SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. T. LAPRESTE

# Suites écartables dans les espaces de Banach

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1977-1978), exp. nº 20, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1977-1978____A15_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   S U R   L A   G E O M E T R I E

D E S   E S P A C E S   D E   B A N A C H

1977-1978

# SUITES ECARTABLES DANS LES ESPACES DE BANACH

J.T. LAPRESTE

(Université de Clermont-Ferrand)

Exposé No XX                                                    31 Mars 1978

## INTRODUCTION

Dans l'exposé III du présent séminaire, B. Beauzamy, reprenant un résultat de Brunel-Sucheston [2], a démontré la proposition suivante :

Proposition 0.1 (extraction de bonnes sous-suites) : Soit $(x_n)$ une suite bornée dans un espace de Banach E. On peut trouver une sous-suite $(e_n)$ de la suite $(x_n)$ (appelée "bonne sous-suite") et une semi-norme L, définie sur l'ensemble des suites réelles à support fini, telles que $\forall\, a \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu \in \mathbb{N}$, $\nu < n_1 < n_2 < \dots$,

$$\left| \left\| \sum_i a_i\, e_{n_i} \right\| - L(a) \right| \leq \varepsilon \quad .$$

De plus, si la suite $(e_i)$ ne converge pas dans E, L est une norme sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$.

Dans ce dernier cas, il est commode de considérer L comme une norme sur l'espace vectoriel engendré par les $(e_n)$ et on posera

$$\left| \sum_{i=1}^{k} a_i\, e_i \right| = L(a) \qquad \text{si} \quad a = (a_1, \dots, a_k, 0, \dots) \quad .$$

Soit F le complété de l'espace normé ainsi construit. Dans F la suite $(e_n)$ jouit de la propriété d'invariance suivante :
$\forall\, a \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, $\forall\, n_1 < n_2 < \dots < n_k$

$$\left| \sum_{i=1}^{k} a_i\, e_u \right| = \left| \sum_{i=1}^{k} a_i\, e_{n_i} \right| \quad .$$

C'est cette propriété que nous nous proposons d'étudier ici, ou du moins la variante suivante :

Définition 0.2 : Une suite $(x_n)$ d'un espace de Banach E sera dite écartable s'il existe une constante K, $K > 0$, telle que pour toute suite strictement croissante d'entiers $(n_i)$ et tout élément $\alpha \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$

$$K^{-1} \left\| \sum_i \alpha_i\, x_{n_i} \right\| \leq \left\| \sum \alpha_i\, x_i \right\| \leq K \left\| \sum_1 \alpha_i\, x_{n_i} \right\| \quad .$$

Si la constante peut être prise égale à 1, on dira que la suite est métriquement écartable.

## § 1. INCONDITIONNALITE DES SUITES ECARTABLES.

Commençons par un lemme donnant quelques propriétés triviales des suites écartables.

Lemme 1.1 : Soit $(x_n)$ une suite écartable non constante. Alors :

α) $(x_n)$ est bornée et $\inf_n \|x_n\| > 0$ ;

β) $(x_n)$ est linéairement indépendante ;

γ) $(x_n)$ n'a pas de sous-suite de Cauchy pour la norme.

Preuve : α) $(x_n)$ n'étant pas constante, il existe $n_o$ avec $x_{n_o} \neq 0$. Alors pour chaque n

$$\|x_n\| \geq K^{-1} \|x_{n_o}\|$$

$$\|x_n\| \leq K \|x_{n_o}\| \quad .$$

β) Soit $(\alpha_i)_{i \leq i \leq n}$ une famille finie de réels tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_n \neq 0 \quad .$$

Alors $$\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\| = 0 = \|\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i + \alpha_n x_{n+p}\|$$

pour tout entier p.

Donc pour tout entier p, $x_n = x_{n+1}$ soit $\|x_n - x_p\| = 0$ pour tout n, contradiction.

γ) La preuve est identique alors à celle de α). ■

Pour éviter les trivialités, toutes les suites écartables que nous considèrerons dans ce qui suit seront supposées non constantes.

