

# SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. T. LAPRESTE

**Type, cotype et mesures de Levy sur les espaces de Banach**

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1977-1978), exp. n° 23, p. 1-15*

[http://www.numdam.org/item?id=SAF\\_1977-1978\\_\\_A17\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAF_1977-1978__A17_0)

© Séminaire analyse fonctionnelle (dit "Maurey-Schwartz")  
(École Polytechnique), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   S U R   L A   G E O M E T R I E  
D E S   E S P A C E S   D E   B A N A C H  
1977-1978

TYPE, COTYPE ET MESURES DE LEVY  
SUR LES ESPACES DE BANACH

J. T. LAPRESTE  
(Université de Clermont-Ferrand)



Dans ce qui suit,  $E$  est un espace de Banach non nécessairement séparable et  $F$  une mesure borélienne positive sur  $E$  vérifiant la condition suivante :

Pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , la mesure  $F_\varepsilon$  définie sur  $E$  par :

$$(c) \quad F_\varepsilon(A) = F(A \cap \{\|\cdot\| \geq \varepsilon\})$$

est finie et de Radon sur  $E$ .

### INTRODUCTION.

Tout d'abord, on notera  $F_0$ ,  $F^-$  et  $\tilde{F}$  les mesures boréliennes sur  $E$  définies par

$$F_0(A) = F(A \setminus \{0\}) ; F^-(A) = F(-A) ; \tilde{F} = F + F^- ,$$

et si  $0 < \varepsilon < \alpha \leq \infty$ ,  $F_{\varepsilon, \alpha}$  désignera la mesure sur  $E$  définie par

$$F_{\varepsilon, \alpha}(A) = F(A \cap \{\varepsilon \leq \|\cdot\| < \alpha\}) .$$

Rappelons à présent quelques définitions.

Définition 0.1 : Soit  $F$  une mesure finie positive et de Radon sur  $E$ . La loi "exponentielle" associée à  $F$  n'est autre que la probabilité de Radon

$$e(F) = e^{-F(E)} \left( \delta_0 + \sum_{k \geq 1} \frac{F^{*k}}{k!} \right)$$

sur  $E$ .

Rappelons que

- $e(\lambda \delta_0) = e(0) = \delta_0$ ,  $\lambda \geq 0$ .
- $e(\lambda \delta_a) =$  loi de Poisson usuelle de saut  $a$  ( $\lambda \geq 0$ ).
- $e(F + G) = e(F) * e(G)$ , si  $G$  est également une mesure de Radon finie sur  $E$ .

Par suite :

$$e(F) = e(F - F\{0\} \delta_0) = e(F_0) .$$

Ainsi dans le cas où  $F$  est une mesure positive vérifiant (c) avec  $F_0(E) < +\infty$  et  $F\{0\} = +\infty$ , on peut encore définir  $e(F)$  en posant :

$$e(F) = e(F_0) \quad .$$

Définition 0.2 : On appelle loi de Poisson sur  $E$  toute probabilité de Radon  $\mu$  sur  $E$  de la forme

$$\mu = e(F) \quad ,$$

avec  $F$  mesure de Radon finie positive sur  $E$ .

Définition 0.3 : On appelle mesure de Lévy sur  $E$  toute mesure borélienne positive sur  $E$  vérifiant (c) et telle que la famille  $\{e(F_\varepsilon) ; \varepsilon > 0\}$  soit équitendue à une translation près.

Définition 0.4 : On appelle loi de Poisson généralisée sur  $E$ , toute probabilité de Radon  $\mu$  sur  $E$  pour laquelle il existe une mesure de Lévy  $F$  sur  $E$  et une famille  $(a_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  de points de  $E$  tels que  $(e(F_\varepsilon) * \delta_{a_\varepsilon} ; \varepsilon > 0)$  soit équitendue et tels que  $\mu$  soit adhérent au filtre  $(e(F_\varepsilon) * \delta_{a_\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ .  $F$  sera appelé exposant de  $\mu$ . Il est bien connu que

1) Si  $\mu$  et  $\mu'$  sont deux lois de Poisson généralisées sur  $E$  ayant même exposant, alors

$$\mu = \delta_a * \mu' \quad \text{avec } a \in E \quad .$$

2) Si  $\mu$  est une probabilité de Radon indéfiniment divisible sur  $E$ ,  $\mu$  s'écrit de manière unique

$$\mu = \gamma * \nu \quad ,$$

avec  $\gamma$  gaussienne centrée et  $\nu$  loi indéfiniment divisible (Tortrat [7]).

