

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

F. LUST-PIQUARD

**Propriétés géométriques des sous-espaces invariants par
translation de $L^1(G)$ et $C(G)$**

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1977-1978), exp. n° 26, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1977-1978__A20_0>

© Séminaire analyse fonctionnelle (dit "Maurey-Schwartz")
(École Polytechnique), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E S U R L A G E O M E T R I E
D E S E S P A C E S D E B A N A C H
1977-1978

PROPRIETES GEOMETRIQUES DES SOUS-ESPACES INVARIANTS

PAR TRANSLATION DE $L^1(G)$ et $C(G)$

F. LUST-PIQUARD
(Université d'Orsay)

Soit G un groupe abélien compact, muni de sa mesure de Haar η . On note $L^1(G)$ l'espace $L^1(G, \eta)$, $L^\infty(G)$ son dual, $C(G)$ l'espace des fonctions continues sur G , $M(G)$ son dual.

Si Λ est un ensemble dans le groupe dual G , si B est un sous-espace de $M(G)$, on note

$$B_\Lambda(G) = \{b \in B \mid \hat{b}(\gamma) = 0 \forall \gamma \in G \setminus \Lambda\} .$$

Rappelons que tout sous-espace fermé invariant par translation de $L^1(G)$ ou $C(G)$ est de cette forme.

§ 1. LA PROPRIÉTÉ DE RADON-NIKODYM DANS LES SOUS-ESPACES INVARIANTS DE $L^1(G)$

Définition 1.1 [6] : Un espace de Banach B possède la propriété de Radon-Nykodym si tout opérateur linéaire continu

$$T : L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow B$$

(où μ est une mesure de probabilité) est représenté par une fonction fortement μ -mesurable et bornée, à valeurs dans B .

Théorème 1.1 : Soit Λ un ensemble dans un groupe discret \hat{G} . L'espace $L^1_\Lambda(G)$ possède la propriété de Radon-Nikodym si et seulement si $L^1_\Lambda(G) = M_\Lambda(G)$.

Démonstration : Vérifions d'abord que la condition est suffisante. L'espace $L^1_\Lambda(G)$ possède la propriété de Radon-Nikodym dès que ses sous-espaces séparables la possèdent. Un tel sous-espace est inclus dans un $L^1_{\Lambda'}(G)$, où Λ' est un sous-ensemble dénombrable de Λ . Si $L^1_{\Lambda'}(G) = M_{\Lambda'}(G)$, tout espace $L^1_{\Lambda'}(G)$ est un dual séparable, donc a la propriété de Radon-Nikodym.

Réciproquement, considérons un élément $\mu \in M_\Lambda(G)$ comme un convoluteur de $L^1(G)$ dans $L^1_\Lambda(G)$:

$$\forall f \in L^1(G), \forall \theta \in C(G), \quad \langle \mu * f, \theta \rangle = \int_G f(g) \langle \mu * \delta_g, \theta \rangle dg .$$

Si $L^1_\Lambda(G)$ a la propriété de Radon-Nikodym, la fonction

$$g \rightsquigarrow \mu * \delta_g$$

est presque partout à valeurs dans $L^1_\Lambda(G)$, donc μ est dans $L^1_\Lambda(G)$.

Définition 1.2 : Soit Λ un ensemble dans un groupe G discret. C'est un ensemble de Riesz si $L^1_\Lambda(G) = M_\Lambda(G)$.

Théorème 1.2 : Le produit de deux ensembles de Riesz est un ensemble de Riesz. Plus précisément, si $L^1_{\Lambda_i}(G_i) = M_{\Lambda_i}(G_i)$ ($i=1,2$), alors $L^1_{\Lambda_1 \times \Lambda_2}(G_1 \times G_2) = M_{\Lambda_1 \times \Lambda_2}(G_1 \times G_2)$.

