C. SAMUEL

Exemples d'espaces de Banach ayant la propriété de projection uniforme

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1977-1978), exp. n° 27, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1977-1978____A21_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE SUR LA GEOMETRIE

DES ESPACES DE BANACH

1977-1978

EXEMPLES D'ESPACES DE BANACH AYANT LA PROPRIETE DE PROJECTION UNIFORME

C. SAMUEL

(U.E.R. de Marseille-Luminy)

Exposé No XXVII 9 Juin 1978

1- Introduction

La propriété d'approximation uniforme a été introduite par A. Pełczyński et H.P. Rosenthal (cf [3]).

Définition

Un espace de Banach X a la λ-propriété d'approximation uniforme si pour tout entier k il existe un entier N(k) tel que pour tout sous-espace E de X de dimension k il existe une application linéaire continue $T : X \to X$ telle que $\dim T(X) \leq N(k)$, $\|T\| \leq \lambda$ et pour tout $x \in E$, $T(x) = x$. Si de plus T peut être choisie parmi les projections de X, on dit que X a la λ-propriété de projection uniforme. Un espace de Banach X a la propriété d'approximation uniforme (resp. de projection uniforme) s'il a la λ-propriété d'approximation uniforme (resp. λ-propriété de projection uniforme) pour un réel λ convenable.

Dans [3] il est montré que tous les espaces $\mathcal{L}_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ ont la propriété de projection uniforme et dans [2], J. Lindenstrauss et L. Tzafriri montrent que tout espace d'Orlicz réflexif a la $(1 + \varepsilon)$ - propriété d'approximation uniforme pour tout réel $\varepsilon > 0$.

Rappelons que si X est un espace de Banach et $q \in [1, \infty]$, $(X \oplus X \oplus \dots)_q$ note l'ensemble des suites $x = (x_i)_i$ d'éléments de X telles que $(\|x_i\|)_i \in \ell_q$, muni de la norme $\|(x_i)_i\| = \|(\|x_i\|)_i\|$.

Dans ce travail, nous démontrons que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, les espaces $(L_p \oplus L_p \oplus \dots)_q$, $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$, ont la $(1 + \varepsilon)$ - propriété de projection uniforme. De ce résultat il est alors facile de déduire que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, les espaces $(\ell_p \oplus \ell_p \oplus \dots)_q$, $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$, ont la $(1+\varepsilon)$-propriété d'approximation uniforme.

2- La propriété de projection uniforme des espaces $(L_p \oplus L_p \oplus \dots)_q$, $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$.

On note pour chaque entier n, $I_n = [n-1, n]$; on note $L_p(I_n)$ l'espace de Banach des classes de fonctions numériques Borel-mesurables sur I_n et de puissance pième intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $L_p = L_p([0,1])$.

Théorème: Pour tout réel $\varepsilon > 0$, pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et pour tout $1 \leq q \leq \infty$ l'espace $(L_p \oplus L_p \oplus \dots)_q$ a la $(1+\varepsilon)$-propriété de projection uniforme.

Fixons $1 \leq p < \infty$ et $1 \leq q < \infty$; le cas $p = \infty$ ou $q = \infty$ se traite de la même façon avec des modifications évidentes. Nous identifions isométriquement $(L_p \oplus L_p \oplus \dots)_q$ avec :

$$E_{p,q} = \{ f : [0, \infty[\to \mathbb{R} \; ; \forall n, f \in L_p(I_n) \text{ et } \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_{I_n} |f(t)|^p dt \Big)^{q/p} \Big)^{1/q} < \infty \}$$

muni de la norme $\|f\| = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_{I_n} |f(t)|^p dt \Big)^{q/p} \Big)^{1/q}$.

