Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

S. Chevet

Séries de variables aléatoires gaussiennes à valeurs dans $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$. Application aux produits d'espaces de Wiener abstraits

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1977-1978), exp. nº 19, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1977-1978____A14_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   S U R   L A   G E O M E T R I E

D E S   E S P A C E S   D E   B A N A C H

1977-1978

SERIES DE VARIABLES ALEATOIRES GAUSSIENNES A VALEURS DANS $E \hat{\otimes}_{\varepsilon} F$. APPLICATION AUX PRODUITS D'ESPACES DE WIENER ABSTRAITS.

S. CHEVET

(Université de Clermont-Ferrand)

Exposé No XIX

17 Mars 1978

Dans tout cet exposé $(g_i)_i$ et $(g_{ij})_{i,j}$ seront des suites de variables aléatoires gaussiennes indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$ (i.e. de moyenne nulle et de variance un) et définies sur un certain espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.

§ 1. INTRODUCTION.

Soit E un Banach et $(x_i)_i$ une suite d'éléments de E. Si $E = \ell^p$ on sait reconnaître si la suite $(\sum_{i\leq n} x_i\, g_i)_n$ est presque sûrement bornée ou presque sûrement convergente : en fait [12], si $1 \leq p < \infty$, $(\sum_{i\leq n} x_i\, g_i)_n$ est p.s. bornée (ou converge p.s.) si et seulement si

$$(1.1) \qquad \sum_k [\sum_i |\langle x_i , e_k\rangle|^2]^{p/2} < +\infty$$

(avec $(e_k)_k$ base canonique de ℓ^p).

Par contre, si $E = \ell^p \hat{\otimes}_\varepsilon \ell^q$ avec $1 \leq p,\ q < \infty$, le comportement de la suite $(\sum_{i\leq n} x_i\, g_i)_n$ est mal connu ; une des raisons est que l'on connaît mal les propriétés banachiques de $\ell^p \hat{\otimes}_\varepsilon \ell^q$. [Notez que :

(i) $\ell^p \hat{\otimes}_\varepsilon \ell^q$ contient c_o si $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}< 1$ [7]

(ii) $\ell^p \hat{\otimes}_\varepsilon \ell^q$ a une base de Schauder mais pas de base de Schauder inconditionnelle ;

(iii) $\ell^p \hat{\otimes}_\varepsilon \ell^q$ admet une décomposition de Schauder inconditionnelle si et seulement si $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}< 1$ (cf. [1], [5] et [8]).]

Dans cet exposé on va étudier certaines séries de variables aléatoires gaussiennes indépendantes à valeurs dans $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ (par exemple de la forme $\sum_{i,j} x_i \otimes y_j\, g_{ij}$) ; et donner une application à la théorie des espaces de Wiener abstraits (cf. théorème (4.1)).

§ 2. NOTATIONS ET RAPPELS.

Pour toute famille $(f_i)_{i\in I}$ d'éléments de $L^o(\Omega,\mathcal{F},P)$, $\bigvee_{i\in I} f_i$ désignera la borne supérieure des f_i, $i \in I$, dans le lattice $L^o(\Omega,\mathcal{F},P;\overline{\mathbb{R}})$. Pour tout Banach E, $U_{E'}$ désignera la boule unité (fermée) de son dual muni de la topologie induite par la topologie faible $\sigma(E',E)$. Enfin pour simplifier l'écriture nous utiliserons aussi la

<u>Notation</u> (2.1) : Soit E un Banach et $(x_i)_i$ une suite d'éléments de E. $M_2[(x_i)_i]$ ou $M_2[(x_i)_i;E]$ désignera le nombre

$$\sup_{x' \in U_{E'}} \left(\sum_i |<x',x_i>|^2\right)^{1/2} .$$

Si ce nombre est fini, la suite $(x_i)_i$ est dite scalairement dans ℓ^2.

Si $0 < p < \infty$, $\|(x_i)_i\|_p$ ou $\|(x_i)_i\|_{p,E}$ désignera le nombre

$$\sup_n \left(\mathbb{E}\|\sum_{i \le n} x_i\ g_i\|^p\right)^{1/p} .$$

On vérifie facilement que :

(2.1) $$M_2[(x_i)_i] \le \beta_p\ \|(x_i)_i\|_p \quad \text{avec } \beta_p = (\mathbb{E}|g_1|^p)^{-1/p} \quad ;$$

(2.2) pour toute suite $(\alpha_i)_i$ de nombres réels,

$$\|(\alpha_i\ x_j)_{i,j}\|_p = \left(\sum_i \alpha_i^2\right)^{1/2} . \|(x_i)_i\|_p$$

(avec convention $0.\infty = 0$).