Remarque : Si l'on considère l'espace vectoriel engendré par une suite écartable $(x_n)$, il est clair, par le lemme précédent, que la formule

$$|||\sum_i \alpha_i x_i||| = \sup_{(n_i)} \|\sum \alpha_i x_{n_i}\| \quad ,$$

où $(\alpha_i) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et le supremum est pris sur toutes les suites strictement croissantes d'entiers, définit sans ambiguité une norme équivalente à la norme de départ, et pour laquelle $(x_i)$ est métriquement écartable.

En général, l'écartabilité d'une suite n'entraîne pas sa basicité. Un exemple simple est le suivant : si $(e_n)$ désigne la base canonique de l'espace $\ell_2$, alors la suite $y_n = e_1 + e_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, est métriquement écartable et n'est évidemment pas basique.

Cependant la proposition suivante montre qu'en fait des conditions assez faibles impliquent non seulement la basicité mais encore l'inconditionnalité d'une suite écartable (ce résultat est essentiellement dû à A. Brunel et L. Sucheston [2]).

Proposition 1.2 : Si $(x_n)$ est une suite écartable d'un espace de Banach, il est équivalent de dire :

$\alpha$) (resp. $\alpha'$)) il existe une famille de points $(y_n)$ appartenant à l'enveloppe convexe de $(x_n)$, qui tend vers 0 fortement (resp. faiblement) ;

$\beta$) (resp. $\beta'$)) les moyennes de Césaro de la suite $(x_n)$ tendent vers 0 fortement (resp. faiblement) ;

$\gamma$) (resp. $\gamma'$)) une sous-suite de la suite des moyennes de Césaro de $(x_n)$ tend vers 0 fortement (resp. faiblement) ;

$\delta$) la suite $(x_n)$ tend vers 0 faiblement ;

$\varepsilon$) la suite $(x_n)$ est basique inconditionnelle et n'est pas équivalente à la base canonique de $\ell_1$.

Preuve : Notons tout d'abord que toutes les propriétés décrites ci-dessus étant propres à la classe d'isomorphie de l'espace engendré par la suite $(x_n)$, la remarque suivant le lemme 1.1 permet de supposer $(x_n)$ métriquement écartable.
D'autre part, les conditions de $\alpha$) à $\delta$) impliquent toutes trivialement $\alpha$) et de même, compte-tenu de l'écartabilité, les propriétés de $\alpha$) à $\gamma'$) sont toutes impliquées par $\gamma$). Il suffit donc de voir que l'on a : $\gamma) \Rightarrow \delta)$ ; $\varepsilon) \Rightarrow \gamma)$ et $\alpha) \Rightarrow \varepsilon)$.

$\gamma) \Rightarrow \delta)$. Si $\delta$) n'était pas réalisé, on pourrait trouver (par écartabilité) un vecteur y et un nombre $\eta > 0$ tel que $\forall n, \langle x_n, y\rangle > \eta$, et il est clair qu'alors aucune sous-suite de la suite des moyennes de Cesaro de $x_n$ ne peut converger vers 0.

$\varepsilon) \Rightarrow \gamma)$. B. Beauzamy a montré dans [1] (démonstration de la proposition 3)) que la négation de $\gamma$) impliquait pour la suite $(x_n)$ l'équivalence à la base canonique de $\ell_1$ .... $((x_n)$ est inconditionnelle !)

$\alpha) \Rightarrow \varepsilon)$. Soit donc $y_n = \sum_{i=1}^{q_n} \alpha_i^{(n)} x_i$, $\alpha_1^{(n)} > 0$, $\sum_{i=1}^{q_n} \alpha_i^{(n)} = 1$

pour tout n et telle que $y_n$ tende vers 0 en norme ; il est clair que l'on peut supposer que les nombres $\alpha_1^{(n)}$ sont tous rationnels positifs. Soit $\alpha_i^{(n)} = \frac{p_i}{N(n)}$, $i = 1,\ldots,q_n$, $n \in \mathbb{N}$, avec $\forall$ n

$$\sum_i p_1^{(n)} = N(n) \quad .$$

A présent pour montrer l'inconditionnalité de $(x_n)$, il suffit de voir que

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} a_i\, e_i\right\| \geq \left\|\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{p} a_i\, e_i\right\|$$

pour chaque p, chaque $(a_i)_{i\leq p}$ et chaque j, $1 \leq j \leq p$.

