

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. MAUREY

Une suite faiblement convergente vers zéro sans sous-suite inconditionnelle

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1975-1976), exp. n° 9, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1975-1976____A8_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 5 - 1 9 7 6

UNE SUITE FAIBLEMENT CONVERGENTE VERS ZERO
=====

SANS SOUS-SUITE INCONDITIONNELLE
=====

par B. MAUREY

Cet exposé est consacré à la construction d'un exemple, obtenu en collaboration avec H.P. Rosenthal [4], d'une suite de vecteurs de norme 1 dans un espace de Banach, qui tend faiblement vers zéro mais qui ne possède aucune sous-suite inconditionnelle.

Nous mentionnerons à plusieurs reprises dans cet exposé l'espace S des séries convergentes, et plus précisément la base canonique (e_n) de S . Rappelons que la norme de S est définie par :

$$S((\lambda_i)) = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \right\|_S = \sup_k \left| \sum_{i=1}^k \lambda_i \right| ,$$

pour toute série simplement convergente (λ_i) .

Si (x_n) est une suite de vecteurs d'un espace de Banach, la constante d'inconditionnalité de la suite (x_n) est définie comme la plus petite constante $K \geq 0$ telle que l'on ait pour tout ensemble fini $F \subset \mathbb{N}$ et pour toute suite $(\alpha_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$:

$$\left\| \sum_{n \in F} \alpha_n x_n \right\| \leq K \left\| \sum_n \alpha_n x_n \right\| .$$

On dit alors que (x_n) est K -inconditionnelle. On dit qu'une suite (x_n) est inconditionnelle s'il existe une constante K telle que (x_n) soit K -inconditionnelle.

Notre construction principale nous mènera à :

A. Il existe une suite (x_n) de vecteurs de norme 1, tendant faiblement vers zéro dans un espace de Banach E , et possédant la propriété suivante : pour toute sous-suite (x_{n_k}) de (x_n) , il existe une suite (y_j) de blocs disjoints de la sous-suite (x_{n_k}) qui est 2-équivalente à la base des séries convergentes, c'est-à-dire :

$$\forall (\alpha_j) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \quad S((\alpha_j)) \leq \left\| \sum_j \alpha_j y_j \right\| \leq 2 S((\alpha_j)) .$$

Bien entendu, la propriété A implique que la suite (x_n) n'a aucune sous-suite inconditionnelle : en effet, des blocs disjoints d'une suite K -inconditionnelle forment encore une suite K -inconditionnelle, et par ailleurs la base de S n'est évidemment pas inconditionnelle.

Une légère modification de l'exemple A permet d'obtenir :

B. Il existe une suite (x_n) de vecteurs de norme 1 tendant faiblement vers zéro dans un espace de Banach uniformément convexe, et dont aucune sous-suite n'est inconditionnelle.

Pour finir, nous nous intéresserons aux espaces $C(\alpha)$, où α est un ordinal dénombrable. Si β est un ordinal dénombrable, $\beta+1$ est un compact pour la topologie de l'ordre. Il est bien connu que dans $C(\omega+1)$, toute suite qui tend faiblement vers zéro possède pour tout $\varepsilon > 0$ des sous-suites $(1+\varepsilon)$ -inconditionnelles. Nous verrons que :

C. Pour tout entier $k \geq 1$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe dans $C(\omega^{\omega \cdot k} + 1)$ une suite qui tend faiblement vers zéro, mais dont toute sous-suite a une constante d'inconditionnalité $\geq \frac{k+1}{1+\varepsilon}$. (Avec un peu plus de travail, on peut prendre $\varepsilon = 0$, cf. [4].)

Nous verrons dans l'exposé XVI un résultat positif qui complète C : pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute suite qui tend faiblement vers zéro dans $C(\omega^{\omega \cdot k} + 1)$, il existe des sous-suites $(k+1+\varepsilon)$ -inconditionnelles.

L'exemple C suggère que dans $\omega^{(\omega^2)} + 1$, il ne sera plus possible de trouver de sous-suite inconditionnelle. C'est effectivement ce qui se passe :

D. Dans $C(\omega^{(\omega^2)} + 1)$, il existe une suite qui tend faiblement vers zéro et qui n'a aucune sous-suite inconditionnelle.

On peut noter, en utilisant les résultats de l'exposé XVI, que $\omega^{(\omega^2)}$ est le premier ordinal α tel que l'extraction de sous-suites inconditionnelles soit impossible dans $C(\alpha+1)$.