Ces deux résultats peuvent être d'ailleurs obtenus comme corollaire du théorème suivant dû à Dettweiler [2] qui caractérise les fonctions caractéristiques des lois indéfiniment divisibles.

Théorème 0.5 : Une probabilité de Radon  $\mu$  sur  $E$  est indéfiniment divisible ssi il existe

$\alpha$ ) un élément  $a \in E$ ,

β) une forme quadratique positive  $Q$  sur  $E$ ,  
 γ) un compact convexe équilibré  $K$  et une mesure de Lévy  $F$   
 telle que  $F(K^c) < +\infty$ ,  
 tels que la transformée de Fourier  $\hat{\mu}$  et  $\mu$  s'écrive pour  $y \in E'$

$$\hat{\mu}(y) = \exp[i\langle a, y \rangle - Q(y) + \int_E h_k \langle x, y \rangle dF(x)]$$

où  $h_k \langle x, y \rangle = e^{i\langle x, y \rangle} - 1 - i\langle x, y \rangle 1_K(x)$ ,  $x \in E$ ,  $y \in E'$  (le triplet  $(a, Q, F)$  associé à  $h_k$  étant alors unique).

Il est classique (c'est le théorème de Lévy-Khintchine) que si  $E = \mathbb{R}^n$  (ou même  $E = H$  avec  $H$  espace de Hilbert séparable) qu'une mesure  $F$  vérifiant (c) est la mesure de Lévy d'une loi i.d. de Radon sur  $E$  ssi

$$(0) \quad \int_{\{\|x\| \leq 1\}} \|x\|^2 dF(x) < +\infty .$$

Cette condition permet évidemment dans le théorème précédent, quitte à modifier la partie Dirac de la représentation, de remplacer le noyau  $h_k$  par le noyau classique<sup>♦</sup>

$$K_2(x, y) = e^{i\langle x, y \rangle} - 1 - \frac{i\langle x, y \rangle}{1 + \|x\|^2}$$

Dans le cas d'un espace de Banach général, la condition (0) peut n'être ni nécessaire, ni suffisante pour que  $F$  soit une mesure de Lévy et le noyau n'est pas adapté dans tous les cas (cf. [1] pour un contre-exemple).

Dans ce qui suit, nous allons donner tout d'abord quelques conditions nécessaires (dans le cas général) pour qu'une mesure  $F$  sur un espace de Banach soit une mesure de Lévy ; puis nous verrons comment des conditions sur la géométrie de l'espace de Banach considéré (type ou cotype) permettent de donner des résultats sur l'intégrabilité de certaines fonctions de la norme par rapport à des mesures de Lévy.

♦ Utiliser le noyau  $K_2$  revient à prendre dans la définition 0.4

$$a_\varepsilon = \int_{\{\|x\| \geq \varepsilon\}} \frac{x}{1 + \|x\|^2} dF(x) .$$

Rappelons que  $e^{(F_\varepsilon)^\wedge}(y) = \exp \int (e^{i\langle x, y \rangle} - 1) dF_\varepsilon(x)$  comme utiliser  $h_k$  revenait à considérer

$$a_\varepsilon = \int_{\{\|x\| \geq \varepsilon\}} 1_K(x) \cdot x dF(x) .$$

§ 1. LE CADRE GENERAL.

Indiquons deux lemmes classiques qui nous servirons par la suite.

Lemme 1.1 : Soit  $I$  un ensemble d'indices et  $(\mu_i)_{i \in I}$ ,  $(\nu_i)_{i \in I}$  deux familles de probabilités de Radon symétriques. Alors si l'ensemble  $\{\mu_i * \nu_i\}_{i \in I}$  est équitendu (étroitement relativement compact) il en est de même des ensembles  $\{\nu_i\}_{i \in I}$  et  $\{\mu_i\}_{i \in I}$ .

Lemme 1.2 : Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux probabilités de Radon ( $\nu$ -symétrique). Si  $\varphi$  est une fonction positive borélienne sur  $E$  telle que pour un  $A > 0$

$$\forall x \forall y$$

$$\varphi(x) \leq A(\varphi(x+y) + \varphi(x-y)) \quad .$$

Alors

$$\int \varphi \, d\mu \leq 2A \int \varphi \, d\mu * \nu \quad .$$

Remarque : ① Si  $f$  est monotone sur  $\mathbf{R}^+$  et  $\varphi = f(\|\cdot\|)$ , on peut prendre  $A = 1$ .

② Si  $C$  est un borélien convexe, on peut prendre  $\varphi = 1_{C^c}$  avec  $A = 1$ .