Soit n tel que $\|y_n\| \leq \frac{\varepsilon}{|a_j|}$ .

On écrit par écartabilité :

$$\left\|\sum_1^p a_i\, e_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{j-1} a_i\, e_i + a_j\, e_{j+k} + \sum_{i=j+1}^{p} a_i\, e_{i+q_n+1}\right\| ;$$

on répète $p_1^{(n)}$ fois l'égalité avec $k = 1$

$p_2^{(n)}$ fois l'égalité avec $k = 2$ ,

$\vdots$

$p_{q_n}^{(n)}$ fois l'égalité avec $k = q_n$ ,

en sommant et divisant par N(n), on obtient :

$$\left\|\sum_1^p a_i\, e_i\right\| \geq \left\|\sum_1^{j-1} a_i\, e_i + a_j\Big(\sum_{k=1}^{a_n} \alpha_i^{(n)}\, e_{j+k}\Big) + \sum_{i=j+1}^{p} a_i\, e_{i+q_n+1}\right\| ,$$

$$\geq \left\|\sum_1^{j-1} a_i\, e_i + \sum_{j+1}^{p} a_i\, e_i\right\| - \varepsilon \quad . \qquad \text{Q.E.D.} \quad \blacksquare$$

De cette proposition, on déduit le corollaire :

<u>Corollaire 1.3</u> : Soit E un espace de Banach faiblement séquentiellement complet, alors toute suite basique écartable de E est inconditionnelle.

Preuve : Soit $(x_i)$ une suite écartable de E. Deux cas peuvent se produire :

α) il existe une sous-suite $(x_i')$ de $(x_i)$ qui n'a pas de sous-suite faiblement Cauchy, alors un résultat fameux de H.P. Rosenthal [6] implique qu'une sous-suite de $(x_i')$ (et donc $(x_i)$ tout entière par écartabilité) est équivalente à la base canonique de $\ell_1$.

β) Chaque sous-suite de $(x_i)$ admet une sous-suite de Cauchy faible. Si l'on suppose alors la basicité de $(x_i)$, cette suite de Cauchy faible qui converge puisque E est f.s.c., ne peut le faire que vers 0,et la proposition précédente achève la démonstration. ■

On est alors naturellement amené à la question suivante :

Problème 1.4 : Si dans un espace de Banach E toutes les suites basiques écartables sont inconditionnelles, l'espace est-il faiblement séquentiellement complet ?

La réponse est raisonnablement négative, ne serait-ce que parce qu'il existe des espaces de Banach comme l'espace de Tsirelson [3] qui ne possèdent aucune suite écartable non constante ; malheureusement tous les exemples connus de tels espaces sont réflexifs ....

Il est possible cependant de donner des conditions dans lèsquelles l'équivalence a lieu, c'est le but de la

Proposition 1.5 : Soit F un espace de Banach satisfaisant une des conditions suivantes :

(1) F est un sous-espace d'un espace à base inconditionnelle,

(2) F a une base écartable.

Alors F est f.s.c. si et seulement si toute suite écartable dans F est inconditionnelle.

Preuve : Nous n'avons que le "si" à prouver, mais dans les deux cas F est f.s.c. dès qu'il ne contient pas de sous-espace isomorphe à $c_o$, et cette dernière assertion est une conséquence du lemme qui suit. ■

Lemme 1.6 : $c_o$ possède une base écartable conditionnelle.

