SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. PISIER

Le théorème de la limite centrale et la loi du logarithme itéré dans les espaces de Banach (suite et fin)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1975-1976), exp. nº 4, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1975-1976____A4_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU · 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 5 - 1 9 7 6

LE THEOREME DE LA LIMITE CENTRALE ET LA LOI DU LOGARITHME ITERE DANS LES ESPACES DE BANACH

(Suite et fin)

par G. PISIER

Exposé No IV

18 Novembre 1975

§ 6. LE CAS DES ESPACES DE COTYPE 2

Un espace de Banach E est dit de cotype 2 s'il existe une constante C telle que pour toute suite finie $x_1,\dots,x_n$ d'éléments de E on a :

$$(6.1) \qquad (\Sigma \|x_i\|^2)^{1/2} \le C\, \mathbb{E}\, \|\Sigma\, g_i\, x_i\| \quad .$$

Donnons une autre définition équivalente : E est de cotype 2 si : pour toute suite (x_n) dans E la convergence presque sûre de la série $\Sigma\, g_n\, x_n$ entraîne que $\Sigma \|x_n\|^2 < \infty$. Si l'on remplace (g_n) par (ε_n) dans la définition précédente, on obtient la même notion ; en effet les espaces ayant l'une ou l'autre des deux propriétés ainsi définies ne contiennent pas de ℓ_n^∞ uniformément (au sens de [25]) et par conséquent ([25] corollaire 1.3) une série $\Sigma g_n\, x_n$ converge p.s. si et seulement si la série associée $\Sigma\, \varepsilon_n\, x_n$ converge p.s.

Enfin, rappelons un théorème de Kwapień [24] : si E est à la fois de type 2 et de cotype 2, alors E est isomorphe à un espace de Hilbert.

Dans [7] Jain a remarqué que toute v.a. X vérifiant le TLC sur un espace de cotype 2 vérifie nécessairement $\mathbb{E}\, \|X\|^2 < \infty$. En fait, on a la

Proposition 6.1 : Soit E un espace de Banach, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) E est de cotype 2.
- ii) Toute v.a. à valeurs dans E scalairement centrée ayant une covariance prégaussienne vérifie le TLC.
- iii) Toute v.a. à valeurs dans E scalairement centrée ayant une covariance prégaussienne vérifie la LLI.
- iv) Toute v.a. X à valeurs dans E scalairement centrée ayant une covariance prégaussienne vérifie $\mathbb{E}\, \|X\|^2 < \infty$.

La démonstration est laissée au lecteur ; pour ii) $\Rightarrow$ i) et iii) $\Rightarrow$ i), on peut utiliser la même idée que dans la démonstration de la proposition 5.2.

Remarque 6.1 : Soit X une v.a. à valeurs dans un espace de cotype 2. D'après la proposition 6.1 on a les implications :

$$\text{X vérifie le TLC} \Longrightarrow \text{X vérifie la LLI}$$
$$\searrow \; \mathbb{E}\, \|X\|^2 < \infty \quad .$$

La proposition précédente n'est qu'une reformulation des idées de [26] exp. VII. La propriété caractéristique des espaces de cotype 2 est : tout opérateur d'un espace de Hilbert à valeurs dans l'espace considéré qui radonifie la probabilité cylindrique de Gauss est nécessairement 2-sommant (cf. [26] exp. VII th. 2).

Rappel 6.1 : Un opérateur $u : E \to F$ est dit 2-sommant s'il existe une constante C vérifiant :

$$\Sigma \, \|u\, x_i\|^2 \leq C^2 \sup \{\Sigma\, \xi(x_i)^2 \mid \xi \in E' \quad \|\xi\| \leq 1\}$$

pour toute suite (x_i) dans E. On note $\pi_2(u)$ la borne inférieure de l'ensemble de ces constantes.

Le cadre des opérateurs 2-radonifiants (et donc de v.a. cylindriques ...) conviendrait mieux à la proposition suivante, qui est un corollaire des résultats de [15] (exp. 11, 12, 17 § 4). La démonstration (même technique qu'à la proposition 5.2) est laissée au lecteur.