En outre il est bien connu [6] que $\|.\|_p$ est une norme quasi-complète sur l'espace vectoriel

$$\{(x_i)_i\ ;\ (x_i)_i \in E^{\mathbb{N}}\ ;\ \|(x_i)_i\|_p < \infty\}$$

(espace note $\mathcal{B}_\gamma(E)$). De plus :

(2.3) $(\sum_{i \le n} x_i\ g_i)_n$ est p.s. bornée si et seulement si il existe un réel $p > 0$ tel que $\|(x_i)_i\|_p < +\infty$ (cf. [6] par exemple) ;

(2.4) Si A' est une partie de $U_{E'}$ dont l'enveloppe disquée fermée dans $\sigma(E',E)$ est égale à $U_{E'}$, on a :

$$\|(x_i)_i\|_p = \sup_n \left(\mathbb{E} \bigvee_{x' \in A'} |\sum_{i \le n} <x_i,x'>g_i|^p\right)^{1/p} \quad ;$$

de plus si $(x_i)_i$ est scalairement dans ℓ^2

$$\|(x_i)_i\|_p = \left(\mathbb{E} \bigvee_{x' \in A'} |\sum_i <x_i,x'>g_i|^p\right)^{1/p} \quad ;$$

et si $\sum_i x_i\, g_i$ converge presque sûrement

$$\|(x_i)_i\|_p = (\mathbb{E}\,\|\sum_i x_i\, g_i\|^p)^{1/p} \quad .$$

D'autre part dans l'étude des séries de variables aléatoires gaussiennes on est souvent amené à utiliser le théorème suivant :

Théorème de comparaison (Sudakov-Fernique) [4] : Soit $X : T \to L^0(\Omega',\mathcal{F}',P')$ et $Y : T \to L^0(\Omega,\mathcal{F},P)$ deux fonctions aléatoires réelles gaussiennes centrées définies sur un même ensemble T et vérifiant

$$(*) \qquad \mathbb{E}\,|Y(t)-Y(s)|^2 \le \mathbb{E}\,|X(t)-X(s)|^2 \quad , \quad \forall\,(s,t) \in T\times T \quad .$$

Alors

$$(1) \qquad \mathbb{E}\,(\bigvee_{t\in T} Y(t)) \le \mathbb{E}\,(\bigvee_{t\in T} X(t)) \quad ;$$

et, pour tout réel $p \ge 1$,

$$(2) \qquad \mathbb{E}\,(\bigvee_{(s,t)\in T\times T} |Y(t)-Y(s)|^p) \le \mathbb{E}\,(\bigvee_{(s,t)\in T\times T} |X(t)-X(s)|^p) \quad .$$

Remarque (2.1) : L'inégalité (1) est due à Sudakov ; l'inégalité (2) est due à Fernique. (1) est un cas particulier de (2).

Remarque (2.2) : Si T est une partie symétrique d'un espace vectoriel G et si Y est la restriction à T d'une fonction aléatoire linéaire sur G, soit L, alors :

$$(\mathbb{E}\bigvee_{(s,t)\in T\times T} |Y(t)-Y(s)|^p)^{1/p} = 2(\mathbb{E}\bigvee_{s\in T} |Y(s)|^p)^{1/p} \quad .$$

Bien que nous ne l'utiliserons pas explicitement, signalons le

Corollaire (2.1) : Soit $X : T \to \mathcal{L}^0(\Omega',\mathcal{F}',P')$ et $Y : T \to \mathcal{L}^0(\Omega,\mathcal{F},P)$ deux fonctions aléatoires réelles gaussiennes centrées vérifiant la condition (*) ci-dessus. Alors :

(1) Y a une version à trajectoires bornées dès que X en a une ;

(2) Si T est un espace métrique séparable (T,d) et si l'application $t \to X(t)$ de (T,d) dans $L^2(\Omega',\mathcal{F}',P')$ est uniformément continue, Y a une version à trajectoires continues sur (T,d) dès que X en a une.

<u>Preuve</u> : C'est immédiat car, si Z est une fonction aléatoire réelle gaussienne centrée sur T, alors :

. Z admet une version à trajectoires bornées sur T si et seulement si

$$\mathbb{E}\,(\bigvee_{t\in T} Z(t)) < +\infty \quad ;$$

. si $t \to Z(t)$ de (T,d) dans L^2 est uniformément continue, Z admet une version à trajectoires continues sur (T,d) si et seulement si, pour tout t de T,

$$\inf_{\varepsilon>0} \mathbb{E}\,(\bigvee_{d(t,t')\leq\varepsilon} Z(t')) = 0 \quad .$$

(cf. Fernique [4, ch. 3, § 3]. ∎

Notez que, dans le cas où (T,d) est aussi compact, l'hypothèse "l'application $t \to X(t)$ de (T,d) dans L^2 est uniformément continue" devient superflue dans (2).

§ 3. <u>SERIES DE VARIABLES ALEATOIRES GAUSSIENNES A VALEURS DANS</u> $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$.

Rappelons que, si E et F sont deux Banach, $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ désigne le produit tensoriel injectif complété de E et F (i.e. le complété de $E \otimes F$ muni de la norme ε induite par la norme usuelle sur $\mathcal{L}(E',F)$) et $E \hat{\otimes}_\pi F$ le produit tensoriel projectif complété de E et F (i.e. le complété de $E \otimes F$ muni de la norme

$$\pi : \sum_i x_i \otimes y_i \longrightarrow \sup\{ |\sum_i \langle y_i, Ax_i\rangle| \ ; \ A \in \mathcal{L}(E,F') \ ; \ \|A\| \leq 1\}) \quad .$$

Nous avons besoin du lemme d'estimation suivant :

<u>Lemme</u> (3.1) : Soit E et F deux Banach ; soit $(x_i)_i$ la suite d'éléments de E et $(y_j)_j$ une suite d'éléments de F. Alors :

(1) $M_2[(x_i \otimes y_j)_{i,j} ; E \hat{\otimes}_\pi F] \leq \|(x_i)_i\|_2 \, M_2[(y_j)_j]$;