Preuve : Ce n'est évidemment pas sa base canonique $(e_n)$ qui elle est écartable et inconditionnelle. Mais si on pose $x_n = \sum_{p=1}^{n} e_p$ , $x_n$ est métriquement écartable et conditionnelle. ∎

## § 2. ESPACES POSSEDANT UNE UNIQUE SUITE ECARTABLE.

Que peut-on dire d'un espace où non seulement les suites basiques écartables, mais encore toutes les suites écartables (non constantes) sont inconditionnelles ?

On a le résultat suivant :

Proposition 2.1 : Soit E un espace de Banach tel que toutes les suites écartables (non constantes !) soient inconditionnelles, alors chacune d'elle est équivalente à la base canonique de $\ell_1$.

Preuve : Il suffit de montrer qu'aucune de ces suites ne peut converger vers 0.
Soit donc $(x_i)$ une suite écartable tendant faiblement vers 0. Soit z appartenant au sous-espace engendré par $(x_{2i})_{i\in\mathbb{N}}$, alors la suite $y_j = z + x_{2j+1}$ est écartable et non basique si $z \neq 0$ (a fortiori non inconditionnelle !). ∎

En fait de tels espaces existent :

Proposition 2.2 : Dans un espace de Schur toute suite écartable non constante est équivalente à la base canonique de $\ell_1$.

Preuve : Rappelons qu'un espace de Banach E est dit de Schur si les convergences faibles et fortes des suites coïncident sur E.
Une suite écartable dans E ne peut tendre faiblement vers 0 .... ∎

L'espace $\ell^1$ est évidemment l'espace de Schur le plus simple, mais on peut également citer $\ell_1 \hat{\otimes}_\varepsilon \ell_1$, le dual de l'espace de Hagler [4], et pour toute suite $X_n$ d'espaces de dimension finie l'espace $\ell_1(X_n)$.
Ce dernier exemple donne une motivation à la proposition suivante :

Proposition 2.3 : Soit E un espace de Banach possédant une base inconditionnelle écartable et $F = (\bigoplus_n X_n)_E$ où chaque $X_n$ est de dimension finie, alors si E possède une unique suite basique écartable (à une équivalence près), F possède la même propriété.

Pour démontrer ce théorème, donnons un lemme qui est le calque pour les décompositions de Schauder d'un résultat classique sur les suites basiques dû à Bessaga et Pełczynski.

Lemme 2.4 : Si l'espace de Banach E admet une décomposition de Schauder en espace de dimension finie et si $(y_n)$ est une suite de E telle que

α) $(y_n)$ est bornée et $\inf_n \|y_n\| > 0$ ;

β) $(y_n)$ converge faiblement vers 0.

Alors il existe une sous-suite de $(y'_n)$ de $(y_n)$ équivalente à une suite bloc-basique de la décomposition de Schauder.

La démonstration suit celle donnée dans [5].

Démontrons à présent la proposition 2.3.

1) Soit $(e_n)$ possède une sous-suite sans sous-suite faiblement Cauchy, et donc le résultat de Rosenthal déjà cité implique, avec l'écartabilité, que $(e_n)$ est équivalente à la base canonique de $\ell_1$ ; et F est isomorphe à $\ell_1(x_n)$ qui est un espace de Schur.

2) Soit toute sous-suite de $(e_n)$ admet une sous-suite faiblement Cauchy. Alors F est réflexif. En effet, si ce n'était pas le cas, E ne le serait pas non plus et contiendrait $\ell_1$ ou $c_o$. Mais $c_o$ a deux suites basiques écartables non équivalentes (cf. lemme 1.6 ) et la base canonique de $\ell_1$ n'est pas faiblement Cauchy.

Donc si $(x_n)$ est une suite basique écartable, $(x_n)$ tend faiblement vers 0, donc à l'aide du lemme on peut trouver une bloc-base de la décomposition de Schauder équivalente à $(x_n)$, soit $u_n = \sum_{q=p_n+1}^{p_n+1} v_q$ avec pour chaque q $v_q \in x_q$.