Proposition 6.2 : Soit $u : E \to F$ un opérateur entre espaces de Banach. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) u est 2-sommant.

ii) Il existe une constante C telle que pour toute v.a. X scalairement centrée (i.e. $\mathbb{E}\, \xi(X) = 0 \ \forall\, \xi \in E'$) à valeurs dans E, on a :

$$CL(u \circ X) \leq C\, \sigma_X \quad .$$

iii) Il existe une constante C telle que pour toute v.a. X scalairement centrée à valeurs dans E, on a :

$$LI(u \circ X) \leq C\, \sigma_X \quad .$$

§ 7. CONTRE-EXEMPLES

Commençons par un contre-exemple montrant que la LLI n'implique pas le TLC pour une variable aléatoire donnée.

Exemple 7.1 (Kuelbs [23] : Considérons la v.a. $X = \sum_{n\geq 2} \varepsilon_n \, e_n / \sqrt{\operatorname{Log} n}$ à valeurs dans l'espace c_o, où l'on a noté (e_n) la base canonique de c_o ; cette v.a. vérifie la LLI mais ne vérifie pas le TLC.

Démonstration : Il est clair que X est bien une v.a. à valeurs dans c_o ; X ne vérifie pas le TLC car aucune mesure de Radon gaussienne sur c_o n'a la même covariance que X : en effet une telle mesure serait la loi de la v.a. $\sum_{n\geq 2} g_n \, e_n / \sqrt{\operatorname{Log} n}$ or il est bien connu que :
$\overline{\lim_{n\to\infty}} |g_n| / \sqrt{\operatorname{Log} n} = 1/\sqrt{2} \neq 0$. Montrons que X vérifie la LLI : notons R_N l'opérateur de c_o dans c_o défini par

$$R_N \, e_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < N \\ e_n & \text{si } n \geq N \end{cases} .$$

D'après le théorème 1.1, il suffit de vérifier que $\{S_n / a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est p.s. relativement compact ; dans ce cas particulier cela équivaut à montrer que

$$\alpha_N = \sup_{n\geq 1} \| R_N \, S_n / a_n \| \quad \text{tend vers 0 p.s. si } N \to \infty \quad .$$

Or on peut écrire

$$\alpha_N = \sup_{m\geq N} \varphi_m / \sqrt{\operatorname{Log}\, m}$$

où les v.a. (φ_m) sont indépendantes équidistribuées suivant la même loi que la variable $\varphi = \sup_{n\geq 1} \left| \Sigma_1^n \, \varepsilon_i \right| / a_n$. Nous aurons besoin du

Lemme 7.1 : $\forall \lambda > 0 \quad \exists K_\lambda$ t.q. $\forall c > 0$

$$\mathbb{P}(\varphi > c) \leq K_\lambda \, e^{-\lambda c^2} \quad .$$

Il résulte immédiatement du lemme 7.1 que $\alpha_N \xrightarrow{p.s.} 0$ si $N \to \infty$. En effet, on déduit du lemme 7.1 que :

$$\forall\, \eta > 0 \qquad \sum_m \mathbf{P}(\varphi_m > \eta \sqrt{\operatorname{Log} m}) < \infty \quad .$$

Donc
$$\varlimsup_{N\to\infty} \alpha_N = \varlimsup_{m\to\infty} \varphi_m \Big/ \sqrt{\operatorname{Log} m} \le \eta \quad \text{p.s.} \ \forall\, \eta > 0 \quad .$$

On a donc bien :
$$\lim \alpha_N = 0 \quad \text{p.s.}$$

La démonstration du lemme 7.1 repose sur le fait que les variables (ε_n) sont uniformément bornées ; on peut l'établir par des calculs similaires à ceux de la proposition 4.2.