I. EXEMPLE A

Nous allons entrer maintenant dans la partie technique de cet exposé. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $m_1 = 1 < m_2 < \dots < m_k < \dots$ une suite d'entiers très lacunaire, vérifiant :

$$(1) \quad \sum_{\substack{i,k \\ i < k}} m_i / m_k \leq \varepsilon/2 < 1 \quad .$$

Nous désignerons par $M = \{1, m_2^2, \dots, m_k^2, \dots\}$ l'ensemble des carrés des éléments de la suite précédente.

Si A est un sous-ensemble fini de $\mathbf{N}$, nous désignerons par 1_A l'élément de $\mathbb{R}^{(\mathbf{N})}$ défini par $1_A(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et nous poserons :

$$x_A = \frac{1}{\sqrt{|A|}} \cdot 1_A \quad (\text{où } |A| \text{ désigne le nombre des éléments de } A).$$

Si $x = (x_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbf{N})}$ et $y = (y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbf{N}}$, le symbole $\langle x, y \rangle$ désignera le produit scalaire usuel, c'est-à-dire :

$$\langle x, y \rangle = \sum_n x_n y_n \quad .$$

Si A et B sont deux sous-ensembles finis de $\mathbf{N}$, on a, en supposant $|A| < |B|$

$$\langle x_A, x_B \rangle = \frac{|A \cap B|}{\sqrt{|A|} \cdot |B|} \leq \sqrt{\frac{|A|}{|B|}}$$

(noter aussi que $\langle x_A, x_A \rangle = 1$).

Supposons alors que $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$ soient des ensembles finis de $\mathbf{N}$ tels que pour tous i et j , on ait $|A_i|$ et $|B_j| \in M$, et $|A_i| \neq |B_j|$. On déduira de (1) que :

$$(2) \quad \langle \sum_i x_{A_i}, \sum_j x_{B_j} \rangle \leq \varepsilon/2 \quad .$$

La petite discussion précédente explique le rôle technique de M : si les cardinalités en présence sont des éléments distincts de M , les vecteurs correspondants sont "presque" orthogonaux.

Introduisons une notation supplémentaire. Si $a = (A_1, A_2, \dots, A_n, \dots)$ est une suite de sous-ensembles finis de $\mathbf{N}$, deux à deux disjoints, nous poserons :

$$x(a) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{A_n} \quad .$$

La norme que nous voulons définir sera de la forme suivante :
 si $\mathcal{M}$ est un ensemble de suites de sous-ensembles finis de $\mathbf{N}$, on lui associe une semi-norme sur $\mathbb{R}^{(\mathbf{N})}$ par la formule :

$$|y| = \sup_{a \in \mathcal{M}} |\langle y, x(a) \rangle|, \quad \forall y \in \mathbb{R}^{(\mathbf{N})}.$$

Nous supposons donné un ensemble $\mathcal{M}$ possédant les propriétés suivantes (nous discuterons plus loin l'existence d'un tel $\mathcal{M}$) :

i) Pour tout $a = (A_1, A_2, \dots, A_n, \dots) \in \mathcal{M}$

- $|A_n| \in \mathbf{M}$ pour tout $n \geq 1$
- $|A_1| < |A_2| < \dots < |A_n| < \dots$
- $A_1 < A_2 < \dots < A_n < \dots$

ii) Pour tous $a = (A_n)$ et $b = (B_n) \in \mathcal{M}$:

$$|A_i| = |B_j| \implies i = j \quad \text{et} \quad A_\ell = B_\ell \quad \text{pour} \quad 1 \leq \ell < i.$$

iii) Pour tous k et m entiers ≥ 1 , et tout $a = (A_n) \in \mathcal{M}$, il existe $b = (B_n) \in \mathcal{M}$ tel que :

$$1 \leq \ell \leq k \implies A_\ell = B_\ell; \quad m < B_{k+1}.$$

iv) Pour tout sous-ensemble infini $N_1 \subset \mathbf{N}$, il existe un élément $a = (A_n) \in \mathcal{M}$ tel que $A_n \subset N_1$ pour tout $n \geq 1$.

v) Pour tout $k \geq 1$, il existe $a = (A_n) \in \mathcal{M}$ tel que $A_1 = \{k\}$.

(Si A et B sont deux sous-ensembles de $\mathbf{N}$, $A < B$ signifie $\sup A < \inf B$.)