Si $f \in E_{p,q}$ on définit, à un ensemble de mesure nulle près, le support de f :

$$S(f) = \{ t \in [0, \infty[\; ; f(t) \neq 0 \}$$

Avant de prouver le théorème nous allons tout d'abord démontrer par récurrence que :

$$(R)\begin{cases}\text{Pour tout réel } \varepsilon>0 \text{ et pour tout entier } k \text{ il existe un entier } N(\varepsilon,k)\\ \text{tel que si } X_1,\dots,X_k \text{ sont des éléments de } E_{p,q} \text{ dont les supports}\\ \text{sont disjoints à un ensemble de mesure nulle près, alors il existe}\\ P : E_{p,q}\to E_{p,q} \text{ une projection qui a les propriétés suivantes :}\\ 1)\ \text{pour tout } f\in E_{p,q}\ ,\quad S(P(f))\subset \bigcup_{i=1}^{k} S(X_i)\ .\\ 2)\ \text{pour tout } f\in E_{p,q}\ ,\quad \|P(f)\|\le(1+\varepsilon)\|f_{|\bigcup_{i=1}^{k}S(X_i)}\|\ .\\ 3)\ \text{pour tout entier } i,\ 1\le i\le k \Rightarrow \|P(X_i)-X_i\|\le\varepsilon\|X_i\|\ .\\ 4)\ \dim \operatorname{Im}(P)\le N(\varepsilon,k).\end{cases}$$

Le résultat est évident si $k = 1$, supposons-le établi jusqu'au rang $k = m$. Donnons-nous $X_1,\dots,X_{m+1}$ des éléments normalisés de $E_{p,q}$ dont les supports sont disjoints à un ensemble de mesure nulle près et donnons-nous un réel $\varepsilon > 0$. Pour chaque entier n et $1 \le i \le m+1$, notons :

$$a_{n,i} = \left(\int_{I_n} |X_i(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

Soit N le plus petit entier tel que $N \ge \left(\frac{2m^{1/q}}{\varepsilon}\right)^p$ et $\left(1+\frac{1}{N}\right)^{\frac{1+q}{p}} \le 1+\varepsilon$

Soit $L_1,\dots,L_p$ une énumération des intervalles :

$L_1 = [\,0,\frac{1}{N}\,[\ ,\ L_2 = [\,\frac{1}{N}\,,\ \frac{1}{N-1+\frac{N-1}{N}}\,[,\dots,$

$[\frac{1}{r+\frac{k}{N}}\ ,\ \frac{1}{r+\frac{k-1}{N}}\,[\ ,\ r = 1,\dots, N-1$ et $k=1,\dots,N,\dots, \{1\},\dots,$

$]\,r'+\frac{k'-1}{N}\ ,\ r'+\frac{k'}{N}\,],\ r'=1,\dots,N-1$ et $k'=1,\dots,N,\dots, L_{p-1} =]\,N-1+\frac{N-1}{N}\,,\,N\,]$

et $L_p = \,]N,\infty].$

On convient de noter $\frac{0}{0} = 1$ et $\frac{a}{0} = \infty$ si $a \neq 0$. Pour chaque m-uple d'entiers $\{i_1, \ldots, i_m\}$ appartenant à $\{1, \ldots, P\}$ on note :

$$A_{i_1, \ldots, i_m} = \{n \,;\, (\frac{a_{n,1}}{a_{n,m+1}})^p \in L_{i_1} \text{ et} \ldots \text{et } (\frac{a_{n,m}}{a_{n,m+1}})^p \in L_{i_m}\} \ .$$

Fixons $\{i_1, \ldots, i_m\}$ un m-uple d'entiers appartenant à $\{1, \ldots, P\}$. Pour $\ell = 1, \ldots, m+1$ notons $X_{\ell, i_1, \ldots, i_m}$ l'élément de $E_{p,q}$ définit par la relation :

$$\text{pour tout } t \in [0, \infty[, \ X_{\ell, i_1, \ldots, i_m}(t) = \begin{cases} X_\ell(t) \text{ si } t \in \bigcup\limits_{n \in A_{i_1, \ldots, i_m}} I_n \ . \\ 0 \quad \text{sinon} \ . \end{cases}$$

Nous allons définir $P_{i_1, \ldots, i_m}$ et pour cela nous examinons plusieurs cas :

<u>1er cas</u> : $A_{i_1, \ldots, i_m} = \emptyset$, on pose alors $P_{i_1, \ldots, i_m} = 0$.

