Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

P. Saphar

Sur les sous-espaces des espaces de Banach à base inconditionnelle, d'après Feder

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1977-1978), exp. n° 15, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1977-1978____A23_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   S U R   L A   G E O M E T R I E

D E S   E S P A C E S   D E   B A N A C H

1977-1978

SUR LES SOUS-ESPACES DES ESPACES DE BANACH A BASE INCONDITIONNELLE D'APRES FEDER

P. SAPHAR

(Technion)

Exposé No XV

17 Février 1978

§ 1. INTRODUCTION

Soit E un espace de Banach et (A_n) une suite d'opérateurs de rang fini de E dans E. On dit que (A_n) est une expansion inconditionnelle de E si, pour tout x de E, $x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x$, la convergence de la série étant inconditionnelle. Si de plus, $A_n A_m = \delta_{n,m}$, on dit que A_n est une décomposition inconditionnelle de E. On connaît les résultats suivants :

- L'espace de Banach E a une expansion inconditionnelle si et seulement si E est un sous-espace complémenté d'un espace de Banach G qui a une décomposition inconditionnelle (Pełczynski et Wojtaszczyk [6]) ;
- Si l'espace G a une décomposition inconditionnelle alors G est un sous-espace d'un espace F à base inconditionnelle (cf. Lindenstrauss et Tzafriri [5]).

Ainsi tout espace de Banach avec une expansion inconditionnelle est un sous-espace d'un espace de Banach à base inconditionnelle. On va montrer que dans certains cas (hypothèse d'approximation convenable) le résultat réciproque est aussi vrai. On donnera ensuite quelques applications aux espaces d'opérateurs. On utilisera les quelques notations suivantes :

Si E et F sont deux espaces de Banach, on note L(E,F) l'espace de Banach de tous les opérateurs linéaires continus de E dans F et C(E,F) le sous-espace de L(E,F) formé des opérateurs compacts. Soit (x_n) une suite de E. On dit que la série Σx_n est de Cauchy faible inconditionnelle si $\varepsilon_1(x_i) = \sup_{\substack{x' \in E' \\ \|x'\| \le 1}} \sum_i |\langle x_i, x' \rangle|$ est fini.

Le lemme suivant, dû à Pełczynski (cf. Singer [7], lemma 15.7 p. 446) joue un rôle important dans la suite :

<u>Lemme</u> (Pełczynski) : Soit E_o un sous-espace de l'espace de Banach E, (z_n) une suite de E_o et (y_n) une suite de E telle que $\varepsilon_1(y_n) < +\infty$ et $(z_n - \sum_{i=1}^{n} y_i) \to 0$ faiblement. Alors, il existe une suite d'entiers $0 = p_o < p_1 < p_2 < \ldots$ et une suite de scalaires non négatifs (λ_i), tels que si l'on pose : $I_o = \emptyset$; $I_n = \{i \,;\, p_{n-1} < i \le p_n\}$, $n \ge 1$ et $y_n^o = \sum_{i \in I_{n+1}} \lambda_i z_i - \sum_{i \in I_n} \lambda_i z_i$, on ait :

$\sum_{i\in I_n} \lambda_i = 1$, $\varepsilon_1(y_n^o) < +\infty$ et $(z_n - \sum_{i=0}^{n} y_i^o) \to 0$, faiblement. De plus, la suite (y_n^o) vérifie aussi :

$$y_n^o = \sum_{i\in I_{n+1}} \alpha_i \; y_i + \sum_{i\in I_n} \beta_i \; y_i + w_n$$

avec $0 \le \alpha_i \le 1$, $0 \le \beta_i \le 1$ et $\|w_n\| \le \frac{1}{2^{n-1}}$.

§ 2. LES RESULTATS

Théorème 1 : Soit E un espace de Banach à base inconditionnelle et M un sous-espace réflexif de E. Alors M a une expansion inconditionnelle si et seulement si M a la propriété d'approximation.

Preuve : Il suffit de montrer que si M a la propriété d'approximation, alors M a une expansion inconditionnelle. Supposons donc que M a la propriété d'approximation (métrique, puisque M est réflexif). Il existe alors une suite d'opérateurs de rang fini (T_n) de M dans M telle que $T_n x \to x$ pour tout x de M dans E et (e_i, e_i') la base canonique de E (les e_i' sont les formes linéaires continues associées à la base (e_i) : $\langle e_i, e_j' \rangle = \delta_{i,j}$). Posons :

$$g_i = e_i'|_M \quad , \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes e_i \quad \text{et} \quad V_n = jT_n - S_n \; .$$

Pour tout x de M, $jT_n x \to x$ et $S_n x \to x$. Donc $\langle V_n^* x', x\rangle$ tend vers 0 pour tout x de M et x' de E'. On en déduit d'après Kalton [4] que $V_n = jT_n - S_n$ tend vers 0 faiblement dans C(M,E). Par ailleurs, on vérifie aisément que si l'on considère la suite $(g_i \otimes e_i)$ comme une suite de C(M,E), on a $\varepsilon_1(g_i \otimes e_i) < +\infty$. D'après le lemme de Pełczynski cité dans l'introduction (appliqué à C(M,M) considéré comme sous-espace de C(M,E)), il existe une suite (A_n) de C(M,M) :

$$A_n = \sum_{i\in I_{n+1}} \lambda_i \; T_i - \sum_{i\in I_n} \lambda_i \; T_i$$

telle que : $\varepsilon_1(A_n) < +\infty$ et $(T_n - \sum_{i=1}^{n} A_i)$ tende vers 0 faiblement dans C(M,M). Mais

$$\Big\| \sum_{i=0}^{n} A_i x - x \Big\| = \Big\| \sum_{i\in I_{n+1}} \lambda_i \; T_i x - x \Big\| \le \sum_{i\in I_{n+1}} \lambda_i \|T_i x - x\| \; .$$

