_{i_k}(t) \quad .$$

Les $e'_{i_k}(t)$ sont par construction à supports disjoints, et les e''_{i_k} satisfont :

$$\|e''_{i_k}(t)\, e^{\xi_o t}\|_{L^p(A_o)} < 1 - 2\eta' + \frac{\eta'}{2} = 1 - \frac{3\eta'}{2} \quad .$$

On en déduit que, pour tout n :

$$1 - \eta' \leq \left\| \frac{e^{\xi_o t}}{n} \sum_1^n e_{i_k}(t) \right\|_{L^p(A_o)}$$

$$\leq e^{\xi_o t} \frac{1}{n} \sum_1^n e'_{i_k}(t)\|_{L^p(A_o)} + \|e^{\xi_o t} \frac{1}{n} \sum_1^n e''_{i_k}(t)\|_{L^p(A_o)}$$

$$\leq \frac{1}{n^{1-\frac{1}{p}}} (1 + 2\eta) + 1 - \frac{3\eta'}{2}$$

et il est impossible que ceci se produise lorsque n est assez grand ; cette contradiction prouve le lemme.

On élimine les i_o premiers termes de la suite (e_i) et on renumérote : on aura donc la conclusion du lemme avec $i_o = 1$.

Posons $f_k(t) = e_k(t)$ si $|t| \leq M$,

$= 0$ sinon ,

et $$g_k(t) = e_k(t) - f_k(t) \quad .$$

Posons enfin :

$$f_k = \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(t)\, dt \quad , \quad g_k = \int_{-\infty}^{+\infty} g_k(t)\, dt \quad .$$

<u>Lemme 2</u> : Les points $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont dans A_o, et leur norme est bornée dans A_o.

<u>Démonstration du lemme 2</u> : Il suffit bien sûr de calculer $\|\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(t)\, dt\|_{A_o}$. On a :

$$\|f_k\|_{A_o} = \|\int_{-M}^{M} e_k(t)\, dt\|_{A_o} \leq \int_{-M}^{M} e^{-\xi_o t} \|e^{\xi_o t} e_k(t)\|_{A_o} dt$$

$$\leq (\int_{-M}^{M} e^{-\xi_o q t} dt)^{1/q} . (\int_{-M}^{M} \|e^{\xi_o t} e_k(t)\|_{A_o}^p dt)^{1/p}$$

$$\leq (1 + 2\eta)(\int_{-M}^{M} e^{-\xi_o q t} dt)^{1/q} \qquad (\text{on a noté } q = \frac{p}{p-1})$$

et ceci prouve le lemme.

Nous allons maintenant calculer la norme, dans A, de la différence $e_k - f_k$.

<u>Lemme 3</u> : On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|e_k - f_k\|_A \leq 8(\eta')^{1/p} \quad .$$

<u>Démonstration du lemme 3</u> : Le point $e_k - f_k$, dans A, admet $g_k(t)$ pour représentant, et donc :

$$\|e_k - f_k\|_A \leq \max(\|e^{\xi_o t} g_k(t)\|_{L^p(A_o)} , \|e^{\xi_1 t} g_k(t)\|_{L^p(A_1)}) \quad .$$

Mais

$$\|e^{\xi_o t} g_k(t)\|_{L^p(A_o)} = (\int_{|t|>M} \|e^{\xi_o t} e_k(t)\|_{A_o}^p dt)^{1/p}$$

$$= [\int_{-\infty}^{+\infty} \|e^{\xi_o t} e_k(t)\|_{A_o}^p \, dt - \int_{|t|\le M} \|e^{\xi_o t} e_k(t)\|_{A_o}^t \, dt]^{1/p}$$

$$\le [(1+2\eta)^p - (1-2\eta')^p]^{1/p}$$

$$\le [(1+2\eta')^p - (1-2\eta')^p]^{1/p} \le [p2^{p-1}(4\eta')]^{1/p} \le 8(\eta')^{1/p} \quad .$$

Et de même :

$$\|e^{\xi_1 t} g_k(t)\|_{L^p(A_1)} \le 8(\eta')^{1/p} \quad ,$$

d'où :

$$\|e_k - f_k\|_A \le 8(\eta')^{1/p} \quad .$$

Nous allons en déduire que, dans A, les f_k satisfont aux estimations voulues. Soient $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_k$ des choix de signes, $n_1 < \dots < n_k$ des entiers. On a :

$$\|\frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i f_{n_i}\|_A \ge \|\frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i e_{n_i}\|_A - \frac{1}{k} \sum_1^k \|e_{n_i} - f_{n_i}\|_A$$

$$\ge 1 - \eta - (8\eta')^{1/p} \ge 1/2 \quad ,$$

d'après le choix qui a été fait de η, puis de η'.
Puisque les points f_k sont dans A_o, la formule 3 et le lemme 2 permettent d'écrire :

$$\frac{1}{2} \le \|\frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i f_{n_i}\|_A \le C\|\frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i f_{n_i}\|_{A_o}^{1-\theta} \cdot \|\frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i f_{n_i}\|_{A_1}^{\theta}$$

et comme $\|f_i\|_{A_o} \le C_1$, on obtient pour un certain $\delta' > 0$, $\|\frac{1}{k} \sum_1^k \varepsilon_i f_{n_i}\|_{A_1} \ge \delta'$, ce qui démontre la proposition.