<u>2° cas</u> : l'un des entiers $i_1, \ldots, i_m$ est égal à 1 ; supposons pour fixer les idées que :

$$(1) \qquad n \in A_{i_1, \ldots, i_m} \Rightarrow (\frac{a_{n,1}}{a_{n,m+1}})^p < \frac{1}{N} \ .$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence à

$$X_{2, i_1, \ldots, i_m}, \ldots, X_{m+1, i_1, \ldots, i_m} \quad \text{et } \varepsilon/2 \quad ;$$

notons $P_{i_1, \ldots, i_m}$ une projection vérifiant (R) et remarquons que (1) entraîne :

$$\| X_{1, i_1, \ldots, i_m} \| < \frac{1}{N^{1/p}} \| X_{m+1, i_1, \ldots, i_m} \| \ .$$

3°cas : l'un des entiers $i_1, \dots, i_m$ est égal à P; supposons pour fixer les idées que

$$(2) \quad n \in A_{i_1,\dots,i_m} \Rightarrow \left(\frac{a_{n,1}}{a_{n,m+1}}\right)^p > N .$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence à

$X_{1,i_1,\dots,i_m}, \dots, X_{m,i_1,\dots,i_m}$ et $\varepsilon/2$; notons

$P_{i_1,\dots,i_m}$ une projection vérifiant (R) et remarquons que (2)

entraîne

$$\|X_{m+1,i_1,\dots,i_m}\| < \frac{1}{N^{1/p}} \| X_{1,i_1,\dots,i_m} \| .$$

4° cas : pour $\ell = 1,\dots,m$, $\frac{1}{N} \leq \left(\frac{a_{n,\ell}}{a_{n,m+1}}\right)^p \leq N$. On ne perd pas de la généralité en supposant qu'il existe deux entiers $1 \leq i \leq j \leq m$ tels que

$$\frac{1}{N} \leq \left(\frac{a_{n,1}}{a_{n,m+1}}\right)^p, \dots, \left(\frac{a_{n,i}}{a_{n,m+1}}\right)^p < 1 \quad ,$$

$$1 < \left(\frac{a_{n,i+1}}{a_{n,m+1}}\right)^p, \dots, \left(\frac{a_{n,j}}{a_{n,m+1}}\right)^p \leq N \quad ,$$

et
$$1 = \frac{a_{n,j+1}}{a_{n,m+1}} = \dots = \frac{a_{n,m}}{a_{n,m+1}} .$$

On peut alors trouver des entiers $r_1, \dots, r_j \in \{1, \dots, N-1\}$ et des entiers $k_1, \dots, k_j \in \{1, \dots, N\}$ tels que :

$$(3) \qquad \text{pour tout } \ell,\ 1 \leq \ell \leq i \Rightarrow r_\ell + \frac{k_\ell - 1}{N} < \left(\frac{a_{n,m+1}}{a_{n,\ell}}\right)^p \leq r_\ell + \frac{k_\ell}{N} .$$

(4) $\quad$ pour tout ℓ', $i+1 \leq \ell' \leq j \Rightarrow r_{\ell'} + \frac{k_{\ell'-1}}{N} < \left(\frac{a_{n,\ell'}}{a_{n,m+1}}\right)^p \leq r_{\ell'} + \frac{k_{\ell'}}{N}$.