Nous allons à présent donner un théorème décrivant une propriété d'intégrabilité d'exponentielles de la norme pour des mesures de Poisson généralisées dont les exposants sont à support borné.

Théorème 1.3 (Yurinskii [5]) : Soit  $\mu$  une loi de Poisson généralisée d'exposant  $F$ . Notons  $\tilde{\mu}_\alpha$  la loi de Poisson généralisée (symétrique) d'exposant  $\tilde{F}_{0,\alpha}$ . Alors

①  $\forall \alpha > 0, \exists \lambda(\alpha) > 0$  tel que  $\forall \lambda < \lambda(\alpha)$

$$\int \exp(\lambda \|x\|) \, d\tilde{\mu}_\alpha(x) < +\infty \quad .$$

② De plus, on peut choisir  $\lambda(\alpha)$  en sorte que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lambda(\alpha) = +\infty \quad .$$

Preuve de la partie (1) du théorème 1.3 : Elle est basée sur le lemme suivant :

Lemme 1.4 : Si  $(X_i)_{i=1, \dots, n}$  sont  $n$  variables aléatoires indépendantes dans  $E$  telles que

$$\sup \|X_i\| \leq c \text{ p.s. avec } c < +\infty ,$$

alors pour tout entier  $\ell > 0$

$$P(\sup_{k \leq n} \|\sum_{i=1}^k X_i\| > 3\ell c) \leq (P(\sup_{k \leq n} \|\sum_{i=1}^k X_i\| > c))^\ell .$$

et donc

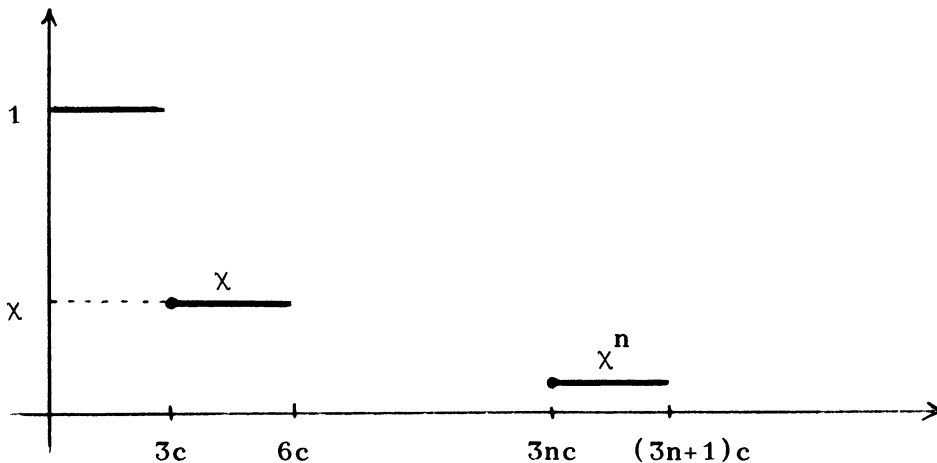
$$P(\|\sum_{i=1}^n X_i\| > 3\ell c) \leq (2P(\|\sum_{i=1}^n X_i\| > c))^\ell .$$

Admettons un instant ce lemme.

Soit un réel  $c > \alpha$  tel que :

$$X = 12 \tilde{\mu}_\alpha \{ \|x\| \geq \frac{c}{2} \} < 1 .$$

Et soit  $\psi$  la fonction en escalier suivante :



Nous allons montrer que sur  $\mathbf{R}^+$

$$g(t) := \sup_{0 < \varepsilon < \alpha} c(\tilde{F}_{\varepsilon, \alpha})(\|\cdot\| > t) \leq \psi(t) ;$$

ce qui impliquera l'assertion avec

$$\lambda < \frac{1}{3c} \text{Log} \frac{1}{\lambda} .$$



Pour cela introduisons pour tout entier  $n$  et tout  $\varepsilon > 0$ ,  $n$  variables indépendantes à valeurs dans  $\mathbb{E}$  et de loi  $e(\frac{\tilde{F}_{\varepsilon, \alpha}}{n})$  soit  $Y_{1n}^\varepsilon, \dots, Y_{nn}^\varepsilon$  ; puis posons

$$X_{in}^\varepsilon = Y_{in}^\varepsilon \mathbf{1}_{\|Y_{in}^\varepsilon\| \leq c}, \quad i = 1, \dots, n$$

et notons  $\mu_{\varepsilon, n}$  la loi commune des v.a.  $X_{1n}^\varepsilon, \dots, X_{nn}^\varepsilon$ . Trivialement