La propriété la plus importante est la propriété ii). Elle signifie que pour un élément $a = (A_n)$ de $\mathcal{M}$, la connaissance du cardinal de A_k détermine les ensembles $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$. Cette structure sera rendue plus claire lors de la construction d'un tel ensemble $\mathcal{M}$, qui sera faite plus loin.

A partir de maintenant, nous supposons donné un ensemble $\mathcal{M}$ possédant les propriétés i) à v), et nous définirons une semi-norme sur $\mathbb{R}^{(\mathbf{N})}$ par la formule :

$$\forall y \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \quad \|y\| = \sup_{a \in \mathcal{M}} |\langle y, x(a) \rangle| .$$

En fait, la conjonction de iii) et v) implique immédiatement que $\|y\| \geq \sup_k |y_k|$, ce qui prouve que $y \rightarrow \|y\|$ est une norme. Nous désignerons par (x_n) la base canonique de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ($x_n(j) = \delta_{n,j}$). Nous allons voir que la suite (x_n) possède les propriétés de l'exemple A. Tout d'abord, il résulte de v) que $\|x_n\| = 1$ pour tout n .

Lemme 1 : Soit $b = (B_n)$ un élément de $\mathcal{M}$. On a :

$$\forall (\lambda_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, \quad S((\lambda_n)) \leq \left\| \sum_n \lambda_n x_{B_n} \right\| \leq (1+\varepsilon) S((\lambda_n)) .$$

(Autrement dit, la suite (x_{B_n}) est $(1+\varepsilon)$ -équivalente à la base de S .)

Démonstration : Soit $(\lambda_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ et soit k un entier ≥ 1 . Désignons par m le premier entier tel que $\lambda_j = 0 \quad \forall j > m$. D'après iii), on peut trouver un élément $a = (A_n) \in \mathcal{M}$ tel que :

$$A_i = B_i \text{ pour } 1 \leq i \leq k ; \quad A_{k+1} > B_m .$$

On voit alors que :

$$\langle \sum_n \lambda_n x_{B_n}, x(a) \rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i .$$

L'entier k étant quelconque, on en déduit l'inégalité $S((\lambda_n)) \leq \left\| \sum_n \lambda_n x_{B_n} \right\|$.

Pour démontrer l'autre inégalité, choisissons un élément quelconque $a = (A_n)$ de $\mathcal{M}$, et désignons par k le plus grand entier tel que $|A_j| = |B_j| \quad \forall j \leq k$ (si $|A_1| \neq |B_1|$, on pose $k = 0$). Nous décomposerons le produit $\langle \sum_n \lambda_n x_{B_n}, x(a) \rangle$ en trois parties :

$$\begin{aligned} \langle \sum_n \lambda_n x_{B_n}, x(a) \rangle &= \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} \lambda_n \langle x_{B_n}, \sum_{n=1}^{k-1} x_{A_n} \rangle + \lambda_k \langle x_{B_k}, \sum_{n \geq k} x_{A_n} \rangle + \langle \sum_{n > k} \lambda_n x_{B_n}, \sum_{n \geq k} x_{A_n} \rangle . \end{aligned}$$

Le premier terme est facile à évaluer, car d'après ii), on a $A_j = B_j$ pour $j < k$, donc :

$$\left\langle \sum_{n=1}^{k-1} \lambda_n x_{B_n}, \sum_{n=1}^{k-1} x_{A_n} \right\rangle = \sum_{n=1}^{k-1} \lambda_n .$$

Dans le second, nous remarquerons que :

$$0 \leq \rho = \langle x_{B_k}, \sum_{n \geq k} x_{A_n} \rangle \leq 1 .$$

En effet, puisque $|A_n| \geq |A_k|$ pour $n \geq k$, les coefficients de $\sum_{n \geq k} x_{A_n}$ sont majorés par $1/\sqrt{|A_k|} = 1/\sqrt{|B_k|}$, et donc :

$$\langle x_{B_k}, \sum_{n \geq k} x_{A_n} \rangle \leq \frac{|B_k|}{\sqrt{|B_k|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|A_k|}} = 1 .$$

Pour étudier le troisième terme, notons que d'après ii), les entiers $|A_i|$, $i \geq k$ et $|B_j|$, $j > k$, sont deux à deux distincts. Comme ce sont des éléments de M , on déduit de (2) que :

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \sum_{n > k} \lambda_n x_{B_n}, \sum_{n \geq k} x_{A_n} \right\rangle \right| &\leq \sup_n |\lambda_n| \cdot \left\langle \sum_{n > k} x_{B_n}, \sum_{n \geq k} x_{A_n} \right\rangle \\ &\leq \varepsilon/2 \cdot \sup_n |\lambda_n| \leq \varepsilon \cdot S((\lambda_n)) . \end{aligned}$$