Notons $D = \prod_{\ell=1}^{i} (r_\ell N + k_\ell - 1)$; pour $1 \leq \ell \leq i$ notons $D_\ell = \frac{D}{r_\ell N + k_\ell - 1}$

et pour $i+1 \leq \ell' \leq j$ notons $D^{\ell'} = D(r_{\ell'} N + k_{\ell'} - 1)$. Avec ces notations (3) et (4) entraînent alors

(5) $\quad$ pour tout ℓ, $1 \leq \ell \leq i \Rightarrow \frac{(a_{n,\ell})^p}{N^2 D_\ell} < \frac{(a_{n,m+1})^p}{ND} \leq (1 + \frac{1}{N}) \frac{(a_{n,\ell})^p}{N^2 D_\ell}$

(6) $\quad$ pour tout ℓ', $i+1 \leq \ell' \leq j \Rightarrow \frac{(a_{n,m+1})^p}{ND} < \frac{(a_{n,\ell'})^p}{D^{\ell'}} \leq (1 + \frac{1}{N}) \frac{(a_{n,m+1})^p}{ND}$

Fixons $\ell \in \{1, \ldots, i\}$ (resp. $\ell' \in \{i+1, \ldots, j\}$), on peut trouver pour $r = 1, 2, \ldots, N^2 D_\ell$, (resp. $r' = 1, 2, \ldots, D^{\ell'}$) des éléments X_ℓ^r (resp. $X_{\ell'}^{r'}$) appartenant à $E_{p,q}$, dont les supports sont deux à deux disjoints, tels que :

(7_ℓ) $\quad$ pour tout $r = 1, 2, \ldots, N^2 D_\ell$ et pour tout $n \in A_{i_1, \ldots, i_m}$,

$$\| X_\ell^r |_{I_n} \|^p = \frac{(a_{n,\ell})^p}{N^2 D_\ell} .$$

($7_{\ell'}$) $\quad$ pour tout $r' = 1, 2, \ldots, D^{\ell'}$ et pour tout $n \in A_{i_1, \ldots, i_m}$,

$$\| X_{\ell'}^{r'} |_{I_n} \|^p = \frac{(a_{n,\ell'})^p}{D^{\ell'}} .$$

(8_ℓ) $$\sum_{r=1}^{N^2 D_\ell} X_\ell^r = X_{\ell, i_1, \ldots, i_m} .$$

$$(8_{\ell'}) \qquad \sum_{r'=1}^{D^{\ell'}} X_{\ell'}^{r'} = X_{\ell', i_1, \dots, i_m} .$$

De même pour $\ell'' \in \{j+1, \dots, m+1\}$ on peut trouver pour $r'' = 1, 2, \dots, ND$ des éléments $X_{\ell''}^{r''} \in E_{p,q}$ dont les supports sont deux à deux disjoints tels que :

$(7_{\ell''})$ pour tout $r'' = 1, 2, \dots, ND$ et pour tout $n \in A_{i_1, \dots, i_m}$,

$$\| X_{\ell''}^{r''} |_{I_n} \|^p = \frac{(a_{n, m+1})^p}{ND}$$

$$(8_{\ell''}) \qquad \sum_{r''=1}^{ND} X_{\ell''}^{r''} = X_{\ell'', i_1, \dots, i_m}$$

Notons pour :

$$(9_\ell) \quad \ell = 1, 2, \dots, i \qquad \alpha_\ell = \frac{1}{(N^2 D_\ell)^{1/p}} \Big(\sum_{n \in A_{i_1, \dots, i_m}} (a_{n,\ell})^q \Big)^{1/q} .$$

$$(9_{\ell'}) \quad \ell' = i+1, \dots, j \qquad \alpha_{\ell'} = \frac{1}{(D^{\ell'})^{1/p}} \Big(\sum_{n \in A_{i_1, \dots, i_m}} (a_{n,\ell'})^q \Big)^{1/q} .$$

$$(9_{\ell''}) \quad \ell'' = j+1, \dots, m+1 \qquad \alpha_{\ell''} = \frac{1}{(ND)^{1/p}} \Big(\sum_{n \in A_{i_1, \dots, i_m}} (a_{n,m+1})^q \Big)^{1/q} .$$

Nous remarquons que (5) et (6) impliquent :

$$(10) \qquad \text{pour } \ell = 1, 2, \dots, i \qquad \alpha_\ell < \alpha_{m+1} \le \Big(1 + \frac{1}{N}\Big)^{\frac{1}{p}} \alpha_\ell .$$

et (11) pour $\ell' = i+1,\dots,j$ $\quad \alpha_{m+1} < \alpha_{\ell'} \leq (1+\frac{1}{N})^{\frac{1}{p}} \alpha_{m+1}$.

