Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

B. Beauzamy

# Propriété de Banach-Saks et modèles étalés

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1977-1978), exp. n° 3, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1977-1978____A2_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   S U R   L A   G E O M E T R I E

D E S   E S P A C E S   D E   B A N A C H

1977-1978

# PROPRIETE DE BANACH-SAKS ET MODELES ETALÉS

B. BEAUZAMY

Exposé No III

4 Novembre 1977

Soit $(x_n)$ une suite bornée de points dans un espace de Banach E. On dit qu'elle est de Banach-Saks si les sommes de Césaro $\frac{1}{n}\sum_1^n x_k$ convergent dans E. Par exemple, dans $\ell^p$ $(1<p<\infty)$, la base canonique forme une suite de Banach-Saks : les sommes de Césaro convergent vers 0. Par contre, pour la base canonique $(e_n)$ de $\ell^1$, on a, pour tout n :

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_1^n e_k - \frac{1}{2n}\sum_1^{2n} e_k\right\|_{\ell^1} = \left\|\frac{1}{2n}\left(\sum_1^n e_k - \sum_{n+1}^{2n} e_k\right)\right\|_{\ell^1} = 1 \quad ,$$

et la suite $(e_n)$ n'est pas de Banach-Saks, non plus qu'aucune de ses sous-suites.

Une suite donnée $(x_n)$ peut être de Banach-Saks sans que toutes ses sous-suites le soient : on peut en effet facilement imposer des conditions, par exemple sur les $(x_{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$, telles que cette sous-suite ne soit pas de Banach-Saks, sans altérer le comportement des sommes de Césaro de la suite tout entière. Néanmoins, pour chaque suite bornée $(x_n)$, il y a une sous-suite qui a le même comportement que toutes ses sous-suites. C'est ce qu'établit la proposition ci-dessous, due à P. Erdös et M. Magidor [6] :

<u>Proposition 1</u> : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans un espace de Banach E. Il existe une sous-suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui possède l'une ou l'autre des deux propriétés suivantes :

a) toute sous-suite de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Banach-Saks ;

b) aucune sous-suite de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est de Banach-Saks.

<u>Démonstration</u> : Notons $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites infinies strictement croissantes d'entiers, identifié à un sous-ensemble de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit, et considérons :

$$A = \{p\in\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}) \ , \ \frac{1}{n}\sum_1^n x_{k_i} \text{ converge, } (k_i)=p\} \ .$$

Notons $B = \complement A$. Nous allons voir que A est un borélien :

<u>Lemme</u> : A est un borélien de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$.

Démonstration : On pose

$$A_{\varepsilon,m,n} = \{p \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}) \text{ tels que } \|\frac{1}{n}\sum_1^n e_{k_j} - \frac{1}{m}\sum_1^m e_{k_j}\| < \varepsilon, \text{ si } p = (k_j)\}$$

$A_{\varepsilon,m,n}$ est ouvert : si $p \in A_{\varepsilon,m,n}$ et si p' coïncide avec p jusqu'à $k_m$, $p' \in A_{\varepsilon,m,n}$. Or l'ensemble des p' qui coïncident avec p jusqu'à un rang donné est un ouvert de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ pour la topologie choisie. Il suffit donc pour montrer que A est un borélien de remarquer que

$$A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{m,n\geq N} A_{\frac{1}{k},m,n} .$$

D'après le théorème de Galvin-Prikry [7] (ou théorème de "Ramsey infini"), on peut trouver $p_o \in P_\infty(\mathbb{N})$ tel que l'on ait :

- ou bien $\forall\, p \subset p_o$, $p \in A$,
- ou bien $\forall\, p \subset p_o$, $p \in B$.

La sous-suite $(x_k)_{k\in p_o}$ satisfait donc à la conclusion de la proposition.

Soit E un espace de Banach. On dira qu'il possède la propriété de Banach-Saks si de toute suite bornée on peut extraire une suite de Banach-Saks.

S. Kakutani a démontré dans [9] que tout espace uniformément convexe avait cette propriété ; c'est donc le cas pour tout espace super-réflexif, car il est clair qu'elle se conserve si on remplace la norme par une norme équivalente. Sans utiliser le résultat de Kakutani, nous obtiendrons cette propriété des espaces super-réflexifs comme corollaire des théorèmes de la suite de cet exposé.