Comme $(x_n)$ est écartable, $u_n$ l'est également, mais

$$\| \sum_{n>1} \alpha_n u_n \|_F = \| \sum_{n\geq 1} \alpha_n \sum_{q=p_n+1}^{p_{n+1}} \|v_q\| e_q \|$$

et donc $u_n$ est équivalente à une bloc-base de $e_n$. Ce qui achève la preuve. ■

Corollaire 2.5 : Soit $1 \leq p < +\infty$, si $(X_n)$ est une suite d'espaces de dimension finie, toute suite basique écartable dans $\ell^p(X_n)$ est équivalente à la base canonique de $\ell^p$.

Il est bien connu [7] que $\ell_p$ possède une unique suite sous-symétrique (à une équivalence près). Aussi la proposition 2.3 achève la preuve. ■

Remarquons qu'il n'est pas possible d'affaiblir beaucoup les hypothèses de la proposition. On sait que l'espace d(a,p) (espace de Lorentz) contient $\ell_p$ dans chaque sous-espace de dimension infinie mais possède une base symétrique non équivalente à la base canonique de $\ell_p$.

## § 3. SUITES BASIQUES ECARTABLES CONDITIONNELLES.

Jusqu'alors nous n'avons vu qu'un seul exemple de suite basique écartable conditionnelle : la base sommante de $c_o$ (lemme 1.6 ). Cette base possède la propriété suivante : si $(\alpha_i)$ est une famille de réels positifs, alors

$$\left\|\sum_1^p \alpha_n e_n\right\| = \sum_1^p \alpha_n \quad .$$

Donnons à présent la définition [7] :

Définition 3.1 : Une suite basique $(x_n)$ sera dite de type $\ell_1^+$ si il existe un nombre $\delta > 0$ tel que pour toute famille $(\alpha_i)$ de scalaires positifs on ait

$$\left\|\sum_i \alpha_i x_i\right\| > \delta \sum_i \alpha_i \quad .$$

On a alors la :

Proposition 3.2 : Soit $(x_n)$ une suite basique écartable de type $\ell_1^+$, il est équivalent de dire

1) l'espace vectoriel fermé engendré par $(x_n)$ est f.s.c. ;
2) $(x_n)$ n'est pas de Cauchy faible ;
3) $(x_n)$ est équivalente à la base canonique de $\ell_1$ ;
4) $(x_n)$ est inconditionnelle.

Preuve : 1) ⇒ 2). Si $(x_n)$ était de Cauchy faible, étant basique, elle convergerait faiblement vers 0 et donc par la proposition 1.2, les moyennes de Cesaro de $(x_n)$ tendraient vers 0 en norme, mais on a pour tout entier p :

$$\frac{1}{p} \left\|\sum_1^p x_n\right\| \geq \delta \quad , \text{ contradiction.}$$

2) ⇒ 3). Si $(x_n)$ n'est pas de Cauchy faible, par l'argument de Rosenthal déjà souvent répété, $(x_n)$ est, par écartabilité, équivalente à la base canonique de $\ell_1$.

A présent, 3) ⇔ 4) et 3) ⇒ 1) sont évidentes. ■

Le résultat sans doute plus intéressant suivant montre que nous avons ici toutes les suites basiques écartables conditionnelles.

Proposition 2.3 : Soit $(x_n)$ une suite écartable basique, une et une seule des deux assertions suivantes est réalisée :

(α) $(x_n)$ tend faiblement vers 0 ;

(β) $(x_n)$ est de type $\ell_1^+$.

En remplaçant la norme de l'espace engendré par les $(x_n)$ par une norme équivalente, on peut toujours supposer que $(x_n)$ est métriquement écartable, et il suffit évidemment de voir que si $(x_n)$ ne tend pas faiblement vers 0, elle est de type $\ell_1^+$.