N. Jain a donné dans [22] le premier exemple d'une v.a. X à valeurs dans $C[0,1]$ vérifiant le TLC mais pas la LLI, et telle que $\mathbf{E}\,\|X\|^2 = \infty$. Nous avons complété ce contre-exemple :

<u>Notation</u> : On note (e_n) la base canonique de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et on pose : $\forall\, (\lambda_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$\|\Sigma\, \lambda_n e_n\|_\alpha = \begin{cases} (\Sigma\, |\lambda_n|^\alpha)^{1/\alpha} & \text{si } 0 < \alpha < \infty \\ \sup |\lambda_n| & \text{si } \alpha = \infty \end{cases} .$$

<u>Exemple 7.2</u> :

1o) Il existe une v.a. X à valeurs dans l'espace ℓ^α, [illegible] ∞ vérifiant à la fois le TLC et la LLI sur ces espaces mais telle que

$$\mathbf{E}\,\|X\|_\alpha^2 = \infty \quad \text{si } 2 < \alpha \le \infty \quad .$$

2o) Il existe une v.a. à valeurs dans l'espace ℓ^α, $2 < \alpha \le \infty$, vérifiant le TLC mais ne vérifiant pas la LLI.

On notera que si $2 < \alpha < \infty$, ℓ^α est de type 2. Ces exemples montrent que l'hypothèse de cotype 2 dans la remarque 6.1 ne peut pas être supprimée.

Passons à notre exemple : Soit f une v.a. scalaire centrée et de carré intégrable, soit (f_n) une suite de v.a. indépendantes équidistribuées suivant la même loi que f. On va étudier la v.a. X à valeurs dans ℓ^α

ou c_o définie par :

$$X = \Sigma_1^\infty f_n \, e_n / \sqrt{n} \quad .$$

Nous allons donner en une suite de propositions des C.N.S. portant sur f pour que X vérifie le TLC, la LLI ou pour que $\mathbb{E}\, \|X\|_\alpha^2 < \infty$.
Nous aurons besoin de plusieurs lemmes élémentaires :

<u>Lemme 7.2</u> : Pour tout α dans $]2,\infty]$, il existe une constante $K_\alpha > 0$ telle que pour toute v.a.r. f :

$$(7.1) \qquad 1/K_\alpha \, (\mathbb{E}\, |f|^2)^{1/2} \leq \mathbb{E}\, \|X\|_\alpha \leq K_\alpha \, (\mathbb{E}\, |f|^2)^{1/2} \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Commençons par l'inégalité de gauche : si $\mathbb{E}\, \|X\|_\alpha < \infty$, alors a fortiori $\sup |f_n| / \sqrt{n} < \infty$ p.s., d'où l'on déduit classiquement que $\mathbb{E}\, |f|^2 < \infty$. On obtient la constante par le théorème du graphe fermé (ou directement !).
Pour l'autre inégalité, notons tout d'abord que si $\mathbb{E}\, |f|^2 < \infty$ alors $\Sigma\, |f_n / \sqrt{n}|^\alpha < \infty$ p.s. ; cela résulte trivialement du théorème des trois séries (ici des 2 séries !). Par le théorème du graphe fermé, on en déduit :
$\forall\, \delta > 0 \;\; \exists\, C_\alpha^\delta$ tel que pour toute v.a. f :

$$P\{ \|X\|_\alpha \geq C_\alpha^\delta (\mathbb{E}\, f^2)^{1/2} \} \leq \delta \quad .$$

Supposons f centrée.
Puisque $\mathbb{E}\, f^2 = \mathbb{E}\, |f_1 + \ldots + f_n / \sqrt{n}|^2$, on obtient que si $\mathbb{E}\, f^2 < \infty$, alors la suite des v.a. $\|X_1 + \ldots + X_n / \sqrt{n}\|_\alpha$ est bornée en probabilité (c'est-à-dire dans l'e.v.t. L^0). La remarque 2.1 s'applique donc et on conclut que $\mathbb{E}\, \|X\|_\alpha < \infty$. Le cas général s'en déduit par centrage.

<u>Proposition 7.1</u> : Si f est centrée et de carré intégrable alors X vérifie le TLC sur l'espace ℓ^α pour $2 < \alpha < \infty$ et sur l'espace c_o.

<u>Démonstration</u> : D'après le lemme précédent si $\mathbb{E}\, |f|^2 < \infty$ alors $X \in CL_\infty(\ell^\alpha)$, pour tout $\alpha > 2$. On montre aisément qu'en fait $X \in CL(\ell^\alpha)$: puisque L_o^∞ est dense dans L_o^2, on se ramène au cas où $f \in L_o^\infty$ qui est facile.