Nous allons déduire de la proposition 1 la démonstration des trois théorèmes mentionnés :

<u>Démonstration du théorème 1</u> : Supposons que T, de E_1 dans E_2, soit de Banach-Saks ; on vérifie immédiatement qu'il en est de même de i, de A_o dans A_1. L'injection i est alors faiblement compacte, et $(A_o, A_1)_{\theta,p}$ est réflexif d'après [1]. Par ailleurs, A_o et A_1 ne peuvent pas posséder $(\mathcal{P}_1)$ homothétique : la suite (e_n) qui donne $(\mathcal{P}_1)$ dans A_o et A_1 est une

suite bornée dont on ne peut extraire aucune sous-suite de Banach-Saks. D'après la proposition, $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ ne possède pas non plus $(\mathcal{P}_1)$. Donc (A_o,A_1) possède la propriété de Banach-Saks, d'après l'exposé III.

Démonstration du théorème 2 : Supposons que T ait B.S.$_2$: il en est de même de i, et A_o et A_1 ne peuvent avoir $(\mathcal{P}_1)$ homothétique. Il résulte de la proposition 1 que $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ n'a pas $(\mathcal{P}_1)$, donc a A.B.S. De ce fait, l'opérateur T, qui se factorise par $(A_o,A_1)_{\theta,p}$, a aussi A.B.S.

Démonstration du théorème 3 : Si $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ ne possède pas B.S.R., il possède $(\mathcal{P}_1)$, et donc A_o et A_1 ont $(\mathcal{P}_1)$ homothétique, d'après la proposition 1. Soit (e_n) la suite de points réalisant $(\mathcal{P}_1)$ dans A_o et A_1. Puisque A_o ne contient pas ℓ^1, il existe une sous-suite des (e_n) qui est de Cauchy faible, d'après H.P. Rosenthal [10]. En prenant les différences consécutives sur cette sous-suite, $e'_{2n+1} - e'_{2n}$, on obtient une suite tendant faiblement vers 0 dans A_o, dont les images dans A_1 possèdent encore la propriété $(\mathcal{P}_1)$, ce qui contredit le fait que l'injection i, de A_o dans A_1, soit de Banach-Saks-Rosenthal.

Nous avons supposé, dans l'énoncé du théorème 3, que T était une injection, car il n'est pas clair que i possède la propriété B.S.R. si T la possède.

Nous allons maintenant étudier la factorisation de certaines d'opérateurs.

§ III. FACTORISATION DES OPERATEURS UNIFORMEMENT CONVEXIFIANTS ET DE TYPE RADEMACHER.

Nous renvoyons à [1] pour l'étude des opérateurs uniformément convexifiants. Rappelons simplement que T, de E_1 dans E_2, n'est pas uniformément convexifiant si, pour un certain $\varepsilon > 0$, on peut, pour tout n, trouver 2^n points dans la boule unité de E_1 dont les images par T forment une (n,ε) branche dans E_2. Il est clair que les opérateurs uniformément convexifiants sont faiblement compacts, et il a été démontré par l'auteur [ ] qu'ils ne se factorisent pas nécessairement par un espace super-réflexif. On peut donc se demander s'il est possible d'obtenir pour eux un certain résultat de factorisation. De même, on dit que l'opérateur $T : E_1 \to E_2$ est de type Rademacher si l'on ne peut pas trouver, uniformément dans E_1 et E_2, de $\ell^1_{(n)}$ liés par T. (Ces opérateurs ont été introduits et étudiés par l'auteur dans [2].) Cela se produit si et seulement si la suite de nombres réels

$$a_n(T) = \sup_{\substack{x_1 \dots x_n \in E_1 \\ \|x_i\|_{E_1} \leq 1}} \int \left\| \sum_1^n \varepsilon_i(t)\ T(x_i) \right\|_{E_2} dt$$

tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

On sait qu'un opérateur de type Rademacher ne se factorise pas nécessairement par un espace B-convexe [2]. Là encore, on peut donc se demander quelle type de factorisation on peut obtenir pour cette classe d'opérateurs. Le théorème qui suit donne une réponse à cette question.

<u>Théorème 1</u> : Tout opérateur de type Rademacher possède la propriété A.B.S., et se factorise donc par un espace qui possède cette propriété.

<u>Démonstration</u> : On peut se ramener au cas de l'injection i, de A_o dans A_1. Si $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ ne possédait pas A.B.S., A_o et A_1 auraient $(\mathcal{P}_1)$ homothétique : il est facile de voir, en prenant dans la définition de $a_n(T)$ les n premiers points qui donnent $(\mathcal{P}_1)$, que $a_n(T)$ ne peut tendre vers 0 : T n'est pas de type Rademacher.

<u>Théorème 2</u> : Tout opérateur faiblement compact de type Rademacher est de Banach-Saks, et se factorise donc par un espace ayant cette propriété.

<u>Démonstration</u> : L'espace $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ ne possède pas $(\mathcal{P}_1)$ et il est réflexif : il a donc la propriété de Banach-Saks.

<u>Théorème 3</u> : Tout opérateur uniformément convexifiant est de Banach-Saks, et se factorise donc par un espace ayant cette propriété.

<u>Démonstration</u> : Un opérateur uniformément convexifiant est faiblement compact [1] et de type Rademacher [2] (on peut aussi remarquer directement que si une suite (e_n) possède la propriété $(\mathcal{P}_1)$, ses 2^n premiers points forment une $(n,2\delta)$ branche