Or si $(x_n)$ ne tend pas faiblement vers 0, la proposition 1.2 montre que les moyennes de Cesaro de $(x_n)$ ne tendent pas fortement vers 0 et même qu'il existe $\delta > 0$ avec

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \left\|\frac{1}{n} \sum_1^n x_p\right\| > \delta \quad .$$

On va en déduire que pour toute famille finie $(\alpha_i)$ de réels positifs de somme 1 on a encore :

$$\left\|\sum_i \alpha_i \, x_i\right\| > \delta \quad .$$

Il suffit évidemment de le montrer pour des $\alpha_i$ rationnels. Supposons donc que

$$\alpha_i = \frac{p_i}{N} \quad p_i, N \in \mathbb{N} \text{ et } \sum p_i = N \quad .$$

Ecrivons pour $k = 1,\dots,p_1$

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} p_i \; e_i \right\| = \left\| p_1 \; e_k + \sum_{i=2}^{k} p_i \; e_{i+p_1} \right\| ,$$

on en déduit par l'inégalité triangulaire

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} p_i \; e_i \right\| \geq \left\| \sum_{k=1}^{p_1} e_k + \sum_{i=2}^{k} p_i \; e_{i+p_1} \right\| .$$

En réitérant convenablement le procédé, on a finalement

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} p_i \; e_i \right\| \geq \left\| \sum_{i=1}^{N} e_i \right\| \geq N \, \delta \quad ,$$

soit $$\left\| \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \; e_i \right\| \geq \delta \quad . \qquad \text{QED} \quad \blacksquare$$

<u>Remarque</u> : La basicité de $(x_n)$ n'est pas intervenue dans la démonstration qui précède ...

Nous avons considéré au paragraphe 1 les espaces dans lesquels toutes les suites basiques écartables sont inconditionnelles (propriété B.E.I.). Nous allons nous intéresser ici à la super-réflexivité assòciée.

Evidemment, de la proposition 1.3 on peut déduire que tout espace super-f.s.c. satisfait super-B.E.I.

En particulier

<u>Proposition 3.4</u> : 1) Tout espace uniformément convexifiable satisfait super-B.E.I. ;

2) tout sous-espace d'un espace de type $\mathcal{L}_p$ satisfait super-B.E.I. $(1 \leq p = +\infty)$.

1) est trivial, puisque ces espaces sont les super-réflexifs. Le seul résultat à démontrer dans 2) est celui pour $p = 1$. Mais tout espace finiment représentable dans un espace $\mathcal{L}_1$ est un sous-espace d'un $L^1(\mu)$ pour une mesure $\mu$ et donc il est f.s.c. ! $\blacksquare$

<u>Proposition 3.5</u> : Si un espace satisfait super-B.E.I., alors il est super-réflexif dès qu'il est B-convexe.

S'il n'était pas super-réflexif, on pourrait trouver [2'] un espace de Banach G finiment représentable dans E avec une base écartable de type $\ell_1^+$. On aurait donc par la proposition 2.2, $\ell_1$ finiment représentable dans E. ■

<u>Conjecture</u> : Super-B.E.I. est équivalente à super-f.s.c.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] B. Beauzamy, Propriétés de Banach-Saks et modèles étalés, Séminaire sur la Géométrie des Espaces de Banach 1977-78, exposé III.

[2] A. Brunel et L. Sucheston, On sequences invariant under spreading, Lecture Notes 526, Springer Verlag.

[2'] A. Brunel et L. Sucheston, Equal sign additive sequences in Banach spaces, J. Funct. An. Vol. 21 t. 3 (Mars 1976) 286-304.

[3] T. Figiel et W.B. Johnson, An uniformly convex Banach space which contains no $\ell_p$, Compositio Math. 29, 2 (1974) 179-190.

[4] J. Hagler, A counterexample to several questions about Banach spaces, preprint.

[5] J. Lindenstrauss et L. Tzafriri, Classical Banach spaces, Lecture Notes 338, Springer Verlag.

[6] H.P. Rosenthal, A characterization of Banach spaces containing $\ell_1$, Proc. N.A.S. 71 No 6 (1974) 2411-2413.

[7] I. Singer, Bases in Banach spaces I, Springer Verlag.


-----