Pour conclure, remarquons que :

$$\left| \sum_{n=1}^{k-1} \lambda_n + \rho \lambda_k \right| = \left| (1-\rho) \sum_{n=1}^{k-1} \lambda_n + \rho \sum_{n=1}^k \lambda_n \right| \leq S((\lambda_n)) .$$

On a donc obtenu :

$$\left| \left\langle \sum_n \lambda_n x_{B_n}, x(a) \right\rangle \right| \leq (1+\varepsilon) S((\lambda_m)) ,$$

ce qui démontre le lemme.

Lemme 2 : La suite (x_n) tend faiblement vers zéro dans E .

Démonstration : Si la suite (x_n) ne tendait pas faiblement vers zéro, on pourrait trouver un $\alpha > 0$, une forme linéaire ξ de norme ≤ 1 sur E et un sous-ensemble infini $N_1 \subset \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall m \in N_1, \quad \langle \xi, x_m \rangle \geq \alpha .$$

On en déduirait pour tout ensemble fini $A \subset N_1$:

$$\|x_A\| \geq \alpha \cdot \sqrt{|A|} \quad .$$

D'après la propriété iv), on peut trouver un $b = (B_n) \in \mathcal{M}$ tel que $B_n \subset N_1$ pour tout n . Le lemme 1 implique que $\|x_{B_n}\| \leq 1 + \varepsilon$ pour tout n . Mais par ailleurs $|B_n| \rightarrow \infty$ d'après i), d'où une contradiction qui achève la démonstration du lemme 2.

Nous voyons facilement maintenant que la suite (x_n) possède toutes les propriétés de l'exemple A : la suite tend faiblement vers zéro, et $\|x_n\| = 1$ pour tout n . Par ailleurs, soit (x_{n_k}) une sous-suite de la suite (x_n) .

D'après l'axiome iv) pour $\mathcal{M}$, il existe un élément $b = (B_j) \in \mathcal{M}$ tel que $B_j \subset N_1 = \{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots\}$ pour tout $j \geq 1$. La suite (x_{B_j}) est bien une suite de blocs disjoints de la sous-suite (x_{n_k}) , et elle est $(1 + \varepsilon)$ -équivalente à la base de S d'après le lemme 1.

Pour achever la présentation de l'exemple A, il reste à construire un ensemble $\mathcal{M}$. Nous commencerons par remarquer que d'après (1) :

$$\begin{aligned} \forall j \geq 1, \quad m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_j^2 &\leq m_{j+1}(m_1 + m_2 + \dots + m_j) \\ &\leq m_{j+1}^2 (m_1/m_{j+1} + \dots + m_j/m_{j+1}) \leq \varepsilon/2 \, m_{j+1}^2 < m_{j+1}^2 \quad . \end{aligned}$$

Ceci implique que si un entier est somme d'éléments distincts de M , son développement est unique. Cette remarque sera utilisée plus loin.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des parties finies de $\mathbf{N}$ et soit ψ une injection de $\mathcal{S}$ dans M , telle que $\forall A \in \mathcal{S}, \psi(A) > |A|$.

Désignons par $\mathcal{M}$ l'ensemble des suites $a = (A_1, A_2, \dots, A_n, \dots)$ d'éléments de $\mathcal{S}$ telles que :

- 1) $A_1 < A_2 < \dots < A_n < \dots$
- 2) $|A_1| = 1$
- 3) $\forall j \geq 1 \quad |A_{j+1}| = \psi(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_j) \quad .$

Montrons que cet ensemble $\mathcal{M}$ satisfait les propriétés i) à v). Pour montrer i), il suffit de noter que :

$$|A_{j+1}| = \psi(A_1 \cup \dots \cup A_j) > |A_1 \cup \dots \cup A_j| \geq |A_j|.$$