(2) pour tout réel $p \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{2} A_p \leq \|(x_i \otimes y_j)_{i,j}\|_{p, E\hat{\otimes}_\varepsilon F} \leq \sqrt{2}\, A_p$$

avec $$A_p = M_2[(x_i)_i]\,\|(y_j)_j\|_p + M_2[(y_j)_j]\,\|(x_i)_i\|_p \quad ;$$

(3) de plus, si $(\alpha_{ij})_{i,j}$ est une suite double de réels tels que $M_2[(\alpha_{ij}y_j)_j] < \infty$ et $M_2[(\alpha_{ij}x_j)_j]<\infty$ pour tout i de $\mathbb{N}$, on a aussi pour tout réel $p \geq 1$:

$$\|(\alpha_{ij}\; x_i \otimes x_j)_{i,j}\|_{p,E\hat{\otimes}_\varepsilon F} \leq \sqrt{2}(\|(M_2[(\alpha_{ij}y_j)_j]x_i)_i\|_p + \|(M_2[(\alpha_{ij}x_i)_i]y_j)_j\|_p)$$

<u>Preuve</u> : Il suffit de montrer le lemme avec $(x_i)_i$ et $(y_j)_j$ ayant un nombre fini d'éléments non nuls.

<u>Preuve de 1</u> : Soit $u : \ell^2 \to F$ linéaire continue tel que

$$u(e_j) = y_j \quad , \quad \forall\, j \quad .$$

On a :

$$M_2[(x_i \otimes y_j)_{i,j}\,;\, E\hat{\otimes}_\pi F] = \sup\{(\sum_{i,j} |<y_j, Ax_i>|^2)^{1/2}\,;\, A \in \mathcal{L}(E,F')\,;\, \|A\| \leq 1\}$$

et

$$(\sum_{i,j} |<y_j,Ax_i>|^2)^{1/2} = (\sum_{i,j} |<u'\circ A(x_i), e_j>|^2)^{1/2} =$$

$$= (\mathbb{E}\,\|\sum_i u'\circ A(x_i)g_i\|^2_{\ell^2})^{1/2} \leq \|u'\|\;\|A\|\;(\mathbb{E}\,\|\sum_i x_i\; g_i\|^2_E)^{1/2}$$

$$= \|A\|\;M_2[(y_i)_i]\;\|(x_i)_i\|_2 \quad .$$

D'où (1).

<u>Preuve de (2)</u> : Tout d'abord, considérant pour tout y' de $U_{F'}$, l'opérateur $A_{y'}$ de $E \otimes_\varepsilon F$ dans E (de norme ≤ 1) défini par

$$A_{y'}(x\otimes y) = x <y,y'> \quad , \quad (x\in E\;;\; y\in F)$$

on obtient (pour $p > 0$) :

$$\|(x_i \otimes y_j)_{i,j}\|_{p,E\hat{\otimes}_\varepsilon F} \geq \sup_{y'\in U_{F'}} \|(x_i\; <y_j,y'>)_{i,j}\|_{p,E}$$

$$= M_2[(y_j)_j]\;\|(x_i)_i\|_{p,E} \quad .$$

De même on a :

$$\|(x_i \otimes y_j)_{i,j}\|_{p,E\hat{\otimes}_\varepsilon F} \geq M_2[(x_i)_i]\ \|(y_j)_j\|_{p,F} \quad .$$

D'où

$$\|(x_i \otimes y_j)_{i,j}\|_{p,E\hat{\otimes}_\varepsilon F} \geq \frac{1}{2} A_p \quad .$$

Maintenant montrons l'inégalité de droite dans (2) : considérons les variables aléatoires gaussiennes centrées $Y : \Omega \to E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ et $X : \Omega \times \Omega \to E \times F$ définies par

$$Y = \sum_{i,j} x_i \otimes y_j\ g_{ij}$$

et

$$X(\omega,\omega') = \sqrt{2}\ \Sigma(M_2[(y_k)_k]x_i\ g_i(\omega)\ ,\ M_2[(x_k)_k]y_i\ g_i(\omega')) \quad .$$

Alors, pour tous (x'_1,y'_1) et (x'_2,y'_2) dans $U_{E'} \times U_{F'}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\ |\langle Y,x'_1 \otimes y'_1\rangle - \langle Y,x'_2 \otimes y'_2\rangle|^2 &= \sum_{i,j} |\langle x_i,x'_1\rangle\langle y_j,y'_1\rangle - \langle x_i,x'_2\rangle\langle y_j,y'_2\rangle|^2 \\
&= \sum_{i,j} |\langle x_i,x'_1 - x'_2\rangle\langle y_j,y'_1\rangle + \langle y_j,y'_1 - y'_2\rangle\langle x_i,x'_2\rangle|^2 \\
&\leq 2 \sum_{i,j} |\langle x_i,x'_1 - x'_2\rangle\langle y_j,y'_1\rangle|^2 + 2 \sum_{i,j} |\langle y_j,y'_1 - y'_2\rangle\langle x_i,x'_2\rangle|^2 \\
&\leq 2(M_2^2[(y_j)_j] \sum_i |\langle x_i,x'_1 - x'_2\rangle|^2 + M_2^2[(x_i)_i] \sum_j |\langle y_j,y'_1 - y'_2\rangle|^2) \\
&= \mathbb{E}\ |\langle X,(x'_1,y'_1)\rangle - \langle X,(x'_2,y'_2)\rangle|^2 \quad .
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de comparaison avec $T = U_{E'} \times U_{F'}$: en tenant compte de la remarque (2.2) on obtient ainsi