Démonstration : On va vérifier les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 M_{\Lambda_1 \times \Lambda_2}(G_1 \times G_2) &\subset M_{\Lambda_1 \times \hat{G}_2}(G_1 \times G_2) \cap M_{\hat{G}_1 \times \Lambda_2}(G_1 \times G_2) \\
 (1) \qquad \qquad \qquad &= M_{\Lambda_1}(G_1) \hat{\otimes} M(G_2) \cap M(G_1) \hat{\otimes} M_{\Lambda_2}(G_2) \\
 &= L^1_{\Lambda_1}(G_1) \hat{\otimes} M(G_2) \cap M(G_1) \hat{\otimes} L^1_{\Lambda_2}(G_2) \\
 (2) \qquad \qquad \qquad &\subset L^1(G_1 \times G_2) \quad .
 \end{aligned}$$

Pour tout Λ dans \hat{G}_1 , l'espace $M_\Lambda(G_1) \hat{\otimes} M(G_2)$ est fermé dans $M_{\Lambda \times \hat{G}_2}(G_1 \times G_2)$, sa boule unité est dense dans la boule unité de $M_{\Lambda \times \hat{G}_2}(G_1 \times G_2)$ pour la topologie de la convergence simple sur les caractères de $G_1 \times G_2$. Si Λ_1 est un ensemble de Riesz, $M_{\Lambda_1}(G_1) \hat{\otimes} M(G_2)$ est le dual de $(C(G_1)/C_{\Lambda_1}(G_1)) \hat{\otimes} C(G_2)$, sa boule unité est fermée pour la topologie de la convergence simple sur les caractères de $G_1 \times G_2$. Ceci entraîne l'égalité (1). Pour obtenir l'égalité (2), il suffit de vérifier que l'orbite par $G_1 \times G_2$ d'un élément μ dans $L^1_{\Lambda_1}(G_1) \hat{\otimes} M(G_2) \cap M(G_1) \hat{\otimes} L^1_{\Lambda_2}(G_2)$ est compacte pour la norme de $M(G_1 \times G_2)$.

§ 2. LA PROPRIÉTÉ DE RADON-NIKODYM DANS LES SOUS-ESPACES INVARIANTS DE $C(G)$

Théorème 2.1 : Soit Λ un ensemble dans un groupe discret \hat{G} . L'espace $C_\Lambda(G)$ possède la propriété de Radon-Nikodym si et seulement si $C_\Lambda(G) = L^\infty_\Lambda(G)$.

La démonstration est analogue à celle du théorème 1.1, en considérant tout élément f dans $L^\infty_\Lambda(G)$ comme convoluteur de $L^1(G)$ dans $C_\Lambda(G)$.

Définition 2.1 : Un ensemble Λ dans un groupe discret \hat{G} est un ensemble de Rosenthal si $C_{\Lambda}(G) = L_{\Lambda}^{\infty}(G)$.

On peut construire des exemples d'ensembles de Rosenthal à l'aide du théorème suivant :

Théorème 2.2 : Soit Λ un ensemble dans un groupe discret \hat{G} . Supposons qu'il existe un homomorphisme \hat{h} , injectif, d'image dense, de \hat{G} dans un groupe compact \hat{H} , envoyant Λ dans un compact dénombrable E de \hat{H} . Alors Λ est un ensemble de Rosenthal.

Démonstration : Notons $I(E) = \{f \in \ell^1(H) \mid \hat{f}(E) = 0\}$.

L'espace $I(E)^{\perp} \subset \ell^{\infty}(H)$ est un dual séparable, d'après un théorème de Loomis [3] ; il a donc la propriété de Radon-Nikodym. Soit h l'homomorphisme (injectif, d'image dense) transposé de \hat{h} , envoyant H dans G . L'espace $C_{\Lambda}(G)$ est fermé dans $\ell^{\infty}(h(H))$, et s'identifie à un sous-espace fermé de $I(E)^{\perp}$. Le théorème 2.1 s'applique donc.