La propriété iii) est évidente : quand on a choisi $A_1, A_2, \dots, A_j$, on peut choisir A_{j+1} arbitrairement loin ; la propriété iv) est évidente aussi. Si $N_1 \subset N$ est un ensemble infini, et si $A_1, A_2, \dots, A_j$ ont été définis, $A_i \subset N_1$, on peut toujours trouver dans N_1 un ensemble $A_{j+1} \supset A_j$ de cardinalité $\psi(A_1 \cup \dots \cup A_j)$. De même v) est trivial. Finissons par ii). Supposons que $a = (A_n)$ et $b = (B_n)$ sont des éléments de $\mathcal{M}$, et que $|A_i| = |B_j|$ pour $i, j \geq 1$. Si $i = 1$, ou $j = 1$, la propriété est évidente. Sinon $i = k+1$ et $j = \ell+1$, et donc $\psi(A_1 \cup \dots \cup A_k) = \psi(B_1 \cup \dots \cup B_\ell)$, ce qui implique $A_1 \cup \dots \cup A_k = B_1 \cup \dots \cup B_\ell$ puisque ψ est injective. De plus $|A_1 \cup \dots \cup A_k| = |B_1 \cup \dots \cup B_\ell|$, et ces deux entiers sont sommes d'éléments distincts de M . D'après la remarque préliminaire, on en déduit $k = \ell$ et $|A_h| = |B_h|$ pour $h \leq k$. Mais ceci, joint au fait que les ensembles sont dis-joints et à $A_1 \cup \dots \cup A_k = B_1 \cup \dots \cup B_k$ implique en fait que $A_h = B_h$ pour $1 \leq h \leq k$, et on a bien démontré que l'ensemble $\mathcal{M}$ convient.

II. EXEMPLE B

L'exemple B sera obtenu facilement à partir de l'exemple A par interpolation ; on sait en effet qu'un interpolé (θ, p) entre un Banach quelconque et un Banach uniformément convexe est uniformément convexe (cf. [1]). Comme paire d'interpolation (A_0, A_1) , nous prendrons $A_0 = \ell^2$ et A_1 sera l'espace E de l'exemple A. Notons que l'intersection $A_0 \cap A_1$ contient $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, donc est dense dans A_0 et A_1 . Nous poserons $F = (A_0, A_1)_{1/2, 2}$, nous noterons comme d'habitude $\|\cdot\|_i$ la norme dans A_i , $i = 0, 1$. Il n'y a pas de norme canonique sur F , mais on peut d'après [3], choisir une norme (que nous noterons $\|\cdot\|$) telle que :

$$\forall x \in A_0 \cap A_1 \quad \|x\| \leq \sqrt{\|x\|_0 \|x\|_1}.$$

Dans notre situation, le dual F' de F est égal à $(A'_0, A'_1)_{1/2, 2}$, cf. [3], chapitre III, et on peut supposer aussi (en notant $\|\cdot\|_i^*$ la norme dans A'_i , $i = 0, 1$ et $\|\cdot\|^*$ la norme dans F') que :

$$\forall \xi \in A'_0 \cap A'_1, \quad \|\xi\|^* \leq \sqrt{\|\xi\|_0^* \|\xi\|_1^*}.$$

La suite (x_n) de l'exemple A est simplement dans A_0 la base canonique de ℓ^2 . Nous allons voir que la même suite (x_n) possède dans l'espace F les propriétés de l'exemple B.

Si $a = (A_n) \in \mathcal{M}$ et si k est un entier ≥ 1 , nous poserons :

$$x_k(a) = \sum_{n=1}^k x_{A_n} \quad ; \quad y_k(a) = \sum_{n=1}^k (-1)^{n+1} x_{A_n}.$$

Les éléments $x_k(a)$ et $y_k(a)$ interviendront à la fois comme éléments de $A_0 \cap A_1$ et $A'_0 \cap A'_1$. D'après l'étude de l'exemple A, on sait que :

$$\|x_k(a)\|_1 = k \quad ; \quad 1 \leq \|y_k(a)\|_1 \leq 1+\varepsilon.$$

Par ailleurs, il résulte facilement de la propriété iii) de $\mathcal{M}$ que :

$$\|x_k(a)\|_1^* = 1.$$

On a aussi trivialement :

$$\|x_k(a)\|_0 = \|x_k(a)\|_0^* = \|y_k(a)\|_0 = \|y_k(a)\|_0^* = \sqrt{k}.$$

On en déduit dans F et F' :

$$\|y_k(a)\| \leq \sqrt{1+\varepsilon} \cdot k^{1/4} \quad ; \quad \|x_k(a)\|^* \leq k^{1/4}.$$