$$\mu_{\varepsilon, n} = (e(\frac{\tilde{F}_{\varepsilon, \alpha}}{n})) \mathbf{1}_{\{\|\cdot\| \leq c\}} + e(\tilde{F}_{\varepsilon, \alpha}/n) (\|\cdot\| < c) \delta_0$$

$$\sup_{i \leq n} \|X_{i, n}^\varepsilon\| \leq c, \quad \text{p.s.}$$

Remarquons tout d'abord que  $\mu_{\varepsilon, n}^*$  converge étroitement vers  $e(\tilde{F}_{\varepsilon, \alpha})$  quand  $n \rightarrow \infty$ , car

$$e(\frac{1}{n} \tilde{F}_{\varepsilon, \alpha}) = e^{-\frac{1}{n} [\tilde{F}_{\varepsilon, \alpha}]} (\delta_0 + \frac{1}{n} \tilde{F}_{\varepsilon, \alpha}) + G_n$$

$$\mu_{n, \varepsilon} = e^{-\frac{1}{n} [\tilde{F}_{\varepsilon, \alpha}]} (\delta_0 + \frac{1}{n} \tilde{F}_{\varepsilon, \alpha}) + G'_n$$

avec

$$[G_n] = [G'_n] = O(\frac{1}{n^2}).$$

Par suite

$$\begin{aligned} g(t) &\leq \sup_{\substack{0 < \varepsilon < \alpha \\ n \geq 1}} \mu_{\varepsilon, n}^*(\|\cdot\| > t) \\ &= \sup_{\substack{0 < \varepsilon < \alpha \\ n \geq 1}} P(\|X_{1n}^\varepsilon + \dots + X_{nn}^\varepsilon\| > t). \end{aligned}$$

D'où, par le lemme 1,

$$g(3\ell c) \leq \sup_{\substack{0 < \varepsilon < \alpha \\ n \geq 1}} (2 P(\|X_{1n}^\varepsilon + \dots + X_{nn}^\varepsilon\| > c))^\ell$$

pour tout entier  $\ell > 0$ . Mais

$$P(\|X_{1n}^\varepsilon + \dots + X_{nn}^\varepsilon\| > c) \leq P(\|Y_{1n}^\varepsilon + \dots + Y_{nn}^\varepsilon\| > c) \\ + P(\sup_{i \leq n} \|Y_{in}^\varepsilon - X_{in}^\varepsilon\| \neq 0)$$

et

$$P(\sup_{i \leq n} \|Y_{in}^\varepsilon - X_{in}^\varepsilon\| \neq 0) \leq P(\sup_{i \leq n} \|Y_{in}^\varepsilon\| > c) \\ \leq P(\sup_{k \leq n} \|Y_{1n}^\varepsilon + \dots + Y_{kn}^\varepsilon\| > \frac{c}{2}) \leq 2 P(\|Y_{1n}^\varepsilon + \dots + Y_{kn}^\varepsilon\| > \frac{c}{2}) ;$$

et donc

$$P(\|X_{1n}^\varepsilon + \dots + X_{nn}^\varepsilon\| > c) \leq 3 P(\|Y_{1n}^\varepsilon + \dots + Y_{kn}^\varepsilon\| > \frac{c}{2}) \\ = 3 e(\tilde{F}_{\varepsilon, \alpha})(\|\cdot\| > \frac{c}{2}) \\ \leq 6(\tilde{\mu}_\alpha)(\|\cdot\| > \frac{c}{2}) = \frac{\chi}{2} .$$

Par suite

$$g(3\ell c) \leq \chi^\ell , \quad \forall \ell \text{ entier } > 0$$

et donc

$$g(t) \leq \psi(t) , \quad \forall t \geq 0 , \quad \text{cqfd. } \blacksquare$$

Preuve de la partie ② du théorème 1.3 : Elle dépend du lemme :

Lemme 1.5 : Soit  $\tilde{F}$  une mesure de Lévy symétrique sur  $E$  et  $\tilde{\mu}_\alpha$  la loi de Poisson généralisée symétrique d'exposant  $\tilde{F}_{0, \alpha}$ . Alors  $\tilde{\mu}_\alpha$  converge vers  $\delta_0$ .

Si on admet ce lemme, alors on sait également que  $\tilde{\mu}_\alpha$  converge vers  $\delta_0$  en probabilité. En particulier  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mu_\alpha\{\|x\| > \frac{c}{2}\} = 0$ . En regardant la démonstration de l'alinéa ① on voit que c'est tout ce qu'il nous faut pour que l'alinéa ② soit réalisé. QED

Démontrons à présent les deux lemmes.