Pour $1 \leq i \leq m+1$ et $t \in [0,\infty[$ on note $\varepsilon_i(t)$ le signe de $X_i(t)$. Donnons-nous $f \in E_{p,q}$.

Pour $\ell = 1,2,\dots,i$ et $r = 1,2,\dots,N^2D_\ell$ on pose

$$\Phi_\ell^r(f) = \frac{1}{(\alpha_\ell)^q} \sum_{n \in A_{i_1,\dots,i_m}} \frac{(N^2D_\ell)^{\frac{p-q}{p}}}{(a_{n,\ell})^{p-q}} \int_{I_n} |X_\ell^r(t)|^{p-1} \varepsilon_\ell(t) f(t)\, dt ,$$

pour $\ell' = i+1,\dots,j$ et $r' = 1,2,\dots,D^{\ell'}$ on pose

$$\Phi_{\ell'}^{r'}(f) = \frac{1}{(\alpha_{\ell'})^q} \sum_{n \in A_{i_1,\dots,i_m}} \frac{(D^{\ell'})^{\frac{p-q}{p}}}{(a_{n,\ell'})^{p-q}} \int_{I_n} |X_{\ell'}^{r'}(t)|^{p-1} \varepsilon_{\ell'}(t)\, f(t)\, dt,$$

et pour $\ell'' = j+1,\dots,m+1$ et $r'' = 1,2,\dots,ND$ on pose

$$\Phi_{\ell''}^{r''}(f) = \frac{1}{(\alpha_{\ell''})^q} \sum_{n \in A_{i_1,\dots,i_m}} \frac{(ND)^{\frac{p-q}{p}}}{(a_{n,m+1})^{p-q}} \int_{I_n} |X_{\ell''}^{r''}(t)|^{p-1} \varepsilon_{\ell''}(t) f(t) dt.$$

Il est immédiat de vérifier par une double application de l'inégalité de Hölder que les séries qui figurent au second membre sont absolument convergentes.

Notons alors :

$$P_{i_1,\dots,i_m}(f) = \sum_{\ell=1}^{i} \sum_{r=1}^{N^2D_\ell} \Phi_\ell^r(f)\, X_\ell^r + \sum_{\ell'=i+1}^{j} \sum_{r'=1}^{D^{\ell'}} \Phi_{\ell'}^{r'}(f)\, X_{\ell'}^{r'} + \sum_{\ell''=j+1}^{m+1} \sum_{r''=1}^{ND} \Phi_{\ell''}^{r''}(f)\, X_{\ell''}^{r''} .$$

La disjonction des supports des fonctions X_ℓ^r , $X_{\ell'}^{r'}$, $X_{\ell''}^{r''}$, $1\leq \ell\leq i$ et $1\leq r\leq N^2D_\ell$, $i+1\leq \ell'\leq J$ et $1\leq r'\leq D^{\ell''}$, $J+1\leq \ell''\leq m+1$ et $1\leq r''\leq ND$ montre que pour $1\leq k\leq m+1$

$$P_{i_1,\dots,i_m}(X_{k,i_1,\dots,i_m}) = X_{k,i_1,\dots,i_m} .$$

Evaluons $\|P_{i_1,\dots,i_m}(f)\|$. Nous avons :

$$\|P_{i_1,\dots,i_m}(f)\|^q = \sum_{n\in A_{i_1,\dots,i_m}} \Big[\sum_{\ell=1}^{i}\sum_{r=1}^{N^2D_\ell} |\Phi_\ell^r(f)|^p \frac{(a_{n,\ell})^p}{N^2D_\ell} + \sum_{\ell'=i+1}^{J}\sum_{r'=1}^{D^{\ell'}} |\Phi_{\ell'}^{r'}(f)|^p \frac{(a_{n,\ell'})^p}{D^{\ell'}}$$

$$+\sum_{\ell''=J+1}^{m+1}\sum_{r''=1}^{ND} |\Phi_{\ell''}^{r''}(f)|^p \frac{(a_{n,m+1})^p}{ND}\Big]^{q/p}$$