La propriété de Banach-Saks est elle-même plus forte que la réflexivité : un résultat de R.C. James [8] (exposé par l'auteur dans [2]) dit que, si E n'est pas réflexif, on peut trouver un nombre $\theta$ avec $0 < \theta < 1$ et une suite bornée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E, avec, pour tout $k \geq 1$ :

$$\operatorname{dist}(\operatorname{conv}(e_1,\ldots,e_k), \operatorname{conv}(e_{k+1},\ldots)) > \theta .$$

Il en résulte clairement que $\forall\, k_1,\ldots,k_{2n}$ suite d'entiers :

$$\|\frac{1}{n}\sum_i^n e_{k_i} - \frac{1}{2n}\sum_i^{2n} e_{k_i}\| = \|\frac{1}{2n}(\sum_i^n e_{k_i} - \sum_{n+1}^{2n} e_{k_i})\| \geq \frac{\theta}{2}$$

et aucune sous-suite de la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être de Banach-Saks.

Mais inversement la réflexivité n'implique pas la propriété de Banach-Saks (en abrégé P.B.S.) : A. Baernstein a construit dans [1] un exemple d'espace réflexif qui ne possède pas P.B.S. De même, P.B.S. n'implique pas la super-réflexivité : nous verrons que tout espace réflexif qui ne contient pas $\ell^1_n$ uniformément a P.B.S., et un tel espace peut n'être pas super-réflexif. Mais même cette condition n'est pas nécessaire : nous verrons que l'espace d'interpolation $(L^{\varphi}([0,1],dt),L^1([0,1],dt))_{\frac{1}{2},2}$ (où $\varphi$ est la fonction d'Orlicz $\varphi(t) = t(1 + \mathrm{Log}(1+t))$ possède la propriété de Banach-Saks, bien qu'il ne soit de type p-Rademacher pour aucun $p > 1$ (voir [3]).

La propriété de Banach-Saks est donc strictement intermédiaire entre la réflexivité et la super-réflexivité. Notre but dans cet exposé est l'étude de cette propriété ; l'outil que nous emploierons à cette fin est le procédé de Brunel-Sucheston, exposé par A. Brunel dans [4], qui permet d'obtenir des "modèles étalés".

Le théorème principal (th. 1 ) que nous obtiendrons a initialement été démontré par H.P. Rosenthal [11] par des méthodes complètement différentes ; l'idée d'utiliser le procédé de Brunel-Sucheston pour l'étude de ces questions est due à L. Tzafriri. Commençons par quelques rappels sur ce procédé :

<u>Proposition 2</u> (extraction de "bonnes sous-suites", selon Brunel-Sucheston [5]) : Soit $(x_n)$ une suite bornée dans un espace de Banach. On peut trouver une sous-suite $(e_n)$ de la suite $(x_n)$ (appelée "bonne sous-suite") et une application L, définie sur l'ensemble des suites réelles à support fini (noté S), à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telles que

$$\forall\, a \in S,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \nu \in \mathbb{N}\ ,\ \nu < n_1 < n_2 < \dots,\quad \Big| \big\| \sum_i a_i e_{n_i} \big\| - L(a) \Big| \leq \varepsilon\ .$$

Pour la démonstration, on utilise le théorème combinatoire de Ramsey :

<u>Théorème de Ramsey</u> : Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des k-uples $\bar{n} = (n_1,n_2,\dots,n_k)$ d'entiers distincts. Si $\mathcal{K} = \mathcal{K}' \cup \mathcal{K}''$ est une partition de $\mathcal{K}$, on peut trouver une partie infinie de $\mathbb{N}$, I, telle que tous les $\bar{n}$ dont les composantes sont dans I appartiennent au même sous-ensemble $\mathcal{K}'$ ou $\mathcal{K}''$.

La démonstration complète de la proposition 1 peut être trouvée dans [5] ; donnons-en un résumé.

Soit $\Psi : \mathcal{K} \to \mathbb{R}_+$, définie par $\Psi(\bar{n}) = \|\sum a_i x_{n_i}\|$, pour $a = (a_i)$ fixé dans S. $\Psi$ est bornée. Posons

$$\mathcal{K}' = \{\bar{n}\ ,\ 0 \leq \Psi(\bar{n}) \leq \frac{\alpha}{2}\} \quad , \quad \mathcal{K}'' = \{\bar{n},\ \frac{\alpha}{2} < \Psi(\bar{n}) \leq \alpha\} \quad .$$

On peut alors trouver une suite croissante d'entiers $(i_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que par exemple $0 \leq \Psi(\bar{n}) \leq \alpha/2$ si les composantes de $\bar{n}$ sont dans la suite $(i_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$. On itère l'argument en partageant en deux l'intervalle $[0,\frac{\alpha}{2}]$.... La suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour la suite diagonale $(i_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède la propriété voulue pour a fixé dans S. On considère ensuite les $a \in S$ à coordonnées rationnelles, on les ordonne, et on utilise à nouveau une méthode diagonale. La démonstration s'achève par un argument de continuité.