Les hypothèses du théorème 2.2 sont vérifiées, par exemple, dans le cas suivant : soit α un irrationnel dans $[0,1]$, soit h l'homomorphisme

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{T}$$

$$n \rightsquigarrow e^{2i\pi n\alpha} .$$

Soit $\Lambda = \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}$ une suite telle que $e^{2i\pi n_k \alpha} \rightarrow 1$.

Pour terminer ce paragraphe, citons deux problèmes ouverts :

① Le produit de deux ensembles de Rosenthal est-il un ensemble de Rosenthal ?

(Notons que $L_{\Lambda_1 \times \Lambda_2}^{\infty}(G_1 \times G_2)$ est le dual de $(L^1(G_1)/L_{\Lambda_1}^1(G_1)) \hat{\otimes} (L^1(G_2)/L_{\Lambda_2}^1(G_2))$).

② Si G est un groupe abélien compact métrisable, si $L^1(G)/L_{\Lambda}^1(G)$ ne contient pas de sous-espace fermé isomorphe à ℓ^1 , l'espace $C_{\Lambda}(G)$ a-t-il la propriété de Radon-Nikodim ?

(Un problème analogue se pose pour $L_{\Lambda}^1(G)$. Dans ce cas, la réponse est positive.)

§ 3. LA PROPRIÉTÉ " $C_{\Lambda}(G)$ NE CONTIENT PAS DE SOUS-ESPACE FERMÉ ISOMOR-
PHE À c_0 "

(On dira, pour abrégé, " $C_{\Lambda}(G)$ ne contient pas c_0 ".

Il s'agit là d'une propriété plus faible que la propriété de Radon-Nikodym

Théorème 3.1 : Soit Λ un ensemble dans un groupe discret \hat{G} . Si $C_{\Lambda}(G)$ ne contient pas c_0 , alors Λ est un ensemble de Riesz.

La réciproque de ce théorème est fautive. Par exemple \mathbb{Z}^+ est un ensemble de Riesz dans \mathbb{Z} , mais $C_{\mathbb{Z}^+}(\mathbb{T}) = A(D)$ contient c_0 .

Démonstration : Considérons l'élément $\mu \in M(G)$ comme convoluteur de $C(G)$ dans $C_{\Lambda}(G)$. Si $C_{\Lambda}(G)$ ne contient pas c_0 , μ est un convoluteur faiblement compact [5]. C'est aussi un convoluteur faiblement compact de $L^1(G)$ dans $L^1(G)$. D'après [6], il est représenté par une fonction fortement mesurable sur G , presque partout à valeurs dans $L^1(G)$. Comme dans la démonstration du théorème 1.1, on voit que μ est dans $L^1(G)$.

Nous allons maintenant indiquer une façon de construire des sous-espaces fermés isomorphes à c_0 dans les sous-espaces fermés de $C(G)$.

Soit K un espace topologique localement compact métrisable. Notons $C_0(K)$ l'espace des fonctions continues sur K , tendant vers zéro à l'infini, $C_0(K_d)$ l'espace, fermé pour la norme uniforme, engendré par les fonctions à support fini sur K . Tout élément de $C_0(K_d)$ définit un élément du bidual $C_0(K)''$, orthogonal aux mesures diffuses sur K .

Définition 3.1 [1] : Une suite (u_n) dans un espace de Banach B définit une série faiblement inconditionnellement convergente (ce qu'on notera f.i.c.) s'il existe une constante K telle que

$$\forall b' \in B', \forall N \quad \sum_{n=1}^{n=N} |\langle u_n, b' \rangle| \leq K \|b'\| .$$

Rappelons [1] que si B contient une série f.i.c. non inconditionnellement convergente, alors B contient c_0 .

Lemme 3.1 : Tout élément de $C_0(K_d)$ est la somme, pour $\sigma(C_0(K)'', M(K))$, d'une série f.i.c. d'éléments de $C_0(K)$.