$$(\mathbb{E} \bigvee_{(x',y')\in T} |\langle Y,x' \otimes y'\rangle|^p)^{1/p} \leq (\mathbb{E} \bigvee_{(x',y')\in T} |\langle X,(x',y')\rangle|^p)^{1/p}$$

pour tout réel $p \geq 1$. Mais

$$(\mathbb{E} \bigvee_{(x',y')\in T} |\langle X,(x',y')\rangle|^p)^{1/p} \leq \sqrt{2}\ A_p \quad ;$$

et

$$(\mathbb{E} \bigvee_{(x',y')\in T} |\langle Y,x' \otimes y'\rangle|^p)^{1/p} = \|(x_i \otimes y_j)_{i,j}\|_{p,E\hat{\otimes}_\varepsilon F} \quad ,$$

car l'enveloppe disquée fermée de $U_{E'} \otimes U_{F'}$ dans $\sigma((E \otimes_\varepsilon F)', E \hat{\otimes}_\varepsilon F)$ coïncide avec la boule unité de $(E \hat{\otimes}_\varepsilon F)'$. Par conséquent

$$\|(x_i \otimes y_j)_{i,j}\|_{p, E \otimes_\varepsilon F} \leq \sqrt{2}\, A_p \quad .$$

<u>Preuve de (3)</u> : On procède comme dans la preuve de (2) en considérant $Y : \Omega \to E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ et $X : \Omega \times \Omega \to E \times F$ définis par :

$$Y = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\, x_i \otimes y_j\, g_{ij}$$

et

$$X(\omega, \omega') = \sqrt{2} \sum_i \left(M_2[(\alpha_{ij}\, y_j)_j] x_i\, g_i(\omega)\, ,\, M_2[(\alpha_{ji}\, x_j)_j]\, y_i\, g_i(\omega')\right) \quad . \quad \blacksquare$$

<u>Remarque</u> (3.1) : Soit $(e_i)_{i \geq 1}$ la base canonique de ℓ^1 et p et q deux réels tels que $p \geq q \geq 1$. Alors, grâce au lemme, on peut trouver deux constantes $C_{p,q}$ et $C'_{p,q} > 0$ telles que :

$$C_{p,q} \leq \frac{1}{n^{\beta(p,q)}} \|(e_i \otimes e_j)_{i,j \leq n}\|_{1, \ell^p \hat{\otimes}_\varepsilon \ell^q} \leq C'_{p,q} \quad , \quad \forall\, n \geq 1$$

avec

$$\beta(p,q) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} & , \quad \text{si} \quad p \leq 2 \\[2ex] \dfrac{1}{q} & , \quad \text{si} \quad p \geq 2 \quad . \end{cases}$$

<u>Remarque</u> (3.2) : On peut montrer que :

$$\|(M_2[(\alpha_{ij}\, y_j)_j] x_i)_i\|_p \leq \sup_j \|y_j\|\, \|(\alpha_{ij}\, x_i)_{i,j}\|_p \quad , \quad \forall\, p > 0 \quad .$$

<u>Remarque</u> (3.3) : Soit $E_1, \ldots, E_N$, N Banach. Si pour $k = 1, \ldots, N$ $(x_i^k)_i$ est une suite d'éléments de E_k et si $(\alpha_{i_1 \ldots i_N})_{i_1, \ldots, i_N}$ est une suite de réels, alors on montrerait de même que, pour $1 \leq p < \infty$, on a :

$$\|(\alpha_{i_1, \ldots, i_N}\, x^1_{i_1} \otimes \ldots \otimes x^N_{i_N})_{i_1, \ldots, i_N}\|_{p, E_1 \hat{\otimes}_\varepsilon \cdots \hat{\otimes}_\varepsilon E_N} \leq$$
$$\sqrt{N} \sum_{k=1}^{N} \sup_{m \neq k} \sup_i \|x_i^m\|\, \|(\alpha_{i_1, \ldots, i_N}\, x^k_{i_k})_{i_1, \ldots, i_N}\|_{p, E_k} \quad .$$

Donnons deux applications immédiates de ce lemme :

<u>Théorème</u> (3.1) : <u>Soit</u> E <u>et</u> F <u>deux Banach</u> ; <u>soit</u> $(x_i)_i$ <u>une suite dans</u> E <u>et</u> $(y_j)_j$ <u>une suite dans</u> F. <u>Supposons ces suites non identiquement</u>

nulles. Alors :

(1) $\left(\sum_{i,j<n} x_i \otimes y_j \, g_{ij}\right)_n$ est presque sûrement borné dans $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ si $\left(\sum_{i\leq n} x_i \, g_i\right)_n$ et $\left(\sum_{j\leq n} y_j \, g_j\right)_n$ sont presque sûrement bornés ;

(2) $\sum_{i,j} x_i \otimes y_j \, g_{ij}$ converge presque sûrement dans $E \otimes_\varepsilon F$ si et seulement si les séries $\sum_i x_i \, g_i$ et $\sum_j y_j \, g_j$ convergent presque sûrement.