(5) et (6) impliquent alors :

$$\text{(12)}\quad \|P_{i_1,\dots,i_m}(f)\|^q \leq (1+\tfrac{1}{N})^{\frac{q}{p}} \frac{1}{(ND)^{q/p}} \sum_{n\in A_{i_1,\dots,i_m}} (a_{n,m+1})^q \Big[\sum_{\ell=1}^{i}\sum_{r=1}^{N^2D_\ell} |\Phi_\ell^r(f)|^p$$

$$+\sum_{\ell'+1}^{J}\sum_{r'=1}^{D^{\ell'}} |\Phi_{\ell'}^{r'}(f)|^p + \sum_{\ell''=J+1}^{m+1}\sum_{r''=1}^{ND} |\Phi_{\ell''}^{r''}(f)|^p \Big]^{q/p}$$

Notons

$$\Theta = \Big[\sum_{\ell=1}^{i}\sum_{r=1}^{N^2D_\ell} |\Phi_\ell^r(f)|^p + \sum_{\ell'=i+1}^{J}\sum_{r'=1}^{D^{\ell'}} |\Phi_{\ell'}^{r'}(f)|^p + \sum_{\ell''=J+1}^{m+1}\sum_{r''=1}^{ND} |\Phi_{\ell''}^{r''}(f)|^p\Big]^{1/p}$$

et appliquons l'inégalité de Minkowski nous obtenons :

$$\Theta \le \sum_{n\in A_{i_1,\dots,i_m}} \Big[\sum_{\ell=1}^{i} \sum_{r=1}^{N^2D_\ell} \frac{(N^2D_\ell)^{p-q}}{(\alpha_\ell)^{pq}\,(a_{n,\ell})^{p^2-q}} \Big| \int_{I_n} |X_\ell^r(t)|^{p-1} \epsilon_\ell(t) f(t)\,dt \Big|^p$$

$$+ \sum_{\ell'=i+1}^{j} \sum_{r'=1}^{D^{\ell'}} \frac{(D^{\ell'})^{p-q}}{(\alpha_{\ell'})^{pq}\,(a_{n,\ell'})^{p^2-q}} \Big| \int_{I_n} |X_{\ell'}^{r'}(t)|^{p-1} \epsilon_{\ell'}(t) f(t)\,dt \Big|^p$$

$$+ \sum_{\ell''=j+1}^{m+1} \sum_{r''=1}^{ND} \frac{(ND)^{p-q}}{(\alpha_{\ell''})^{pq}\,(a_{n,m+1})^{p-q}} \Big| \int_{I_n} |X_{\ell''}^{r''}(t)|^{p-1} \epsilon_{\ell''}(t) f(t)\,dt \Big|^p \Big]^{1/p}$$

Appliquons maintenant l'inégalité de Hölder à chacune des intégrales figurant au second membre, d'après $7_\ell)$, $7_{\ell'})$ et $7_{\ell''})$ nous obtenons :

$$\Theta \le \sum_{n\in A_{i_1,\dots,i_m}} \Big[\sum_{\ell=1}^{i} \frac{1}{(\alpha_\ell)^{pq}} \Big(\frac{(a_{n,\ell})^p}{N^2D_\ell} \Big)^{q-1} \int_{I_n\cap S(X_\ell)} |f(t)|^p\,dt$$

$$+ \sum_{\ell'=i+1}^{j} \frac{1}{(\alpha_{\ell'})^{pq}} \Big(\frac{(a_{n,\ell'})^p}{D^{\ell'}} \Big)^{q-1} \int_{I_n\cap S(X_{\ell'})} |f(t)|^p\,dt$$

$$+ \sum_{\ell''=j+1}^{m+1} \frac{1}{(\alpha_{\ell''})^{pq}} \Big(\frac{(a_{n,m+1})^p}{ND} \Big)^{q-1} \int_{I_n\cap S(X_{\ell''})} |f(t)|^p\,dt \Big]^{1/p} .$$