Preuve du lemme 1.4 : Soit  $\ell$  entier  $> 1$ . Soit

$$\tau(\cdot) = \inf\{i ; \|X_1 + \dots + X_i\| > 3(\ell - 1)c\} .$$

On a

$$\begin{aligned}
P(\sup_{k \leq n} \|X_1 + \dots + X_k\| > 3\ell c) &= \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n} P(\sup_{k \leq n} \|X_1 + \dots + X_k\| > 3\ell c, \tau = i) \\
&\leq \sum_{1 \leq i \leq n} P(\sup_{i \leq k \leq n} \|X_1 + \dots + X_k\| > 3\ell c, \tau = i) \\
&\leq \sum_{1 \leq i \leq n} P(\sup_{i+1 \leq k \leq n} \|X_{i+1} + \dots + X_k\| > 2c, \tau = i) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n} P(\sup_{i+1 \leq k \leq n} \|X_{i+1} + \dots + X_k\| > 2c), P(\tau = i) \\
&\leq \sup_{1 \leq i < k \leq n} P(\sup_{i < k \leq n} \|X_{i+1} + \dots + X_k\| > 2c) \sum_{1 \leq i \leq n} P(\tau = i) \\
&\leq P(\sup_{k \leq n} \|X_1 + \dots + X_k\| > c) \cdot P(\sup_{k \leq n} \|X_1 + \dots + X_k\| > 3(\ell - 1)c) .
\end{aligned}$$

Et par récurrence sur  $\ell$  on obtient le lemme 1. ■

Preuve du lemme 1.5 : Soit  $\tilde{\mu}$  un point adhérent au filtre des  $\tilde{\mu}_\alpha$  en 0 ;  $\tilde{\mu}$  est une loi indéfiniment divisible et donc on peut écrire  $\tilde{\mu} = \gamma * \nu$  où  $\gamma$  est gaussienne centrée et  $\nu$  loi de Poisson généralisée (ici toutes deux symétriques !). De plus, si  $\alpha < \alpha'$  on peut écrire

$$\tilde{\mu}_{\alpha'} = \tilde{\mu}_\alpha * e(\tilde{F}_{\alpha, \alpha'}) .$$

La relative compacité étroite de l'ensemble des  $(\tilde{\mu}_\alpha)_{\alpha > 0}$  et de l'ensemble réduit à  $\tilde{\mu}_\alpha$  implique par le lemme classique celle de la famille  $(e(\tilde{F}_{\alpha, \alpha'}))_{\alpha > 0}$  et donc en passant à la limite sur un ultrafiltre on en déduit que pour tout  $\alpha' > 0$   $\exists \nu_{\alpha'}, \tilde{\mu}_{\alpha'} = \tilde{\mu} * \nu_{\alpha'}$  (la convolution est étroitement continue).

$\gamma$  est donc un facteur gaussien de  $\tilde{\mu}_{\alpha'}$ , ce qui implique  $\gamma = \delta_0$ . Maintenant  $\nu$  est un facteur de Poisson généralisé de  $\tilde{\mu}_{\alpha'}$ , ce qui signifie en particulier que si  $G$  est l'exposant de  $\nu$  :

---

•  $\tau = i \Rightarrow |X_1 + \dots + X_i| \leq 3(\ell - 1)c + c < 3\ell c$  ;  
si  $\|X_1 + \dots + X_k\| > 3\ell c$  avec  $i \leq k \leq n$ , et si  $\tau = i$

$$\begin{aligned}
3\ell c < \|X_1 + \dots + X_k\| &\leq \|X_1 + \dots + X_{i-1}\| + \|X_i\| + \|X_{i+1} + \dots + X_k\| \\
&\leq 3(\ell - 1)c + c + \|X_{i+1} + \dots + X_k\| .
\end{aligned}$$

$\forall \varepsilon \forall \alpha'$

$$G_\varepsilon \leq F_{0,\alpha'}$$

et donc  $\forall \varepsilon$

$$G_\varepsilon = 0, \text{ soit } \nu = \delta_0. \quad \text{Q.E.D.}$$

Corollaire 1.6 (Simone Chevet) : Notons  $R_\alpha$  l'opérateur de covariance de  $E'$  dans  $E'^*$  tel que

$$\langle R_\alpha(x'), y' \rangle = \int_{\{\|x\| < \alpha\}} \langle x', x \rangle \langle y', y \rangle dF(x) \quad x', y' \in E'.$$