Preuve : (1) et (2) se déduisent aisément de la partie (2) du lemme (notez que $A_p \leq 2\sqrt{2}\, \beta_p \, \|(x_i)_i\|_p \, \|(y_j)_j\|_p$ avec $\beta_p = (E\, |g_1|^p)^{-1/p}$). ∎

Théorème (3.2) (Pisier) : Soit $(e_k)_k$ la base canonique de ℓ^1 et $(\alpha_{ij})_{i,j}$ une suite double de réels. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) (resp. (1')) $\left(\sum_{i,j\leq n} \alpha_{ij} \, e_i \otimes e_j \, g_{ij}\right)_n$ est p.s. bornée dans $\ell^1 \hat{\otimes}_\varepsilon \ell^1$ (resp. converge p.s. dans $\ell^1 \hat{\otimes}_\varepsilon \ell^1$) ;

(2) $\sum_i \left[\sum_j |\alpha_{ij}|^2\right]^{1/2} < +\infty$ et $\sum_j \left(\sum_i |\alpha_{ij}|^2\right)^{1/2} < \infty$.

De plus :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} A \leq \|(\alpha_{ij} \, e_i \otimes e_j)_{i,j}\|_{1,\ell^1 \hat{\otimes}_\varepsilon \ell^1} \leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} A$$

avec

$$A = \sum_i \left(\sum_j |\alpha_{ij}|^2\right)^{1/2} + \sum_j \left(\sum_i |\alpha_{ij}|^2\right)^{1/2} .$$

Preuve : Tout d'abord, d'après (1.1), (2) est équivalent à (2') : "$\left(\sum_{i,j\leq n} \alpha_{ij} \, e_i \, g_{ij}\right)_n$ et $\left(\sum_{i,j\leq n} \alpha_{ij} \, e_j \, g_{ij}\right)_n$ sont p.s. bornés dans ℓ^1 (ou p.s. convergentes)".

• (1) ⇒ (2') : Si $\left(\sum_{i,j\leq n} \alpha_{ij} \, e_i \otimes e_j \, g_{ij}\right)_n$ est p.s. borné dans $\ell^1 \hat{\otimes}_\varepsilon \ell^1$, alors pour tout x' de ℓ^∞, $\left(\sum_{i,j\leq n} \alpha_{ij} \, e_i \, \langle e_j, x'\rangle g_{ij}\right)_n$ et $\left(\sum_{i,j\leq n} \alpha_{ij} \, \langle e_i, x'\rangle \, e_j \, g_{ij}\right)_n$ sont p.s. bornés (dans ℓ^1). En prenant $x' = (e_i)_i$ on obtient (2') et

(i) $$\|(\alpha_{ij} \, e_i)_{i,j}\|_{p,\ell^1} \leq \|(\alpha_{ij} \, e_i \otimes e_j)_{i,j}\|_{p,\ell^1 \hat{\otimes}_\varepsilon \ell^1} , \quad \forall\, p > 0 .$$

• (2') ⇒ (1'), par la partie (3) du lemme ci-dessus car :

$$\text{(ii)}\qquad \|(M_2[(\alpha_{ij}\, e_i)_i\,;\,\ell^1]e_j)_j\|_{p,\ell^1} = \|(\alpha_{ij}\, e_j)_{i,j}\|_{p,\ell^1} \qquad (p>0)\ .$$

Enfin les inégalités du théorème résultent de (i), (ii), du lemme et de la relation

$$\|(\alpha_{ij}\, e_i)_{i,j}\|_{1,\ell^1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_i \Big(\sum_j |\alpha_{ij}|^2\Big)^{1/2}\ . \ \blacksquare$$

Remarque (3.4) : Si $(\alpha_{i_1\dots i_m})_{i_1\dots i_m}$ est une suite de réels non tous nuls, on a aussi

$$\frac{1}{m} \le \frac{\|(\alpha_{i_1\dots i_m}\, e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_m})_{i_1\dots i_m}\|_{1,\ell^1\hat{\otimes}_\varepsilon\dots\hat{\otimes}_\varepsilon\ell^1}}{\displaystyle\sum_{k=1}^m \sum_{j\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{\substack{(i_1,\dots,i_m)\in\mathbb{N}^m\\ i_k=j}} |\alpha_{i_1\dots i_m}|^2\Big)^{1/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \le \sqrt{m}\ .$$

Remarque (3.5) : En utilisant la partie (3) du lemme, on vérifie que si $1\le p\le 2$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{r}=\frac{1}{p}$ et si

$$\sum_i \|(\alpha_{ij})_j\|^p_{\ell^r} < \infty\ ,\quad \sum_j \|(\alpha_{ij})_i\|^p_{\ell^r} < +\infty\ ,$$

alors $\Big(\sum_{i,j\le n} \alpha_{ij}\, e_i\otimes e_j\, g_{ij}\Big)_n$ est p.s. borné dans $\ell^p\hat{\otimes}_\varepsilon\ell^p$.

§ 4. APPLICATION A LA THEORIE DES ESPACES DE WIENER ABSTRAITS.

Du théorème (3.1), on va déduire un résultat sur les espaces de Wiener abstraits.

Rappelons qu'un triplet (i,H,E) est appelé espace de Wiener abstrait si :

- H est un Hilbert, E un Banach ;
- i est une injection linéaire continue de H dans E à image partout dense dans E et transformant la mesure cylindrique gaussienne normale sur H, soit γ_H, en une probabilité de Radon sur E (ce qui implique que H et E sont séparables et que i est compacte).