Pour cette "bonne sous-suite", on a donc :

$$L(a) = \lim_{\substack{n_k\to\infty \\ \vdots \\ n_1\to\infty}} \|a_1 e_{n_1} + \dots + a_k e_{n_k}\| \qquad \text{si } a = (a_1 \dots a_k) \quad .$$

Le lemme suivant se trouve également dans [5] :

<u>Lemme 1</u> : Si la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, L est une norme. Supposons en effet $L(a) = 0$ et soit $\varepsilon > 0$. Si $a = (a_1,\dots,a_k)$, et si $\nu$ est assez grand, on a lorsque $\nu < n < p < n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1}$

$$\begin{cases} \|a_1 e_n + a_2 e_{n_1} + \dots + a_k e_{n_{k-1}}\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2|a_1|} \\[2ex] \|a_1 e_p + a_2 e_{n_1} + \dots + a_k e_{n_{k-1}}\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2|a_1|} \end{cases}$$

et donc $\|y_n - y_p\| \leq \varepsilon$.

Il est commode de considérer L comme une norme sur l'espace vectoriel engendré par les $(x_n)$ ; on posera donc :

$$|a_1 e_1 + \dots + a_k e_k| = L(a) \quad , \quad \text{si } a = (a_1,\dots,a_k) \quad .$$

Cette norme est bien sûr invariante par étalement, en ce sens que :
$\forall\ n_1 < n_2 < \dots < n_k$,

$$|a_1 e_1 + \dots + a_k e_k| = |a_1 e_{n_1} + \dots + a_k e_{n_k}| \quad .$$

On notera F le complété de l'espace normé ainsi construit sur les $(e_n)$ avec la norme $|.|$, et on dira qu'il s'agit du modèle étalé de l'espace E construit sur la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (en anglais "spreading model"). Une question très intéressante (et mal connue) est de savoir décrire sur F des propriétés de E ou de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et inversement. Le lemme suivant, qui sera utile, donne un exemple de cette situation :

<u>Lemme 2</u> : Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0 dans E, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base inconditionnelle de F.

<u>Démonstration</u> : Nous allons montrer que si P est la projection sur un nombre fini quelconque de coordonnées, on a :

$$|P(\Sigma\, a_i\, e_i)| \leq |\Sigma\, a_i\, e_i| \quad .$$

Montrons par exemple que

$$|a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3| \geq |a_1 e_1 + a_3 e_3| \quad .$$

Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver un entier $\nu$ tel que, si $\nu < m < n_2 < n_3$, on a :

$$\begin{cases} \big|\, |a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3| - \|a_1 e_{n_1} + a_2 e_{n_2} + a_3 e_{n_3}\| \,\big| < \varepsilon \\ \big|\, |a_1 e_1 + a_3 e_3| - \|a_2 e_{n_1} + a_3 e_{n_3}\| \,\big| < \varepsilon \quad . \end{cases}$$

Puisque $(e_n) \to 0$ faiblement dans E, on peut trouver une combinaison linéaire finie des $e_n$, à coefficients positifs rationnels, $\frac{p_1}{N}, \dots, \frac{p_k}{N}$, avec :

$$\left\|\frac{1}{N}\,(p_1 e_{n_1+1} + p_2 e_{n_1+2} + \dots + p_k e_{n_1+k})\right\| < \frac{\varepsilon}{|a_2|}$$

et $p_1 + \dots + p_k = N$.

On peut écrire :

$$|a_1 e_2 + a_2 e_2 + a_3 e_3| \geq \|a_1 e_{n_1} + a_2 e_{n_1+1} + a_3 e_{n_1+N+3}\| - \varepsilon$$

et aussi

$$\geq \|a_1 e_{n_1} + a_2 e_{n_1+2} + a_3 e_{n_1+N+3}\| - \varepsilon$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\geq \|a_1 e_{n_1} + a_2 e_{n_1+k} + a_3 e_{n_1+N+3}\| - \varepsilon \quad .$$

On répète $p_1$ fois la première inégalité, $p_2$ fois la seconde, ..., $p_k$ fois la dernière, et on somme. On obtient, après division par N :

$$|a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3| \geq \left\|a_1 e_{n_1} + a_2 \left(\frac{p_1 e_{n_1+1} + \dots + p_k e_{n_1+k}}{N}\right) + a_3 e_{n_1+N+3}\right\| - \varepsilon$$

$$\geq \|a_1 e_{n_1} + a_3 e_{n_1+N+3}\| - 2\varepsilon$$

$$\geq |a_1 e_1 + a_3 e_3| - 3\varepsilon \quad .$$

Ce qui établit le lemme.