Démonstration : Si f est la fonction caractéristique d'un point $k \in K$, il existe une suite (f_n) de fonctions de norme 1 dans $C_0(K)$, décroissante, et convergeant ponctuellement vers f . Alors

$$(i) \quad f_1 + (f_2 - f_1) + \dots + (f_N - f_{N-1}) \rightarrow f ; \quad \sigma(C_0(K)'', M(K))$$

$$(ii) \quad \forall \mu \in M(K) \quad \forall N \quad | \langle f_1, \mu \rangle | + | \langle f_2 - f_1, \mu \rangle | + \dots + | \langle f_N - f_{N-1}, \mu \rangle | \leq 3 \| \mu \| .$$

Si f est une fonction à support fini, il existe de même une série f.i.c. (u_n) convergeant vers f pour $\sigma(C_0(K)'', M(K))$, avec

$$\forall \mu \in M(K) \quad \forall N \quad \sum_{n=1}^{n=N} | \langle u_n, \mu \rangle | \leq 3 \| \mu \| \| f \|_{\infty} .$$

Enfin, si f est dans $C_0(K_d)$, f est la somme d'une série $\sum f_k$, normalement convergente dans $C_0(K_d)$, chaque f_k ayant un support fini, et les supports des f_k étant deux à deux disjoints. D'après ce qui précède, f est la somme d'une série f.i.c. d'éléments de $C_0(K)$:

$$\forall k \quad \forall N \quad \sum_{n=1}^{n=N} u_n^{(k)} \rightarrow f_k \quad , \quad \sigma(C_0(K)'', M(K))$$

$$\forall N \quad \sum_{n=1}^{n=N} \left(\sum_{k=1}^{k=\infty} u_n^{(k)} \right) \rightarrow f \quad , \quad \sigma(C_0(K)'', M(K))$$

$$\forall \mu \in M(K) \quad \forall N \quad \sum_{n=1}^{n=N} | \langle \sum_{k=1}^{k=\infty} u_n^{(k)}, \mu \rangle | \leq \sum_{k=1}^{k=\infty} \sum_{n=1}^{n=N} | \langle u_n^{(k)}, \mu \rangle | \leq 3 \| \mu \| \sum_{k=1}^{k=\infty} \| f_k \| .$$

Proposition 3.1 : Soit B un sous-espace fermé de $C_0(K)$. Supposons que $B^{\perp} \subset C_0(K)''$ contienne un élément de $C_0(K_d)$ n'appartenant pas à $C_0(K)$. Alors B contient c_0 .

Démonstration : D'après le lemme 3.1, cet élément est la somme, pour $\sigma(C_0(K)'', M(K))$, d'une série f.i.c. à termes dans $C_0(K)$. D'après un lemme de [4] et un lemme de [7], il est aussi la somme d'une série f.i.c. à termes dans B . De plus, cette série n'est pas inconditionnellement convergente.

Nous allons maintenant démontrer le

Théorème 3.1 : Si Λ est un ensemble de \mathbb{Z} , si $C_{\Lambda}(\mathbb{T})$ ne contient pas c_0 , la densité supérieure uniforme de répartition $\Delta^+(\Lambda)$ est nulle. Rappelons que $\Delta^+(\Lambda) = \overline{\lim}_n \sup_k \frac{\text{Card}\{\Lambda \cap [-n+k, n+k]\}}{2n+1}$.

Définition 3.2 : Soit G un groupe localement compact abélien. Une moyenne m sur $L^\infty(G)$ est une forme linéaire sur $L^\infty(G)$, invariante par translation, telle que

$$\langle m, 1 \rangle = \|m\| = 1 \quad .$$

(L'ensemble des moyennes sur $L^\infty(G)$ est compact pour la topologie $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$.)

Lemme 3.2 : Soit Λ un ensemble de \mathbb{Z} . Alors

$$\Delta^+(\Lambda) = \sup \langle 1_\Lambda, m \rangle$$

lorsque m parcourt l'ensemble des moyennes sur $\ell^\infty(\mathbb{Z})$.