Théorème (4.1) : Si (i_1,H_1,E_1) et (i_2,H_2,E_2) sont deux espaces de

<u>Wiener abstraits, si</u> $H_1 \hat{\otimes}_2 H_2$ <u>désigne le produit hilbertien complété de</u> H_1 <u>et</u> H_2, <u>alors</u>

$$(i_1 \otimes i_2 \ , \ H_1 \hat{\otimes}_2 H_2 \ , \ E_1 \hat{\otimes}_\varepsilon E_2)$$

<u>est aussi un espace de Wiener abstrait</u>.

<u>Preuve</u> : Il suffit de remarquer qu'un opérateur linéaire continu U d'un Hilbert séparable H dans un Banach E transforme la mesure cylindrique gaussienne normale γ_H sur H en une probabilité de Radon sur E si et seulement si il existe une base orthonormale $(e_n)_n$ de H telle que $\sum_n U(e_n)g_n$ converge presque sûrement (dans E). Le théorème (4.1) est alors une simple conséquence du théorème (3.1). ∎

<u>Remarque</u> (4.1) : Soit, pour $i = 1,2$, E_i un Banach et A_i' une partie de E_i' dont l'enveloppe disquée fermée dans $\sigma(E_i',E_i)$ coïncide avec la boule unité de $U_{E_i'}$ de E_i' ; soit aussi μ_i une probabilité cylindrique de Gauss sur E_i (i.e. $\mu_i = u_i(\gamma_{H_i})$ avec H_i Hilbert et $u_i : H_i \to E_i$ linéaire continu). Alors [3] il existe une probabilité cylindrique de <u>Gauss</u> μ sur $E_1 \hat{\otimes}_\varepsilon E_2$ et une <u>seule</u> telle que

$$\int <z,x_1'\otimes y_1'><z,x_2'\otimes y_2'>d\mu(z) =$$

$$\int <x,x_1'><x,x_2'>d\mu_1(x) \cdot \int <y,y_1'><y,y_2'>d\mu_2(y) \quad ,$$

pour tous (x_1',y_1') et (x_2',y_2') de $E_1' \times E_2'$ (et même pour tous (x_1',y_1') et (x_2',y_2') de $A_1' \times A_2'$). Cette mesure cylindrique μ sur $E_1 \hat{\otimes}_\varepsilon E_2$ sera notée $\mu_1 \hat{\otimes}_\varepsilon \mu_2$.

On peut remarquer que l'espace autoreproduisant de $\mu_1 \hat{\otimes}_\varepsilon \mu_2$ est égal au complété du produit tensoriel hilbertien des espaces autoreproduisants de μ_1 et μ_2. Grâce au théorème (3.1), si $\mu_i \neq \delta_o$ $(i = 1,2)$, $\mu_1 \hat{\otimes}_\varepsilon \mu_2$ est une mesure de Radon sur $E_1 \hat{\otimes}_\varepsilon E_2$ [resp. sur $\sigma((E_1 \hat{\otimes}_\varepsilon E_2)'',(E_1 \hat{\otimes}_\varepsilon E_2)')$] si et seulement si pour $i = 1$ et 2, μ_i est une probabilité de Radon sur E_i [resp. sur $\sigma(E_i'',E_i')$].

<u>Remarque</u> (4.2) : Soit $T = [0,1]$; soit $X : T \to L^o(\Omega,\mathfrak{F},P;E)$ un mouvement brownien sur T à valeurs dans un Banach séparable, c-à-d. :

(1) $X(0) = 0$;

(2) si $0 = t_o < t_1 < \ldots < t_n$, les variables $X(t_i) - X(t_{i-1})$, $i = 1,\ldots,n$

sont indépendantes ; et

(3) il existe une variable aléatoire gaussienne centrée Z à valeurs dans E telle que, pour tout (t,s) de T^2,

$$\mathcal{L}(X(t)-X(s)) = \mathcal{L}(\sqrt{|t-s|}\, Z) \quad .$$

Si $\mathcal{L}(Z)=\mu$ et si W est la mesure de Wiener sur $\mathcal{C}(T)$, alors $W \hat{\otimes}_\varepsilon \mu$ est une mesure de Radon sur $\mathcal{C}(T) \hat{\otimes}_\varepsilon E = \mathcal{C}(T;E)$; de plus si L est une fonction aléatoire linéaire associée à $W \hat{\otimes}_\varepsilon \mu$, alors les fonctions aléatoires réelles

$$(t,x') \longrightarrow L(\delta_t \otimes x') \quad \text{et} \quad (t,x') \longrightarrow \langle X(t),x'\rangle$$

sur $T \times E'$ sont isonomes. Donc $W \hat{\otimes}_\varepsilon \mu$ est la mesure de Wiener sur $\mathcal{C}(T,E)$ associée au mouvement brownien X.

<u>Problème</u> : Peut-on , dans le théorème (4.1), remplacer la norme ε par d'autres normes raisonnables α sur $E_1 \otimes E_2$ (une norme α sur $E_1 \otimes E_2$ est dite raisonnable si $\varepsilon \le \alpha \le \pi$). Autrement dit, étant donné une suite $(x_i)_i$ dans E_1 et une suite $(y_i)_i$ dans E_2 telles que les séries $\sum_i x_i\, g_i$ et $\sum_j y_j\, g_j$ convergent presque sûrement, quelles sont les normes raisonnables α sur $E_1 \otimes E_2$ pour lesquelles $\sum_{i,j} x_i \otimes y_j\, g_{ij}$ converge p.s. dans $E_1 \hat{\otimes}_\alpha E_2$.