Il a été démontré par Brunel-Sucheston [5] que l'espace F ainsi construit était finiment représentable dans E. De plus, cet espace permet de caractériser le fait que la suite $(x_n)$ ait toutes ses sous-suites de Banach-Saks : cela se produit dès que $\frac{1}{n} \sum_1^n e_k$ converge dans F [5].

Nous allons maintenant déterminer l'espace F lorsque la suite $(x_n)$ de départ n'est pas de Banach-Saks, non plus qu'aucune de ses sous-suites. On sait alors que la suite $\frac{1}{n} \sum_1^n e_k$ ne peut converger dans F.

<u>Lemme 3</u> : Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne possède dans E aucune sous-suite de Banach-Saks, on peut trouver un nombre $\delta > 0$ tel que, $\forall$ n,

$$\left|\frac{1}{n} \sum_1^n e_k\right| \geq \delta \quad .$$

<u>Démonstration du lemme 3</u> : Puisque $\frac{1}{n}\sum_1^n e_k$ ne converge pas dans F, il existe un nombre $\delta_1 > 0$ et une suite $(n_j)$ d'entiers, strictement croissante, tels que

$$\left|\frac{1}{n_j}\sum_1^{n_j} e_k\right| > \delta_1 \quad , \quad \forall j \quad .$$

On va montrer que ceci implique, $\forall$ n, $\left|\frac{1}{n}\sum_1^n e_k\right| > \frac{\delta_1}{2} = \delta$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Choisissons j assez grand pour que $\frac{n}{n_j} < \frac{\delta_1}{2}$ .
La division euclidienne de $N = n_j$ par n donne :

$$N = nk + r, \; r < n \quad .$$

On a :

$$\delta_1 \le \frac{1}{N}\left|e_1 + \ldots + e_N\right| \le \frac{1}{N}\left|e_1 + \ldots + e_{nk}\right| + \frac{1}{N}\left|e_{nk+1} + \ldots + e_{nk+r}\right|$$

$$\le \frac{1}{N}\left|e_1 + \ldots + e_{nk}\right| + \frac{r}{N} \le \frac{1}{N}\left|e_1 + \ldots + e_{nk}\right| + \frac{n}{N}$$

et donc

$$\frac{1}{N}\left|e_1 + \ldots + e_{nk}\right| \ge \frac{\delta_1}{2}$$

d'où

$$\frac{1}{nk}\left|e_1 + \ldots + e_{nk}\right| \ge \frac{1}{N}\left|e_1 + \ldots + e_{nk}\right| \ge \frac{\delta_1}{2} = \delta \quad .$$

Mais comme :

$$\left|e_1 + \ldots + e_n\right| = \left|e_{n+1} + \ldots + e_{2n}\right| = \ldots = \left|e_{n(k-1)+1} + \ldots + e_{nk}\right|$$

le lemme en résulte. (Dans le calcul, nous avons supposé pour simplifier $\|e_n\| \le 1 \;\; \forall n$.)

Nous sommes maintenant en mesure de caractériser l'espace F construit sur une suite bornée, faiblement convergente vers 0, dont aucune sous-suite n'est de Banach-Saks :

<u>Proposition 3</u> : Si la suite $x_n$ , bornée et faiblement convergente vers 0 n'a aucune sous-suite de Banach-Saks, la base $(e_n)$ du modèle étalé F

est équivalente à la base canonique de $\ell^1$.

<u>Démonstration</u> : D'après le lemme 2, la suite $(e_n)$ est une base inconditionnelle de F ; il résulte alors du lemme 3 que l'on peut trouver un nombre $\delta' > 0$ tel que $\forall\, n$, $\forall\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n = \pm 1$, on ait

$$\left|\frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_k\, e_k\right| \geq \delta' \quad .$$

Nous allons voir que l'on peut en déduire, pour toute suite finie de scalaires $(c_i)$ :

$$\left|\Sigma\, c_i\, e_i\right| \geq \delta' \,\Sigma\, |c_i| \quad .$$

Il suffit de le faire pour des $c_i$ rationnels, et donc pour des $c_i$ entiers. Soient donc $p_1,\ldots,p_k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k = \pm 1$; on a :

$$\begin{aligned}|\varepsilon_1 p_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_k p_k e_k| &\geq |\varepsilon_1(e_1 + \ldots + e_{p_1}) + \varepsilon_2(e_{p_1+1} + \ldots + e_{p_1+p_2}) + \ldots \\ &\quad + \varepsilon_k(e_{p_1+\cdots+p_{k-1}+1} + \ldots + e_{p_1+\cdots+p_k})| \\ &\geq \delta'(p_1 + p_2 + \ldots + p_k) \quad ,\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Considérons maintenant la propriété suivante d'une suite bornée $(x_n)$ dans E, analogue à "non-Banach-Saks" :