Donc $\|\sum_{i=0}^{n} A_i x - x\|$ tend vers 0 si n tend vers l'infini. On déduit que $\sum_{i=0}^{\infty} A_i x = x$ pour tout x de M. Par ailleurs, d'après le lemme de Pełczynski

$$A_n = \sum_{i \in I_{n+1}} \alpha_i \, g_i \otimes e_i + \sum_{i \in I_n} \beta_i \, g_i \otimes e_i + W_n$$

$0 \leq \alpha_i \leq 1$, $0 \leq \beta_i \leq 1$ et $\|W_n\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Alors, pour tout x de M :

$$\sum_n A_n x = \sum_n \sum_{i \in I_{n+1}} \alpha_i \, g_i(x) \, e_i + \sum_n \sum_{i \in I_n} \beta_i \, g_i(x) \, e_i + \sum_n W_n \, x \ .$$

On en déduit que la convergence de $\sum_n A_n x$ est inconditionnelle. Le résultat est obtenu.

<u>Théorème 2</u> : Soit E un espace de Banach à base inconditionnelle rétractante (shrinking basis) et M un sous-espace de E. Alors, le dual M' de M a la propriété d'approximation si et seulement si il existe une expansion inconditionnelle A_n de M telle que A_n^* soit une expansion inconditionnelle de M'.

<u>Preuve</u> : Le principe de la démonstration est le même. Il faut seulement remarquer que si M' vérifie l'hypothèse d'approximation, alors, d'après Johson, Rosenthal et Zippin [3], il existe une suite d'opérateurs de rang fini T_n de M dans M telle que $T_n x \to x$ pour tout x de E et $T_n^* f \to f$ pour tout f de M'. On continue ensuite la démonstration comme dans le théorème 1.

On peut d'une manière analogue obtenir le résultat suivant :

<u>Théorème 3</u> : Soit E un espace de Banach avec une base inconditionnelle (e_i) et $e_i' \in E'$ tels que $\langle e_i, e_j' \rangle = \delta_{i,j}$. Soit M un sous-espace de E. Posons $N = E/M$.

<u>a</u>. Si la base de E est rétractante (shrinking) et si N' a la propriété d'approximation, alors N a une expansion inconditionnelle (A_n) telle que (A_n^*) soit une expansion de N'.

<u>b</u>. Soit G le sous-espace fermé de E' engendré par les (e_i'). Supposons que la base (e_i) est "boundedly complete" et que M est fermé pour la topologie $\sigma(E,G)$. Alors, M a une expansion inconditionnelle si et seulement si M a la propriété d'approximation.

Exemples :

1) Soit μ_o la mesure de Lebesgue et E un sous-espace de $L_p([0,1];\mu_o)$ $1 < p < +\infty$. Alors E a la propriété d'approximation si et seulement si E a une expansion inconditionnelle.

2) Soit E un sous-espace de ℓ_1 fermé pour $\sigma(\ell_1, c_o)$ et ayant la propriété d'approximation. Alors E a une expansion inconditionnelle.

§ 3. APPLICATIONS AUX ESPACES D'OPERATEURS

Voici un exemple d'applications des résultats précédents.

Proposition : Soit E un espace de Banach à base inconditionnelle et M un sous-espace réflexif de E de dimension infinie ayant la propriété d'approximation. Alors, C(M,M) contient un sous-espace isomorphe à c_o et L(M,M) contient un sous-espace isomorphe à ℓ_∞ .

Preuve : D'après le théorème 1, il existe une suite d'opérateurs de rang fini (A_n) de M dans M telle que pour tout x de M, $x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x$ et $\varepsilon_1(A_n) < +\infty$. Il est clair que la série $\sum_n A_n$ ne converge pas en norme vers un élément de C(M,M). D'après Bessaga et Pełczynski [1], il existe un sous-espace de C(M,M) isomorphe à c_o En fait, puisque C(M,M) est séparable, ce sous-espace peut même être choisi complémenté dans C(M,M). Puisque M est réflexif et vérifie l'hypothèse d'approximation $(C(M,M))'' = L(M,M)$. On en déduit que L(M,M) contient un sous-espace isomorphe à ℓ_∞ .

Il est aussi possible d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 4 : Soit E et F deux espaces de Banach réflexifs tels que E ou F soit un sous-espace d'un espace à base inconditionnelle. Alors, C(E,F) est soit réflexif soit non isomorphe à un espace dual.

On sait que la version isométrique de ce résultat est vraie dans des conditions plus générales (cf. [2]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Bessaga et A. Pełczynski, On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces, Studia Math. 17 (1958) 151-174.

[2] M. Feder and P. Saphar, Spaces of compact operators and their dual spaces, Israel J. of Math. 21 (1975) 38-49.

[3] W.B. Johnson, H.P. Rosenthal and M. Zippin, On bases, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces, Israël J. of Math. 9 (1971) 488-506.

[4] N.J. Kalton, Spaces of compact operators, Math. Ann. 208 (1974) 267-278.

[5] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach spaces - I -, Springer 1977.

[6] A. Pełczynski and P. Wojtaszczyk, Banach spaces with finite dimensional expansions of identity and universal bases of finite dimensional subspaces, Studia Math. 40 (1971) 91-108.

[7] I. Singer, Bases in Banach spaces - I -, Springer 1970.