(1_Λ désigne la fonction caractéristique de Λ .)

Démonstration : Posons $v_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{k=+n} \delta_k$. C'est un élément de $\ell^1(\mathbb{Z})$, positif, de norme 1. Par définition,

$$\Delta^+(\Lambda) = \overline{\lim} \|1_\Lambda * v_n\|_\infty \quad ,$$

et il existe une suite croissante d'entiers (n_j) telle que

$$\Delta^+(\Lambda) = \lim_j 1_\Lambda * v_{n_j}(k_j) = \lim_j \langle 1_\Lambda, v_{n_j} * \delta_{k_j} \rangle \quad .$$

Toute valeur d'adhérence de la suite $(v_{n_j} * \delta_{k_j})$ (suivant un filtre plus fin que le filtre des sections de \mathbb{N}), pour $\sigma(\ell^1(\mathbb{Z}), \ell^\infty(\mathbb{Z}))$ est une moyenne, car

$$\forall x \in \mathbb{Z} \quad \|v_n * \delta_x - v_n\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \longrightarrow 0$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} \quad \|v_{n_j} * \delta_{k_j} * \delta_x - v_{n_j} * \delta_{k_j}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \longrightarrow 0 \quad .$$

On en déduit

$$\Delta^+(\Lambda) \leq \sup_m \langle 1_\Lambda, m \rangle \quad .$$

Inversement, pour toute moyenne m sur $\ell^\infty(\mathbb{Z})$,

$\forall n$

$$\langle 1_{\Lambda}, m \rangle = \langle 1_{\Lambda} * v_n, m \rangle \leq \|1_{\Lambda} * v_n\|_{\infty}$$

$$\sup_m \langle 1_{\Lambda}, m \rangle \leq \underline{\lim} \|1_{\Lambda} * v_n\|_{\infty} \leq \Delta^+(\Lambda) \quad . \quad \blacksquare$$

Avant de démontrer le théorème 3.1, rappelons les résultats suivants :

- Sur les fonctions de $C(\bar{\mathbb{Z}})$ (où $\bar{\mathbb{Z}}$ désigne le dual du groupe \mathbb{T} muni de la topologie discrète), toutes les moyennes m sur $\ell^{\infty}(\mathbb{Z})$ coïncident avec la mesure de Haar η de $\bar{\mathbb{Z}}$: en effet, toute $f \in C(\bar{\mathbb{Z}})$ a une orbite par \mathbb{Z} relativement compacte pour la norme, il en est de même pour son enveloppe convexe ; la fermeture de cette enveloppe convexe contient la constante $\langle f, \eta \rangle$; alors

$$\langle m, f \rangle = \langle m, \langle f, \eta \rangle \rangle = \langle f, \eta \rangle \quad .$$

- Lemme 3.3 : Soit μ une mesure diffuse sur \mathbb{T} . Alors, pour toute moyenne m sur $\ell^{\infty}(\mathbb{Z})$, on a $\langle m, |\hat{\mu}|^2 \rangle = 0$.

Démonstration : $|\hat{\mu}|^2$ est la transformée de Fourier de la mesure diffuse $\sigma = \mu * \check{\mu}$ (pour tout borélien E dans \mathbb{T} , $\check{\mu}(E) = \overline{\mu(-E)}$). D'après [2], toutes les moyennes coïncident sur les transformées de Fourier des mesures. Il reste à voir que, pour une moyenne m ,

$$\langle m, \hat{\sigma} \rangle = 0 \quad .$$

Soit (v_n) une base de voisinages de $\{1\}$ dans \mathbb{T} , soit (v_n) une suite d'éléments positifs de norme 1 dans $\ell^1(\mathbb{Z})$, chaque \hat{v}_n ayant son support dans v_n . Toute valeur d'adhérence de (v_n) pour $\sigma(\ell^1(\mathbb{Z}), \ell^{\infty}(\mathbb{Z}))$ est une moyenne, et

$$\langle v_n, \hat{\sigma} \rangle = \langle \hat{v}_n, \sigma \rangle \rightarrow 0 \quad .$$

Démonstration du théorème 3.1 : Nous allons montrer que, si $\Delta^+(\Lambda)$ est positif, l'espace $C_{\Lambda}^{\perp \perp}(\mathbb{T})$ contient un élément non nul de $C_0(\mathbb{T}_d)$. Le lemme 3.1 entraînera alors le théorème.