Mais compte tenu de $\langle x_k(a), x_k(a) \rangle = k$, on obtient :

$$\|x_k(a)\| \geq k^{3/4} \quad (\text{donc en fait } \|x_k(a)\| = k^{3/4}).$$

Cela prouve que la suite (x_n) ne possède aucune sous-suite inconditionnelle dans F : l'argument est le même que dans l'exemple A et utilise la propriété iv) de $\mathcal{M}$. Pour finir il faut montrer que la suite (x_n) tend vers zéro dans F. L'argument du lemme 2 permet de conclure, si on remarque que lorsque $b = (B_n) \in \mathcal{M}$, on a pour tout $n \geq 1$:

$$\|x_{B_n}\| \leq \sqrt{\|x_{B_n}\|_0 \|x_{B_n}\|_1} \leq \sqrt{1+\varepsilon}.$$

III. EXEMPLES C ET D

Pour introduire l'exemple C, nous utiliserons l'ensemble $\mathcal{M}$ construit à la fin du paragraphe I. Nous utiliserons, en plus des propriétés i) à v), les deux propriétés supplémentaires de cet ensemble $\mathcal{M}$:

$$\text{vi)} \quad \forall a = (A_n) \in \mathcal{M}, \quad |A_1| = 1 \quad .$$

$$\text{vii)} \quad \forall a = (A_n), b = (B_n) \in \mathcal{M} \\ A_i = B_i \text{ pour } 1 \leq i \leq k \implies |A_{k+1}| = |B_{k+1}| \quad .$$

Soit k un entier ≥ 1 . Nous introduirons sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ une norme analogue à celle de l'exemple A, par la formule :

$$\|y\| = \sup_{a \in \mathcal{M}} |\langle y, x_k(a) \rangle|, \quad \forall y \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \quad .$$

Nous désignerons par E_k l'espace de Banach obtenu par complétion. En adaptant les arguments du premier paragraphe, on voit facilement que la base canonique de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, toujours désignée par x_n , vérifie $\|x_n\| = 1$ et tend faiblement vers zéro dans E_k .

De plus, pour tout $b = (B_n) \in \mathcal{M}$, on a :

$$\forall (\lambda_i) \in \mathbb{R}^k \quad \sup_{1 \leq j \leq k} \left| \sum_{i=1}^j \lambda_i \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i x_{B_i} \right\| \leq (1+\varepsilon) \sup_{1 \leq j \leq k} \left| \sum_{i=1}^j \lambda_i \right| \quad .$$

(Autrement dit, la suite finie $(x_{B_1}, \dots, x_{B_k})$ est $(1+\varepsilon)$ -équivalente aux k premiers vecteurs de la base de S .)

La constante d'inconditionnalité des k premiers vecteurs $(e_1, \dots, e_k)$ de la base de S est égale à k (considérer $x = e_1 - 2e_2 + 2e_3 - \dots$ et $y = e_1 + 2e_3 + 2e_5 + \dots$), donc celle de $(x_{B_1}, \dots, x_{B_k})$ est $\geq k/(1+\varepsilon)$. Par la propriété iv) de $\mathcal{M}$, il en résulte que toute sous-suite de la suite (x_n) a une constante d'inconditionnalité $\geq k/(1+\varepsilon)$.

Pour terminer l'exemple C, il faut plonger isométriquement E_k dans $C(\omega^{\cdot(k-1)} + 1)$. D'après le théorème d'extension de Borsuk-Kakutani (cf. [2]), il suffit de plonger E_k isométriquement dans un $C(K_k)$, K_k étant un compact homéomorphe à une partie fermée de $\omega^{\cdot(k-1)} + 1$. D'après le théorème de Mazurkiewicz-Sierpinski [5] il suffit pour cela que K_k soit un compact

dénombrable dont le dérivé $K^{(\omega \cdot (k-1))}$ soit réduit à un point, ou bien vide. Le compact K_k sera choisi de la façon la plus naturelle, en prenant une partie convenable de la boule unité de E'_k . On posera d'abord $\mathfrak{F}_k = \{x_k(a) ; a \in \mathcal{M}\}$, et K_k sera l'adhérence $*$ -faible de $\mathfrak{F}_k$ dans E'_k . D'après la définition de la norme de E_k , il est clair que :

$$\forall y \in E_k, \quad \|y\| = \sup_{\xi \in K_k} |\langle y, \xi \rangle|,$$

donc le plongement de E_k dans $C(K_k)$ est isométrique. Il est plus commode de regarder $\mathfrak{F}_k$ comme une partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, contenue en fait dans le compact $[0,1]^{\mathbb{N}}$, et de regarder K_k comme l'adhérence de $\mathfrak{F}_k$ pour la topologie produit. (On a une injection à image dense de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ dans E_k , donc E'_k s'injecte dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ce qui rend ce point de vue possible.)