$(\mathcal{P}_1)$ On peut trouver un nombre $\delta > 0$ tel que, pour toute sous-suite $(y_n)$ de $(x_n)$, pour tout n, tout choix de $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n = \pm 1$, on ait

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_i\, y_i\right\| > \delta \quad .$$

Il est clair que la suite $(e_n)$, dans F, possède la même propriété : on a, pour tout n et tout choix de $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n = \pm 1$,

$$\left|\frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_i\, e_i\right| > \delta \quad .$$

Une démonstration analogue à celle du théorème précédent montre alors que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la base canonique de $\ell^1$. Nous avons donc obtenu :

**Proposition 4** : Si la suite bornée $(x_n)$ possède la propriété $(\mathcal{P}_1)$, la base $(e_n)$ de modèle étalé F est équivalente à la base canonique de $\ell^1$.

Nous allons maintenant étudier les réciproques : comment caractériser sur la suite de départ $(x_n)$ le fait que $(e_n)$ soit équivalente à la base canonique de $\ell^1$ dans F ? Il est clair que la caractérisation ne peut porter sur la suite $(x_n)$ tout entière, mais, au mieux, sur la bonne sous-suite $(e_n)$ dans E, ou, plus vraisemblablement, sur une sous-suite de celle-ci. En outre, comme nous chercherons à améliorer certaines estimations, nous serons conduits à prendre des blocs de la suite $(e_n)$ :

**Proposition 5** : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans E , $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une bonne sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ , F le modèle étalé construit sur $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente, dans F, à la base canonique de $\ell^1$, on peut trouver, pour tout nombre $\eta>0$, une sous-suite $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'une suite de blocs sur la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ , telle que :

$$(\mathcal{P}_2)\quad\left\{\begin{array}{l}\forall\ k,\ \text{si } k\le n_1<n_2<\dots<n_{2^k}\ \text{, on a, pour toute suite de scalaires}\\ c_1,\dots,c_{2^k}\ :\\ \qquad(1-\eta)\displaystyle\sum_1^{2^k}|c_i|\le\Big\|\sum_1^{2^k}c_i\,e'_{n_i}\Big\|\le(1+\eta)\sum_1^{2^k}|c_i|\ .\end{array}\right.$$

**Démonstration** : Par hypothèse, les $(e_n)$ vérifient :

$$m\,\Sigma\,|c_i|\le|\Sigma\,c_i\,e_i|\le M\,\Sigma\,|c_i|\ .$$

Nous allons commencer par améliorer ces estimations, au moyen d'un procédé dû à R.C. James. C'est ici particulièrement facile, car la norme de F est invariante par étalement sur la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Posons $K=\inf\{|\Sigma\,\alpha_i\,e_i|\ ,\ \Sigma\,|\alpha_i|=1\}$. On a $K\ge m$. Soit $\eta>0$, et choisissons $f_1=\sum_{i=1}^{n_o}\alpha_i^o\,e_i$ , combinaison linéaire finie des $e_i$, avec $\sum_1^{n_o}|\alpha_i^o|=1$, et $K\le|f_1|\le K(1+\frac{\eta}{4})$. Puisque la norme est invariante par étalement, on a aussi :

$$K=\inf\{|\sum_{i>n_o}\alpha_i\,e_i|\ ,\ \Sigma\,|\alpha_i|=1\}$$

et ainsi de suite : $f_k = \sum_{i=0}^{n_o} \alpha_i^o \, e_{(k-1)n_o+i}$ vérifie

$$K \leq |f_k| \leq K(1+\frac{\eta}{4}) \quad .$$

Si $(c_i)$ est une suite finie de scalaires avec $\sum |c_i| = 1$, on aura

$$K \leq |\sum c_i \, f_i| \leq K(1+\frac{\eta}{4}) \quad .$$

Notons $f'_i = \frac{f_i}{K}$ ; on aura, pour toute suite finie de scalaires $(c_i)$ :

$$\sum |c_i| \leq |\sum c_i \, f'_i| \leq (1+\frac{\eta}{4}) \sum |c_i| \quad .$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Choisissons un $\frac{\eta}{8}$-net dans la sphère unité de $\ell^1_{(2^k)}$, c'est-à-dire une suite finie $(c_1^{(\ell)},\ldots,c_{2^k}^{(\ell)})_{\ell=1\ldots L}$ de $2^k$-uples scalaires, avec $\sum_{i=1}^{2^k} |c_i^{(\ell)}| = 1 \;\forall \ell$, telle que tout élément de la sphère unité de $\ell^1_{(2^k)}$ se trouve à distance au plus égale à $\frac{\eta}{8}$ de l'un des $(c_i^{(\ell)})_{\ell=1\ldots L}$.