Alors pour tout  $\alpha > 0$

$$\textcircled{1} \int_{\{\|x\| \leq \alpha\}} \langle x, y' \rangle^2 dF(x) = \frac{1}{2} \int \langle x, y' \rangle^2 d\tilde{\mu}_\alpha(x) \quad (\text{avec les notations du théorème 1.3}).$$

théorème 1.3).

$$\textcircled{2} R_\alpha \text{ est à valeurs dans } E \text{ et est nucléaire de } E' \text{ dans } E.$$

## § 2. LA CONDITION DE COTYPE.

Définition 2.1 : Soit  $\Phi$  une fonction de  $\mathbf{R}^+$  dans lui-même continue, croissante et nulle en 0. On dira que l'espace de Banach  $E$  est de cotype  $\Phi$  s'il existe une constante  $K$  ( $K > 0$ ) telle que :

$\forall A > 0, \exists B > 0, \forall n \forall (X_i)_{i=1 \dots n}$  v.a.i. symétriques à valeurs dans  $E$  on ait

$$E \Phi(K \|\sum_{i=1}^n X_i\|) \leq A \implies \sum_{i=1}^n E \Phi(\|X_i\|) \leq B.$$

Remarque : Notons que si  $\Phi(t) = t^p$  la définition 2.1 se ramène à une des définitions équivalentes du type  $p$ -Rademacher (cf. [3]).

Lemme 2.2 : Soit  $F$  une mesure de Radon et  $\Phi$  une fonction mesurable de  $\mathbf{R}^+$  dans lui-même vérifiant pour un couple  $(M, \lambda)$  de réels positifs :

$$\forall t \in \mathbf{R}^+ \quad \Phi(t) \leq M e^{\lambda t}.$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int \Phi(\|x\|) d\epsilon\left(\frac{F}{n}\right) = \int \Phi(\|x\|) dF(x).$$

Preuve : Soit  $X$  une v.a. telle que  $\mathcal{L}(X) = e(F)$  et  $(X_{j,n})_{j=1,\dots,n}$  ;  $n \in \mathbb{N}$  une famille de v.a.i. avec

$$\forall j, \forall n \quad \mathcal{L}(X_{j,n}) = e\left(\frac{F}{n}\right) ;$$

on a alors :

$$\begin{aligned} E \phi(\|X_{1,n}\|) &= \int \phi(\|x\|) de\left(\frac{F}{n}\right)(x) , \\ &= \left[ \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} \frac{1}{k!} \int \phi(\|x\|) dF^{*k}(x) \right] e^{-\frac{F(E)}{n}} , \end{aligned}$$

( $\phi(0) = 0$  !).

$$\text{Soit :} \quad n E \phi(\|X_{1,n}\|) = e^{-\frac{F(E)}{n}} \int \phi(\|x\|) dF(x) + R_n ,$$

$$\text{avec} \quad R_n = e^{-\frac{F(E)}{n}} \frac{1}{n} \left[ \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{k-2}} \frac{1}{k!} \int \phi(\|x\|) dF^{*k}(x) \right] .$$

Comme  $\frac{F(E)}{n}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini, il suffit de voir que  $R_n$  tend vers 0 dans les mêmes conditions. Mais :

$$\begin{aligned} \int \phi(\|x\|) dF^{*k}(x) &= \int \phi\left(\left\| \sum_{i=1}^k x_i \right\| dF(x_1) \dots dF(x_k) \right) , \\ &\leq M \left[ \int e^{\lambda \|x\|} dF(x) \right]^k . \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{n^{k-2}} \frac{1}{k!} \int \phi(\|x\|) dF^{*k}(x) \leq \frac{M}{n^{k-2}} \frac{N^k}{k!} ;$$

il est alors facile de constater que le second membre est le terme général d'une série convergente dont la somme est une fonction décroissante de  $n$ , ce qui implique le résultat. ■

Théorème 2.3 : Soit  $\phi$  une fonction croissante, continue, nulle en zéro de  $\mathbb{R}^+$  dans lui-même ; vérifiant pour un couple  $(M, \lambda)$  de réels positifs :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \phi(t) \leq M e^{\lambda t} .$$

Alors si  $E$  est de cotype  $\phi$ , une condition nécessaire pour qu'une mesure  $F$  soit de Lévy sur  $E$  est que

$$\int_{\{\|x\| \leq 1\}} \phi(\|x\|) dF(x) < +\infty .$$

Preuve : Par le théorème 1.3 on peut trouver  $\alpha > 0$  tel que

$$\int \Phi(K \|x\|) d\tilde{\mu}_\alpha(x) = \frac{\bar{A}}{2} < +\infty ,$$

où  $\tilde{\mu}_\alpha$  est la loi de Poisson généralisée symétrique d'exposant  $\tilde{F}_{0,\alpha}$ , et  $K$  la constante de cotype.