Ce problème a un sens car, grâce à la partie 1 du lemme (3.1), $i_1 \otimes i_2$ applique continuement $H_1 \hat{\otimes}_2 H_2$ dans $E_1 \hat{\otimes}_\pi E_2$ et donc dans $E_1 \hat{\otimes}_\alpha E_2$.

Carmona et nous-même avons obtenu une réponse partielle à ce problème :

<u>Théorème</u> (4.2) [2] : <u>Dans le théorème</u> (4.1)

(1) <u>on ne peut remplacer en général</u> ε <u>par</u> π ;

(2) <u>si</u> E_1 <u>est un espace</u> L^1, <u>on peut remplacer</u> ε <u>par</u> π ;

(3) <u>si</u> E_1 <u>est un espace</u> $L^p(S,\mathcal{S},m)$ <u>avec</u> m <u>σ-finie et</u> $1 \le p < \infty$, <u>on peut remplacer</u> ε <u>par la norme</u> α <u>sur</u> $E_1 \otimes E_2$ <u>induite par celle de</u> $L^p(S,\mathcal{S},m;E_2)$;

(4) <u>si</u> E_1 <u>est un Banach de cotype</u> 2, <u>on peut remplacer</u> ε <u>par la norme</u> $d_2(\cdot,E_1;E_2)$ <u>définie par</u> :

$$d_2(u;E_1,E_2) = \inf\{M_2[(x_i)_i](\sum_i \|y_i\|^2)^{1/2} \ ; \ u = \sum x_i \otimes y_i\}$$

<u>si</u> $u \in E_1 \otimes E_2$.

<u>Preuve</u> : (4) est une conséquence simple de (3) avec $p = 2$, puisque :

(i) si E_1 est de cotype 2, $i_1 : H_1 \to E_1$ admet la factorisation suivante :

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[rr, "i_1"] \arrow[dr, "j"'] & & E_1 \\ & \ell^2 \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

avec (j,H_1,ℓ^2) espace de Wiener abstrait (cf. [9] ou [10]) ;

(ii) $d_2(u;\ell^2,E_2) \le \|u\|_{\ell^2(E_2)}$, $\forall\, u \in \ell^2 \otimes E_2$.

• <u>Preuve de (3)</u> : Tout d'abord, pour toute suite $(f_i)_i$ d'éléments de $L^p(S,\mathcal{S},m)$ et toute suite $(y_i)_i$ d'éléments de E_2, on a :

(**) $$\|(f_i \otimes y_j)_{i,j}\|_{p,L^p(E_2)} = \beta_p \ \|(f_i)_i\|_p \ \|(y_i)_i\|_p$$

avec $\beta_p = (E|g_1|^p)^{-1/p}$.

En effet si $(f_i)_i$ et $(y_i)_i$ ont un nombre fini d'éléments non nuls on a :

$$\begin{aligned}\|(f_i \otimes y_j)_{i,j}\|_{p,L^p(E_2)} &= (\int dm(s) \ \|(y_i \ f_j(s))_{i,j}\|_p^p)^{1/p} \\ &= (\int dm(s)(\sum_j f_j^2(s))^{p/2})^{1/p} \cdot \|(y_i)_i\|_p \\ &= (\int dm(s) \ \|(f_j(s))_j\|_{p,\mathbb{R}}^p)^{1/p} \cdot \beta_p \cdot \|(y_i)_i\|_p \\ &= \beta_p \ \|(f_i)_i\|_{p,L^p} \ \|(y_i)_i\|_p \ ,\end{aligned}$$

soit (**). On en déduit alors (3) comme dans la preuve du théorème (4.1).

• <u>Reste à montrer (1)</u> : Pour cela on prend

$$E_1 = E_2 = \ell^2$$

et

$$x_i = y_i = \frac{1}{(k+1)2^{k/2}} e_i \ , \ \text{si} \ 2^k \le i < 2^{k+1}$$

avec (e_i) base canonique de ℓ^2. Alors $\sum_i x_i\, g_i$ converge presque sûrement dans ℓ^2 ; mais

$$(1')\qquad \|(x_i \otimes y_j)_{i,j}\|_{2,\ell^2 \hat{\otimes}_\pi \ell^2} = +\infty \quad .$$

Pour vérifier (1') montrons tout d'abord qu'il existe un réel $\gamma > 0$ tel que

$$(1'')\qquad \|(e_i \otimes e_j)_{i,j\le n}\|_{2,\ell^2 \hat{\otimes}_\pi \ell^2} \ge \gamma\, n^{3/2} \quad , \quad \forall\, n \ge 1 \quad .$$

$\ell^2 \hat{\otimes}_\pi \ell^2$ étant de cotype 2 [11], il existe un réel $\gamma > 0$ tel que

$$\|(u(e_i \otimes e_j))_{i,j}\|_{2,\ell^2 \hat{\otimes}_\pi \ell^2} \ge \gamma\, \pi_2(u) \quad ,$$

pour tout opérateur 2-sommant u de $\ell^2 \hat{\otimes}_2 \ell^2$ dans $\ell^2 \hat{\otimes}_\pi \ell^2$. Donc pour tout entier $n \ge 1$,

$$\|(e_i \otimes e_j)_{i,j\le n}\|_{2,\ell^2 \hat{\otimes}_\pi \ell^2} \ge \gamma\, \pi_2(u_n) \quad ,$$

avec u_n opérateur identité de $\ell^2_n \hat{\otimes}_2 \ell^2_n$ dans $\ell^2_n \hat{\otimes}_\pi \ell^2_n$.