On peut trouver un entier $\nu_k$ tel que si

$$\nu_k \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_{2^k} \quad ,$$

on ait, pour $\ell = 1,\ldots,L$ :

$$\left| \left\| \sum_{i=1}^{2^k} c_i^{(\ell)} \, f'_{n_i} \right\| - \left| \sum_{i=1}^{2^k} c_i^{(\ell)} \, f'_i \right| \right| < \frac{\eta}{8}$$

(car la somme $\sum_{i=1}^{2^k} c_i^{(\ell)} \, f'_{n_i}$ "commence" à $(n_1-1)n_o + 1 \geq \nu_k$) et donc :

$$1 - \frac{\eta}{8} \leq \left\| \sum_{i=1}^{2^k} c_i^{(\ell)} \, f'_{n_i} \right\| \leq 1 + \frac{3\eta}{8} \quad .$$

D'où l'on déduit, pour toute suite finie de scalaires $(c_i)_{i=1\ldots 2^k}$ avec $\sum_1^{2^k} |c_i| = 1$

$$1 - \frac{3\eta}{8} \leq \left\| \sum_{i=1}^{2^k} c_i \, f'_{n_i} \right\| \leq 1 + \frac{5\eta}{8} \quad .$$

Il suffit donc de choisir la suite $e'_k = f'_{\nu_k}$ pour établir le théorème : on aura, pour tout k, pour toute suite $c_1 \dots c_2$ de scalaires, pour tous $n_1 \dots n_{2^k}$ avec $k \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{2^k}$ :

$$(1 - \frac{3\eta}{8}) \sum_i^{2^k} |c_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{2^k} c_i \, e'_{n_i} \right\| \leq (1 + \frac{5\eta}{8}) \sum_i^{2^k} |c_i| \quad .$$

Remarque : Si on ne souhaite pas améliorer les estimations pour obtenir des $\ell^1_{(2^k)}$ presque isométriques, il n'est pas nécessaire de prendre des blocs des $(e_n)$ : on obtient le résultat, pour un certain $\delta > 0$ (au lieu de $1 - \eta$), sur une sous-suite de la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ : c'est le résultat démontré par H.P. Rosenthal dans [11].

Nous allons maintenant étudier la réciproque du théorème 3 :

Proposition 6 : Soit $x_n$ une suite bornée de points dans E. Si la bonne sous-suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la base canonique de $\ell^1$ dans F, on peut, pour tout $\eta > 0$, trouver une suite de blocs sur la suite $(e_n)$, notée $(e'_n)$, avec, pour tout n, $\|e'_n\| \leq 1 + \eta$, possédant la propriété $(\mathcal{P}_1)$ avec $\delta$ remplacé par $1 - \eta$.

Démonstration : Les $f'_i$ sont ceux construits précédemment. Ils vérifient donc

$$\sum |c_i| \leq |\sum c_i \, f'_i| \leq (1 + \frac{\eta}{4}) \sum |c_i| \quad .$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Choisissons l'entier $\nu_k$ de telle façon que si $\nu_k \leq n_1 < \dots < n_k$, on ait, si $\varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_k$ valent -1, 0 ou +1 (non tous nuls),

$$\left| \left\| \sum_1^k \varepsilon'_i \, f'_{n_i} \right\| - \left| \sum_1^k \varepsilon'_i \, f'_i \right| \right| \leq \frac{\eta}{8} \sum_1^k |\varepsilon'_i| \quad .$$

On aura donc :

$$\left\| \sum_1^k \varepsilon'_i \, f'_{n_i} \right\| \geq (1 - \frac{\eta}{8}) \sum_1^k |\varepsilon'_i| \quad .$$

Pour simplifier les notations, nous prendrons $\eta$ sous la forme $\eta = \frac{1}{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{N}$. La sous-suite cherchée des $f'_i$ sera

$$e'_n = f'_{\nu_{2^{2\alpha n}}} \quad .$$

Considérons en effet une somme $\frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_j e'_j$, avec $\varepsilon_j = \pm 1$. On a, en posant $n' = [\frac{1}{2\alpha}\log_2(n)]$,

$$\sum_1^n \varepsilon_j e'_j = \sum_1^{n'} \varepsilon_j e'_j + \sum_{n'+1}^{n} \varepsilon_j e'_j \quad .$$

La seconde somme contient moins de n termes, qui sont placés après l'entier $\nu_{2^{2\alpha(n')}} \geq \nu_n$ et donc :