Montrons tout d'abord le :

Lemme 3 : L'ensemble K_k est constitué par des éléments de la forme $y = 1_{[1, \dots, n]} \cdot x_k(a)$, $n \in \mathbb{N}$ (c'est-à-dire que $y(j) = x_k(a)(j)$ si $j \leq n$, 0 sinon).

Démonstration : Soit $y \in K_k$. Si $y = 0$, y est bien de la forme voulue. Supposons donc $y \neq 0$, et choisissons une suite $a_n \in \mathcal{M}$ telle que $x_k(a_n)$ converge vers y dans $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Remarquons d'abord que les coordonnées non nulles des $x_k(a_n)$ sont de la forme $1/\sqrt{h}$, h entier ≥ 1 , il en est donc de même pour y . De plus si $y(j) \neq 0$, on aura $x_k(a_n)(j) = y(j)$ pour n assez grand. Remarquons encore que les composantes non nulles des $x_k(a_n)$ prennent exactement k valeurs distinctes, et décroissantes. On en déduit que les composantes non nulles de y prennent au plus k valeurs distinctes, et que ces valeurs sont décroissantes. Soit j le nombre de valeurs distinctes des composantes non nulles de y , et soient $A_1, A_2, \dots, A_j$ les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ sur lesquels y prend les valeurs en question. On a $A_1 < A_2 < \dots < A_j$. De plus ces ensembles sont finis. En effet les $x_k(a_n)$ sont de norme $\sqrt{k}$ dans ℓ_2^j , donc $\|y\|_2 \leq \sqrt{k}$. D'après une remarque précédente, $x_k(a_n) = y$ sur $A_1 \cup \dots \cup A_j$ pour n assez grand. Posons $m = \sup_j A_j$. Les composantes non nulles des $x_k(a_n)$ étant décroissantes, on voit qu'en fait on aura $x_k(a_n) = y$ sur $[1, 2, \dots, m]$ pour n assez grand. Mais alors, toujours pour n assez grand, on aura $y = 1_{[1, \dots, m]} \cdot x_k(a_n)$, ce qui démontre le lemme.

Le lemme 3 indique en particulier que le compact K_k est dénombrable. Nous allons maintenant examiner les ensembles dérivés de K_k . Auparavant,

remarquons que la démonstration du lemme 3 fournit également le résultat suivant :

Lemme 3 bis : Soient $y \in K_k$, et $m = \sup\{j; y(j) \neq 0\}$. Si une suite (y_n) d'éléments de K_k converge vers y , on a $y = 1_{[1, \dots, m]} \cdot y_n$ pour n assez grand.

Si y et z sont deux éléments de K_k , nous noterons $y \prec z$ si $y \neq z$ et s'il existe un entier m tel que $y = 1_{[1, \dots, m]} \cdot z$. Si y est un élément de l'ensemble dérivé K'_k , il existe une suite (y_n) de points K_k qui converge vers y , et telle que $y_n \neq y$ pour tout n . D'après le lemme 3 bis, on a donc $y \prec y_n$ pour n assez grand. Si y est un élément du j -ième dérivé $K^{(j)}$ de K , il existe donc $y_1, y_2, \dots, y_j \in K$ tels que :

$$y \prec y_1 \prec y_2 \dots \prec y_j .$$

Lemme 4 : a) $K_2^{(\omega)} = (0)$

b) $K_{k+1}^{(\omega)} \subset K_k$.

Démonstration : Pour montrer a), il suffit de voir que pour tout $y \neq 0$, $y \in K_2$, il existe un entier j tel que $y \notin K_2^{(j)}$. Soit donc $y \in K_2$, $y \neq 0$. Posons $\ell = \inf\{n; y(n) \neq 0\}$. D'après vi), on a $y(\ell) = 1$ et d'après vii) il existe un entier h tel que pour tout $b = (B_n) \in \mathcal{M}$, $B_1 = \{\ell\} \implies |B_2| = h$. Si on a $y \prec y_1 \prec y_2 \dots \prec y_j$, avec $y_i \in K_2$, il est clair que y_j a au moins $(j+1)$ -composantes non nulles, dont au moins j égales à $1/\sqrt{h}$. Or cela est impossible si $j = h+1$, donc $y \notin K_2^{(h+1)}$.