Montrons que $\pi_2(u_n) \ge n^{3/2}$ (♦) : Considérons la suite des fonctions de Rademacher r_n sur $[0,1]$ et l'opérateur unitaire U de ℓ^2_n défini par

$$\langle Ue_k, e_\ell\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\left(\sqrt{-1}\, \frac{2\pi}{n}\, k\ell\right) \quad , \quad 1 \le k,\ \ell \le n \quad .$$

Soit $X : [0,1] \times [0,1] \to \ell^2_n \otimes_\pi \ell^2_n$ défini par

$$X(\omega,\omega') = \sum_{k,\ell\le n} r_k(\omega)\, r_\ell(\omega')\, e_k \otimes e_\ell\, \langle Ue_k, e_\ell\rangle \quad .$$

Alors, d'après les propriétés de $\pi_2(u_n)$, on a :

$$\left(\mathbb{E}\, \|X\|^2_{\ell^2_n \hat{\otimes}_\pi \ell^2_n}\right)^{1/2} \le \pi_2(u_n) \sup_{x' \in U_{\ell^2_n \hat{\otimes}_2 \ell^2_n}} \left(\mathbb{E}\, |\langle X, x'\rangle|^2\right)^{1/2} \quad .$$

(♦) La démonstration nous a été communiquée par G. Pisier.

Mais

$$\mathbb{E}\,|\langle X,x'\rangle|^2 = \sum_{i,j} |\langle e_i\otimes e_j, x'\rangle\langle Ue_i, e_j\rangle|^2$$

et donc

$$\left(\sup_{x'\in U_{\ell_n^2\hat{\otimes}_2\ell_n^2}} \mathbb{E}\,|\langle X,x'\rangle|^2\right)^{1/2} = \sup_{i,j} |\langle Ue_i, e_j\rangle| = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad .$$

D'autre part

$$(\mathbb{E}\,\|X\|^2_{\ell_n^2\hat{\otimes}_\pi\ell_n^2})^{1/2} = n$$

car, pour presque tout (ω,ω') de $[0,1]\times[0,1]$

$$X(\omega,\omega') = \sum_{i,j} e_i\otimes e_j \,\langle V_{\omega,\omega'}\, e_i, e_j\rangle$$

avec $V_{\omega,\omega'}$ opérateur unitaire de ℓ_n^2 et donc

$$\|X(\omega,\omega')\|_{\ell_n^2\hat{\otimes}_\pi\ell_n^2} = n \qquad \text{p.s.} \quad .$$

Ainsi

$$\pi_2(u_n) \geq n^{3/2} \quad , \quad \forall\, n\geq 1 \quad .$$

Maintenant on a :

$$\|(x_i\otimes x_j)_{i,j}\|_{2,\ell^2\hat{\otimes}_\pi\ell^2} \geq$$

$$\geq \sup_k \frac{1}{(k+1)^2\, 2^k} \|(e_i\otimes e_j)_{2^k\leq i,j<2^{k+1}}\|_{2,\ell^2\hat{\otimes}_\pi\ell^2}$$

$$\geq \gamma \sup_k \frac{2^{k/2}}{(k+1)^2} = +\infty \quad , \quad \text{cqfd} \ \blacksquare$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Bennett, Unconditional convergence and almost everywhere convergence, Z. Wahr. 34, (1976), p. 135-155.

[2] R. Carmona et S. Chevet, Tensor Gaussian measures on $L^p(E)$, à paraître.

[3] S. Chevet, Quelques nouveaux résultats sur les mesures cylindriques, à paraître dans les Proc. du Colloque de Dublin de Juin 1977.

[4] X. Fernique, Ecole d'été de St. Flour 1974, Lect. Notes in Math. No 480, p. 1-96.

[5] Y. Gordon et D.R. Lewis, Absolutely summing operators and local unconditional structures, Acta Math. 133 (1974) 27-48.

[6] J. Hoffmann-Jørgensen, Sums of independent Banach space valued random variables, Aarhus Universitet, preprint (1972-73) No 15.

[7] J.R. Holub, Tensor product bases and tensor diagonals, Trans. Amer. Math. Soc. 151 (1970) 563-579.

[9] S. Kwapień et A. Pełczynski, The main triangle projection in matrix spaces and its applications, Studia Math. 34 (1970) 43-68.

[9] W. Linde et A. Pietsch, Mappings of Gaussian cylindrical measures in Banach spaces, Theory of Prob. and its Appl. 19 (1974) 445-460.

[10] B. Maurey, Espaces de cotype p, $0 < p \leq 2$, Séminaire Maurey-Schwartz 1972-73n exposé VII.

[11] N. Tomczak-Jaegermann, The moduli of smoothness and convexity and the Rademacher averages of trace classes S_p $(1 \leq p < \infty)$, Studia Math. 50 (1974) 163-182.

[12] N. Vakhania, Sur les répartitions de probabilités dans les espaces de suites numériques, Note aux C. R. Acad. Sc. Paris t. 260 (1965) 1560-1562.