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{n'+1}^{n} \varepsilon_j e'_j\right\| \geq (1-\frac{\eta}{8})\frac{n-n'}{n}$$

$$\geq (1-\frac{\eta}{8})\frac{n-\frac{1}{2\alpha}\log_2(n)}{n} \quad .$$

Pour la première, on a la majoration

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_1^{n'} \varepsilon_j e'_j\right\| \leq \frac{1}{n}n'$$

$$\leq \frac{1}{2\alpha n}\log_2(n) \quad .$$

Finalement

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_1^{n} \varepsilon_j e'_j\right\| \geq (1-\frac{\eta}{8})(1-\frac{1}{2\alpha n}\log_2(n)) - \frac{1}{2\alpha n}\log_2(n) \quad .$$

Mais

$$(1-\frac{\eta}{8})(1-\frac{\eta}{2n}\log_2(n)) - \frac{\eta}{2n}\log_2(n) \geq 1-\eta \quad \forall\, n \quad ,$$

comme on vérifie aisément. Ce calcul vaut a foriori pour les sous-suites de $e'_n$, ce qui démontre le théorème.

Remarquons enfin qu'il est clair que la propriété $(\mathcal{P}_2)$ implique $(\mathcal{P}_1)$ : si $n \in \mathbb{N}$, on a, si $(e'_n)$ possède $(\mathcal{P}_2)$ :

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_1^{n} \varepsilon_i e'_i\right\| \geq \left\|\frac{1}{n}\sum_{[\log_2(n)]}^{n} \varepsilon_i e_i\right\| - \frac{1}{n}\log_2(n)(1+\eta)$$

$$\geq \frac{1}{n}(1-\eta)(n-\log_2(n)) - \frac{1+\eta}{n}\log_2(n)$$

$$\geq 1-\eta-\frac{2\log_2 n}{n} \quad .$$

Pour $n \geq 5$, on a : $\dfrac{2\log_2 n}{n} \leq \dfrac{2\log_2 5}{5} > 0$, et donc, si $\eta$ a été choisi assez petit :

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_i\, e'_i\right\| \geq \delta > 0 \quad .$$

Pour $n = 1$, la propriété est claire. Pour $n = 2$, elle résulte de $(\mathcal{P}_2)$.
Pour $n = 3$ :

$$\frac{1}{3}\|\varepsilon_1\, e'_{n_1} + \varepsilon_2\, e'_{n_2} + \varepsilon_3\, e'_{n_3}\| \geq \frac{1}{3}\|\varepsilon_2\, e'_{n_2} + \varepsilon_3\, e'_{n_3}\| - \frac{1+\eta}{3}$$

$$\geq \frac{2}{3}(1-\eta) - \frac{1+\eta}{3} > 0$$

si $\eta$ a été choisi assez petit.
Pour $n = 4$ :

$$\frac{1}{4}\|\varepsilon_1\, e'_{n_1} + \varepsilon_2\, e'_{n_2} + \varepsilon_3\, e'_{n_3} + \varepsilon_2\, e'_{n_4}\|$$

$$\geq \frac{3}{4}\left\|\frac{1}{3}(\varepsilon_2\, e'_{n_2} + \varepsilon_3\, e'_{n_3} + \varepsilon_4\, e'_{n_4})\right\| - \frac{1}{4}\,(1+\eta)$$

$$> 0 \quad \text{pour } \eta \text{ assez petit.}$$

En résumé, nous avons obtenu :

<u>Théorème 1</u> : a) Soit E un espace de Banach. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- E admet $\ell^1$ pour modèle étalé.

$(\mathcal{P}_2)$ - Pour tout $\eta > 0$, il existe dans E une suite $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall\, k$, $k \leq n_1 < \ldots < n_{2^k}$, $\forall\, c_1 \ldots c_{2^k}$ scalaires,

$$(1-\eta)\sum_1^{2^k} |c_i| \leq \left\|\sum_1^{2^k} c_i\, e'_{n_i}\right\| \leq (1+\eta)\sum_1^{2^k} |c_i| \quad .$$

$(\mathcal{P}_1)$ - Pour tout $\eta > 0$, il existe dans E une suite $(e'_n)$ telle que $\forall\, k$, $\forall\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k = \pm 1$, $\forall\, n_1 < n_2 < \ldots < n_k$,

$$1-\eta \leq \left\|\frac{1}{k}\sum_1^k \varepsilon_i\, e'_{n_i}\right\| \leq 1+\eta \quad .$$

b) Ces conditions sont satisfaites s'il existe dans E une suite $(x_n)$ tendant faiblement vers 0 dont aucune sous-suite n'est de Banach-Saks ; les suites $(e'_n)$ vérifiant $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ tendent alors faiblement vers 0.

<u>Corollaire</u> : Si E est réflexif et ne contient pas $\ell^1_n$ uniformément, E a la propriété de Banach-Saks. C'est le cas en particulier si E est super-réflexif.

En effet, on pourrait sinon trouver une suite tendant faiblement vers 0 vérifiant $(\mathcal{P}_2)$ : E contient alors $\ell^1_n$ uniformément.