La démonstration de b) est analogue. Soit $y \in K_{k+1} \setminus K_k$. On peut écrire $y = 1_{[1, \dots, m]} \cdot x_{k+1}(a)$, avec $a = (A_n) \in \mathcal{M}$ et $m \geq \inf A_{k+1}$. En posant $h = |A_{k+1}|$, on peut dire que les composantes non nulles de y au-delà de A_k sont égales à $1/\sqrt{h}$. Comme précédemment si $y \prec y_1 \dots \prec y_j$, avec $y_i \in K_{k+1}$, y_j possède au moins $(j+1)$ composantes non nulles au-delà de A_k , et ces composantes sont égales à $1/\sqrt{h}$, ce qui est impossible si $j = h$. On en déduit que $y \notin K_{k+1}^{(h)}$, et ceci démontre que $K_{k+1}^{(\omega)} \subset K_k$.

Bien entendu le lemme 4 implique que :

$$K_k^{(\omega, (k-1))} \subset \{0\} ,$$

ce qui implique d'après Mazurkiewicz-Sierpinski que K_k est homéomorphe à une partie fermée de $\omega^{(k-1)} + 1$. Ceci achève la présentation de l'exemple C.

Pour l'exemple D nous conservons un ensemble $\mathcal{M}$ possédant les propriétés i) à vii). Si $a = (A_n) \in \mathcal{M}$, avec $A_1 = \{\ell\}$, nous poserons :

$$x'(a) = \sum_{i=1}^{\ell} x_{A_i}.$$

On définit ensuite une norme sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ par la formule $\|y\| = \sup_{a \in \mathcal{M}} | \langle y, x'(a) \rangle |$. On vérifie comme précédemment que la base canonique de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, notée (x_n) , vérifie $\|x_n\| = 1$, tend faiblement vers zéro et ne possède aucune sous-suite inconditionnelle. Pour terminer, il nous faut plonger isométriquement ce dernier espace dans un $C(K)$, où K est homéomorphe à une partie fermée de $\omega^{(\omega^2)} + 1$.

Posons $\mathfrak{K} = \{x'(a) ; a \in \mathcal{M}\}$ et désignons par K l'adhérence de $\mathfrak{K}$ dans $[0,1]^{\mathbb{N}}$. On vérifie facilement que le dernier espace est isométrique à un sous-espace de $C(K)$.

Posons $F_k = \{y \in K ; y(k) = 1\}$. (Noter que les F_k sont deux à deux disjoints.)

Lemme 5 : Les éléments de K sont de la forme $1_{[1, \dots, m]} \cdot x'(a)$. Pour tout entier k , $K \cap F_k \subset K_k$.

Démonstration : Soit $y \neq 0$ un élément de K , et posons $\ell = \inf\{j ; y(j) \neq 0\}$. Soit $x'(a_n)$ une suite de $\mathfrak{K}$ qui converge vers y . La première composante non nulle des $x'(a_n)$ étant égale à 1, on aura $y(\ell) = 1$, et on aura aussi $x'(a_n)(\ell) = 1$ pour n assez grand. Mais alors $x'(a_n) \in \mathfrak{K}_\ell$ pour n assez grand, donc $y \in K_\ell$, ce qui démontre le lemme.

L'ensemble F_k est évidemment fermé, mais il est aussi ouvert dans K . En effet, si (y_n) est une suite dans K convergeant vers y , avec $y(k) = 1$, on aura $y_n(k) = 1$ pour n assez grand. Il en résulte que pour tout ordinal α :

$$K^{(\alpha)} \cap F_k = (K \cap F_k)^{(\alpha)} \subset K_k^{(\alpha)}.$$

D'après la discussion de l'exemple C, on a donc :

$$K^{(\omega^2)} \cap F_k = \emptyset .$$

Mais comme on a $K = \{0\} \cup (\bigcup_k F_k)$, on voit finalement que $K^{(\omega^2)} \subset \{0\}$, et on conclut par une dernière application de Mazurkiewicz-Sierpinski.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. Beauzamy, Propriétés géométriques des espaces d'interpolation, Séminaire Maurey-Schwartz 1974-75, exposé 14.
- [2] J. Lindenstrauss et L. Tzafriri, Classical Banach spaces, Lecture Notes No 338, Springer Verlag.
- [3] J.L. Lions et J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, Publications Math. de l'IHES No 19.
- [4] B. Maurey et H. Rosenthal, A normalized weakly null sequence with no unconditional subsequence, (à paraître dans Studia Math.).
- [5] Z. Semadeni, Banach spaces of continuous functions, vol. I (Warszawa 1971).