En utilisant (5), (6), (10) et (11) nous obtenons

$$\Theta \leq \frac{(1+\frac{1}{N})^{q/p}}{(\alpha_{m+1})^{q}} \sum_{n \in A_{i_1,\dots,i_m}} \left(\frac{a_{n,m+1}}{(ND)^{1/p}}\right)^{q-1} \left(\int_{I_n \cap \bigcup_{k=1}^{m+1} S(X_k)} |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p}$$

d'où en appliquant l'inégalité de Hölder :

$$\Theta \leq \frac{(1+\frac{1}{N})^{q/p}}{\alpha_{m+1}} \left(\sum_{n \in A_{i_1,\dots,i_m}} \left(\int_{I_n \cap \bigcup_{k=1}^{m+1} S(X_k)} |f(t)|^p \, dt\right)^{q/p}\right)^{1/q}$$

Reportons cette dernière inégalité dans (12) nous obtenons alors :

$$\|P_{i_1,\dots,i_m}(f)\|^q \leq (1+\frac{1}{N})^{\frac{q+q^2}{p}} \sum_{n \in A_{i_1,\dots,i_m}} \left(\int_{I_n \cap \bigcup_{k=1}^{m+1} S(X_k)} |f(t)|^p \, dt\right)^{q/p}.$$

L'application linéaire $Q : E_{p,q} \to E_{p,q}$ définie pour tout $f \in E_{p,q}$ par

$$Q(f) = \sum_{(i_1,\dots,i_m) \in \{1,\dots,P\}^m} P_{i_1,\dots,i_m}(f)$$

est une projection; nous allons établir qu'elle satisfait (R). Les propriétés (R-1) et (R-4) sont visiblement satisfaites. Notons :

$\Lambda_1 = \{(i_1,\dots,i_m) \in \{1,\dots,P\}^m$ tel que $A_{i_1,\dots,i_m} = \emptyset\}$,

$\Lambda_2 = \{(i_1,\dots,i_m) \in \{1,\dots,P\}^m$ tel que $1 \in \{i_1,\dots,i_m\}\}$,

$$\Lambda_3 = \{(i_1, \ldots, i_m) \in \{1, \ldots, P\}^m \text{ tel que } P \in \{i_1, \ldots, i_m\}\},$$

et $$\Lambda_4 = \{1, \ldots, P\}^m - (\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3).$$

Donnons nous $f \in E_{p,q}$; nous avons alors :

$$\|Q(f)\|^q = \sum_{(i_1, \ldots, i_m) \in \Lambda_2 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_4} \|P_{i_1, \ldots, i_m}(f)\|^q \leq \sum_{(i_1, \ldots, i_m) \in \Lambda_2 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_4} (1+\varepsilon)^q \|f_{\left| \bigcup_{k=1}^{m+1} S(X_{k, i_1, \ldots, i_m}) \right.}\|^q$$

d'après la construction de $P_{i_1, \ldots, i_m}$ donc

$$\|Q(f)\| \leq (1+\varepsilon) \|f_{\left| \bigcup_{k=1}^{m+1} S(X_k) \right.}\|$$

ce qui établit (R-2). Pour établir (R-3) fixons $k \in \{1, \ldots, m+1\}$; nous avons alors :

$$\|Q(X_k) - X_k\|^q = \sum_{(i_1, \ldots, i_m) \in \Lambda_2 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_4} \|P_{i_1, \ldots, i_m}(X_k) - X_{k, i_1, \ldots, i_m}\|^q .$$