Soit m une moyenne sur $\ell^{\infty}(\mathbb{Z})$ telle que $\langle 1_{\Lambda}, m \rangle$ soit non nul, et soit (v_{α}) une famille d'éléments de $\ell^1(\mathbb{Z})$, positifs, de norme 1, convergeant vers m pour $\sigma(\ell^1(\mathbb{Z}), \ell^{\infty}(\mathbb{Z}))$. La famille $1_{\Lambda} \hat{v}_{\alpha}$ est dans $C_{\Lambda}(\mathbb{T})$ et converge sur tout élément de $M(\mathbb{T})$. En effet, en tout point $t \in \mathbb{T}$,

$$1_{\Lambda}^{\wedge} v_{\alpha}(t) = \langle e^{-int} 1_{\Lambda}, v_{\alpha} \rangle \longrightarrow \langle e^{-int} 1_{\Lambda}, m \rangle$$

et pour toute mesure diffuse $\mu \in M(\mathbb{T})$,

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha} |\langle 1_{\Lambda}^{\wedge} v_{\alpha}, \mu \rangle| &= \lim_{\alpha} |\langle 1_{\Lambda} v_{\alpha}, \hat{\mu} \rangle| \leq \lim_{\alpha} \langle v_{\alpha}, |\hat{\mu}| \rangle = \langle m, |\hat{\mu}| \rangle \\ &\leq \langle m, |\hat{\mu}|^2 \rangle = 0 \quad , \end{aligned}$$

d'après le lemme 3.2.

Il reste à vérifier que la fonction $\varphi(t)$ définie par

$$t \rightsquigarrow \langle e^{-int} 1_{\Lambda}, m \rangle$$

est dans $C_0(\mathbb{T}_d)$. Or c'est la transformée de Fourier d'une forme linéaire sur $C(\overline{\mathbb{Z}})$ définie par

$$f \rightsquigarrow \langle f 1_{\Lambda}, m \rangle \quad .$$

Si f est dans $C(\overline{\mathbb{Z}})$,

$$|\langle f 1_{\Lambda}, m \rangle| \leq \langle |f|, m \rangle = \langle |f|, \eta \rangle = \|f\|_{L^1(\overline{\mathbb{Z}})} \leq \|f\|_{L^2(\overline{\mathbb{Z}})} \quad ,$$

la fonction φ est dans $\ell^2(\mathbb{T}_d)$, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. Bessaga et A. Pełczyński, On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces, *Studia Math.* vol. 17 (1958).
- [2] W.F. Eberlein, Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions, *Trans. A.M.S.* vol. 67 (1949) (theorem 11.2).
- [3] Y. Katznelson, An introduction to harmonic analysis, New-York-Wiley (1968).
- [4] E. Odell, H.P. Rosenthal, A double dual characterization of separable Banach spaces containing ℓ^1 , *Israel J. Math.* Vol. 20 (1975) (Lemma 1).
- [5] A. Pełczyński, Banach spaces on which every w.u.c. operator is weakly compact, *C. R. Acad. Polon. des Sciences*, vol. X.12 (1962).
- [6] L. Schwartz, Exposés IV, V, VI, *Séminaire Maurey-Schwartz 1974-75*, Ecole Polytechnique.
- [7] I. Singer, Bases in Banach spaces, Springer Verlag (1970) (chapitre II, 15.7).