Le lemme 1.2 implique alors que pour tout  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \alpha$ )

$$\int \Phi(K \|x\|) d\tilde{F}_{\varepsilon,\alpha}(x) \leq \bar{A} .$$

Soient alors  $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ ,  $n$  v.a.i. avec  $\mathcal{L}(X_i) = e(\frac{\tilde{F}_{\varepsilon,\alpha}}{n})$ . Alors la propriété de cotype implique

$$n \int \Phi(\|x\|) d\tilde{F}_{\frac{\varepsilon,\alpha}{n}}(x) \leq B ;$$

et en passant à la limite sur  $n$

$$\int \Phi(\|x\|) d\tilde{F}_{\varepsilon,\alpha}(x) \leq B ,$$

par le lemme 2.2.

Le théorème de Beppo-Lévy et la finitude de  $F_{\alpha,1}$  achèvent la preuve. ■

Remarques : (1) Si  $\Phi = t^p$ , on retrouve ici les résultats de De Acosta ( $p = 2$ ), Mandrekar ( $p \geq 2$ ).

(2) Evidemment l'intégrabilité de  $\Phi$  permet de changer le noyau dans la formule de Lévy-Khintchine et de prendre ici

$$K_\Phi(x,y) = e^{i\langle x,y \rangle} - 1 + i\langle x,y \rangle \frac{1}{1 + \Phi(x)} .$$

(3) Si  $\Phi = t^p$ , la "réciproque" de 1.5 est vraie en ce sens que :

Théorème : Si pour toute mesure de Lévy sur  $E$ ,  $F$  la condition

$$\int_{\{\|x\| \leq 1\}} \|x\|^p dF(x) < +\infty$$

est réalisée, alors  $E$  est de cotype  $p$ -Rademacher (cf. [4] ou [6]).

§ 3. LA CONDITION DE TYPE.

Définition 3.1 : Soit  $\Phi$  une fonction continue croissante de  $\mathbf{R}^+$  dans lui-même, nulle en 0. On dira que E est de type  $\Phi$  s'il existe une constante  $K > 0$  et une application B de  $\mathbf{R}^+$  dans lui-même telles que

$$\alpha) \quad \forall n \quad \forall (X_i)_{i=1 \dots n} \text{ v.a.i. symétriques à valeurs dans E}$$

$$\sum_{i=1}^n E \Phi(\|X_i\|) \leq A \implies E \Phi\left(K \left\| \sum_{i=1}^n X_i \right\| \right) \leq B(A) \quad .$$

$\beta)$  B est continue et nulle en 0.

Remarques : ① Si  $\Phi(t) = t^p$  ( $1 \leq p \leq 2$ ) on retrouve une des déformations équivalentes du type p-Rademacher (cf. [3]).

② La condition  $\beta)$  évite certaines trivialités et sera utilisée dans la suite.

Si par exemple  $\Phi$  est une fonction bornée, la condition  $\alpha)$  est réalisée pour tout espace de Banach E. Mais si  $\Phi(t) = 0(t)$  à l'origine, on n'obtient pas pour autant un contrôle sur la convergence (en probabilité) de la série  $\sum_{i=1}^{+\infty} X_i$ , ce qui nous intéresse ici.

Lemme 3.2 : Soit  $\Phi$  une fonction continue croissante de  $\mathbf{R}^+$  dans lui-même, nulle en 0 ; si E est un espace de type  $\Phi$  et F une mesure de Radon finie sur E, alors

$$\forall A > 0 \quad \int \Phi(\|x\|) dF(x) \leq A$$

$$\implies \int \Phi(K \|x\|) d e(F)(x) \leq B(A) \quad ,$$

où K et B sont respectivement la constante et l'application intervenant dans la définition du cotype.

Preuve : Pour chaque entier  $n > 0$ , posons :

$$\beta_n = e^{\frac{1}{n} \tilde{F}(E)} - 1 - \frac{1}{n} \tilde{F}(E) \quad (= o(\frac{1}{n^2}))$$

et

$$\mu_n = \left[ (1 + \beta_n) \delta_0 + \frac{1}{n} \tilde{F} \right] e^{-\frac{1}{n} \tilde{F}(E)} \quad .$$

Il est facile de voir que  $\mu_n$  est une probabilité de Radon sur  $E$  et que  $\mu_n^{*n}$  converge étroitement vers  $e(\tilde{F})$ .