<u>Remarque</u> : La propriété $(\mathcal{P}_1)$ est strictement plus faible que le fait de contenir $\ell^1$, et strictement plus forte que le fait de contenir $\ell^1_n$ uniformément.

Nous allons maintenant introduire une nouvelle version de la propriété de Banach-Saks et examiner ses liens avec la propriété usuelle. Cette définition a été introduite par H.P. Rosenthal dans [11].

Nous dirons que E a la propriété de Banach-Saks-Rosenthal (en abrégé B.S.R.) si de toute suite faiblement convergente vers 0 on peut extraire une sous-suite dont les sommes de Césaro convergent. Les remarques suivantes sont claires :

- la propriété B.S. implique B.S.R.
- Si E n'a pas B.S.R., les trois conditions équivalentes du théorème 1, a) sont satisfaites.
- Si E est réflexif, B.S. et B.S.R. sont équivalentes.
- Si E ne contient pas $\ell^1_n$ uniformément, E a B.S.R.
- L'espace $\ell^1$ a B.S.R. (puisque toute suite faiblement convergente vers 0 y est convergente en norme).

Nous allons voir une classe d'espaces pour lesquels les trois propriétés du théorème 1 a) caractérisent non-B.S.R.

<u>Proposition 7</u> : Pour les espaces ne contenant pas $\ell^1$, les propriétés B.S.R. et non-$(\mathcal{P}_1)$ sont équivalentes.

<u>Démonstration</u> : Nous avons vu que dans tous les espaces, si B.S.R. fait défaut, $(\mathcal{P}_1)$ est satisfaite. Inversement, supposons $(\mathcal{P}_1)$ satisfaite par une suite $(e_n)$. Si E ne contient pas $\ell^1$, la suite $(e_n)$ contient, d'après un résultat de H.P. Rosenthal [10], une sous-suite de Cauchy faible : pour tout $\xi \in E'$, la limite $\lim\limits_{k\to\infty} \xi(e_{n_k})$ existe, si $e_{n_k}$ est

cette sous-suite. Il en résulte que $\frac{1}{2}(e_{n_{2k-1}} - e_{n_{2k}}) \to 0$ faiblement ; on pose $e'_k = \frac{1}{2}(e_{n_{2k-1}} - e_{n_{2k}})$. La suite $e_{n_k}$ vérifiait encore $(\mathcal{P}_1)$, donc $e'_k$ vérifie aussi $(\mathcal{P}_1)$, puisque

$$1+\eta \geq \left\|\frac{1}{k}\sum_1^k \varepsilon_i\, e'_i\right\| = \left\|\frac{1}{k}\sum_1^k \varepsilon_i\, \frac{1}{2}(e_{n_{2i-1}} - e_{n_{2i}})\right\| \geq 1-\eta \quad ,$$

ainsi que pour toutes les sous-suites de $e'_i$. Nous allons voir que la suite $e'_i$ n'est pas de Banach-Saks ; le raisonnement vaudra aussi pour les sous-suites. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\left\|\frac{1}{k}\sum_1^k e'_i - \frac{1}{2k}\sum_1^{2k} e'_i\right\| = \left\|\frac{1}{2k}\left(\sum_1^k e'_i - \sum_{k+1}^{2k} e'_i\right)\right\|$$

et les sommes $\frac{1}{k}\sum_1^k e'_i$ ne peuvent donc converger fortement lorsque $k \to +\infty$.

La propriété $(\mathcal{P}_1)$ occupe entre "contenir $\ell^1$" et "contenir $\ell^1_n$ uniformément" une place analogue à B.S. entre "réflexif" et "super-réflexif". C'est cette propriété qui nous sera utile à l'exposé V pour obtenir des théorèmes de factorisation.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] A. Baernstein, On reflexivity and summability, Studia Math. 42, p. 91-94 (1972).

[2] B. Beauzamy, Espaces de Banach uniformément convexifiables, Exposés XIII et XIV, Séminaire Maurey-Schwartz 1973/74, Ecole Polytechnique, Paris.

[3] B. Beauzamy, Opérateurs uniformément convexifiants, Studia Math. 57, 2, p. 103-159 (1976).

[4] A. Brunel, Espaces associés à une suite bornée dans un espace de Banach, Exposés Nos XV, XVI et XVIII, Séminaire Maurey-Schwartz 1973/74, Ecole Polytechnique, Paris.

[5] A. Brunel et L. Sucheston, On B-convex spaces, Math. System Theory, vol. 7.

[6] P. Erdös et M. Magidor, A note on regular methods of summability and the Banach-Saks property, Proc. of the A.M.S., 59, 2 (1976).