Remarquons tout d'abord que, par construction, pour $(i_1, \ldots, i_m) \in \Lambda_4$

$$P_{i_1, \ldots, i_m}(X_k) = X_{k, i_1, \ldots, i_m} .$$

Deux cas sont à envisager :

1er cas : $k \in \{1, \ldots, m\}$. Par construction nous avons pour $(i_1, \ldots, i_m) \in \Lambda_3$

$$\|P_{i_1, \ldots, i_m}(X_k) - X_{k, i_1, \ldots, i_m}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|X_{k, i_1, \ldots, i_m}\| ,$$

Nous avons aussi :

$$\sum_{(i_1,\dots,i_m)\in\Lambda_2} \|P_{i_1,\dots,i_m}(X_k)-X_{k,i_1,\dots,i_m}\|^q = \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_m)\in\Lambda_2\\ i_k=1}} \|P_{i_1,\dots,i_m}(X_k)-X_{k,i_1,\dots,i_m}\|^q$$

$$+ \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_m)\in\Lambda_2\\ i_k\neq 1}} \|P_{i_1,\dots,i_m}(X_k)-X_{k,i_1,\dots,i_m}\|^q$$

$$\leq \frac{1}{N^{q/p}} \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_m)\in\Lambda_2\\ i_k=1}} \|X_{m+1,i_1,\dots,i_m}\|^q$$

$$+\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_m)\in\Lambda_2\\ i_k\neq 1}} \|X_{k,i_1,\dots,i_m}\|^q$$

donc $\|Q(X_k)-X_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{N^{1/p}} \leq \varepsilon$ d'après le choix de N .

2° cas: $k = m+1$. Par construction nous avons pour $(i_1,\dots,i_m) \in \Lambda_2$

$$\|P_{i_1,\dots,i_m}(X_{m+1}) - X_{m+1,i_1,\dots,i_m}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|X_{m+1,i_1,\dots,i_m}\| ;$$

Nous avons aussi :

$$\sum_{(i_1,\dots,i_m)\in\Lambda_3} \|P_{i_1,\dots,i_m}(X_{m+1})-X_{m+1,i_1,\dots,i_m}\|^q \leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_m)\in\Lambda_3\\ i_k=P}} \|P_{i_1,\dots,i_m}(X_{m+1})-X_{m+1,i_1,\dots,i_m}\|^q$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_m)\in\Lambda_3\\ i_k=P}} \frac{1}{N^{q/p}} \|X_{k,i_1,\dots,i_m}\|^q$$

$$\leq \frac{m}{N^{q/p}} .$$

donc $\|Q(X_{m+1})-X_{m+1}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{m^{1/q}}{N^{1/p}} \leq \varepsilon$ d'après le choix de N.

ce qui achève la démonstration par récurrence.

Le théorème se déduit alors de la propriété établie par récurrence, de la proposition 3 de [2] et des méthodes de perturbation (cf. lemme 2-4 de [1]) .

Puisque $(\ell_p\oplus\ell_p\oplus\dots)_q$ est l'image d'une projection de norme 1 de $(L_p\oplus L_p\oplus\dots)_q$ on a:

<u>Corollaire</u> : Pour tout réel $\varepsilon>0$, pour tout $1\leq p\leq\infty$ et pour tout $1\leq q\leq\infty$, l'espace $(\ell_p\oplus\ell_p\oplus\dots)_q$ a la $(1+\varepsilon)$-propriété d'approximation uniforme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. B. Johnson, H.P. Rosenthal et M. Zippin. On bases, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces. Israel J. Math. 9. (1971) p. 488-506.

[2] J. Lindenstrauss et L. Tzafriri. The uniform approximation property in Orlicz spaces. Israel J. Math. 23(1976) p. 142-155.

[3] A. Pełczyński et H.P. Rosenthal. Localization techniques in L^p spaces. Studia Math. 52 (1975) p. 263-289.

(Ce texte doit paraître dans Colloquium Mathematicum.)