Supposons donc que  $\int \Phi(\|x\|) dF(x) \leq A$ , alors :

$$\begin{aligned} \int \Phi(\|x\|) d\mu_n(x) &= \frac{1}{n} e^{-\frac{1}{n} \tilde{F}(E)} \int \Phi(\|x\|) dF(x) , \\ &\leq \frac{A}{n} ; \end{aligned}$$

donc par la propriété de type, on a

$$\int \Phi(K \|x\|) d\mu_n^{*n}(x) \leq B ,$$

puis

$$\int \Phi(K \|x\|) d e(F)(x) \leq B ,$$

par convergence étroite des mesures. ■

**Théorème 3.3** : Soit  $E$  un espace de Banach de type  $\Phi$ . Alors une condition suffisante pour qu'une mesure  $F$  (vérifiant (c)) soit de Lévy sur  $E$  est que :

$$\int_{\{\|x\| \leq 1\}} \Phi(\|x\|) dF(x) < +\infty .$$

**Preuve** : On peut évidemment (quitte à remplacer  $F$  par  $\tilde{F}$ ) supposer  $F$  symétrique. Posons  $G_1 = F_{1, \infty}$  et  $G_n = F_{1/n, 1}$  ( $n \geq 2$ ). Soient alors  $(X_i)_{i=1}^{+\infty}$  des v.a.i. telles que  $\mathcal{L}(X_i) = e(G_i)$ ,  $i = 1, 2$

$$\mathcal{L}(X_i) = e(G_i) , \quad i = 1, 2$$

$$\mathcal{L}(X_i) = e(G_i - G_{i-1}) , \quad i > 2 .$$

Il est clair que  $\mathcal{L}(\sum_{i=2}^n X_i) = e(G_n)$ ,  $n \geq 2$ . D'autre part la condition

$$\int_{\{\|x\| \leq 1\}} \Phi(\|x\|) dF(x) < +\infty ,$$

implique que :

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \int \Phi(\|x\|) dF_{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}}(x) = 0 ;$$

et le lemme 3.1 nous donne



$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \int \Phi(K \|x\|) de(F_{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}})(x) = 0 ,$$

condition qui implique aisément la convergence en probabilité de la série  $\sum_{i=1}^{+\infty} X_i$  vers une v.a., donc la loi est nécessairement une loi de Poisson généralisée d'exposant F. ■

Remarque : En toute justice dans la partie (1) de la démonstration du théorème 3.3, on a seulement vu que si  $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$  la suite  $(e(F_{\varepsilon_n}))_n$  est étroitement convergente, mais cel implique en fait que  $(e(F_{\varepsilon}))_{\varepsilon > 0}$  est équitendue. En effet si  $e(F_{\varepsilon_n}) \xrightarrow{e^t} \mu$  pour tout  $\delta > 0$  tel que

$$\mu(K_\delta^c) \leq \delta .$$

Mais, puisque les  $e(F_{\varepsilon})$ ,  $\varepsilon > 0$ , divisent  $\mu$  et sont symétriques, on a (lemme I.2 avec  $\varphi = 1$ )

$$\sup_{\varepsilon > 0} e(F_{\varepsilon})(K_\delta^c) \leq 2\mu(K_\delta^c) \leq 2\delta$$

et donc F est une mesure de Lévy.

Ici encore dans de le cas  $\Phi(t) = t^p$  on peut énoncer :

Théorème : Si pour toute mesure F sur E vérifiant (c) la condition

$$\int_{\{\|x\| \leq 1\}} \|x\|^p dF(x) < +\infty$$

est suffisante pour que F soit une mesure de Lévy, alors E est de type p-Rademacher.

On renvoie à [4] ou [6] pour une démonstration.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Araujo, On infinitely divisible laws in  $C[0,1]$ , Proc. A.M.S. 51 (1975) 179-185.
- [2] E. Dettweiler, Grenzwertsätze für Wahrscheinlichkeitsmaße and Badrikianshen Radme, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 34 (1976) 285-311.

- [3] J. Hoffmann-Jørgensen, Probability in Banach spaces, preprint.
- [4] G.G. Hamedani et V. Mandrekar, Lévy-Khinchine representation and Banach spaces of type and cotype, (1977) (à paraître dans *Studia Math.* vol. 63).
- [5] V.V. Yurinski, On infinitely divisible distributions, *Theor. Prob. and its appl.* 19 (1974) 297-308.
- [6] A. Araujo et E. Giné, Cotype and Lévy measures in Banach spaces, preprint.
- [7] A. Tortrat, Sur la structure des lois i.d. dans les espaces vectoriels, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* 11 (1969) 311-326.

-----