Pour alléger, on pose dans la suite $\forall\, x > 0$, $Lx = |\mathrm{Log}\; x|$.

Proposition 7.2 : Si $\mathbb{E}\,\|X\|_\alpha^2 < \infty$, alors nécessairement :

$$\mathbb{E}\,(|f|^2\, L|f|) < \infty \quad .$$

En fait, on peut voir que cette condition est aussi suffisante.

Démonstration : Posons $\forall\, x > 0$:

$$\Phi(x) = P(\sup |f_n/\sqrt{n}| > x)$$

et
$$\varphi(x) = P(|f| > x) \quad .$$

Par un calcul classique on voit que si x est assez grand (disons $x \geq x_o$) $\Phi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(x\sqrt{n})$. Donc si $\mathbb{E}\,\|X\|_\alpha^2 < \infty$, on a $\int_0^\infty x\ \Phi(x)\ dx < \infty$ donc $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_o}^{\infty} x\ \varphi(x\sqrt{n})\ dx < \infty$. D'où :

$$\sum_n \int_{x_o\sqrt{n}}^{\infty} \varphi(y)\ y\ dy/n < \infty$$

soit
$$\int_0^\infty \varphi(y) \left[\sum_{n \leq (y/x_o)^2} 1/n \right] y\ dy$$

par conséquent $\int \varphi(y)\ \mathrm{Log}(y/x_o) y\ dy < \infty$, ce qui entraîne bien $\mathbb{E}\,(|f|^2\, L|f|) < \infty$.

Proposition 7.3 : La v.a. X à valeurs dans ℓ^α, $2 < \alpha \leq \infty$, vérifie la LLI si et seulement si

$$\mathbb{E}\left(|f|^2 \frac{L|f|}{LL|f|}\right) < \infty \quad . \tag{7.2}$$

Démonstration : On notera $LI^\alpha(X)$ la norme de X dans l'espace $LI_\infty(\Omega, \mathbb{P}; \ell^\alpha)$; soit (θ_m) une suite de v.a.r. indépendantes équidistribuées suivant la même loi que $\theta = \sup\limits_{n\geq 1} |\Sigma_1^n\ f_i| / a_n$. Observons que :

$$LI^\alpha(X) \leq \mathbb{E}\,(\Sigma\ |\theta_m/\sqrt{m}|^\alpha)^{1/\alpha} \quad ,$$

donc d'après (7.1) :
$$LI^\alpha(X) \leq K_\alpha (\mathbb{E}\,\theta^2)^{1/2} \quad .$$

Par ailleurs :

$$LI^{\alpha}(X) \geq \mathbb{E} \sup \theta_m / \sqrt{m} \geq \frac{1}{K_\infty} (\mathbb{E}\, \theta^2)^{1/2} \quad .$$

Les deux inégalités précédentes assurent que si $2 < \alpha \leq \infty$: $\mathbb{E}\, \theta^2 < \infty$ si et seulement si $LI^{\alpha}(X) < \infty$.

D'après le corollaire 3.4 de [4], $\mathbb{E}\, \theta^2 < \infty$ si et seulement si : $\theta < \infty$ p.s. et $\mathbb{E} \sup |f_n / a_n|^2 < \infty$. Puisqu'on suppose $\mathbb{E}\, |f|^2 < \infty$, on sait (cf. rappels 2), § 0) que $\theta < \infty$ p.s; il suffit donc de traîter la condition $\mathbb{E} \sup |f_n / a_n|^2 < \infty$.

Par un calcul facile (mais fastidieux) analogue à celui de la proposition 7.2, on peut vérifier que $\mathbb{E} \sup |f_n / a_n|^2 < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}\, f^2\, L|f| / LL|f| < \infty$.

On conclut donc que (7.2) est nécessaire et suffisant pour que $X \in LI_\infty(\ell^\alpha)$.

En fait, si $f \in L_0^\infty$, on voit aisément que $X \in LI(\ell^\alpha)$; dans le cas général, il suffit de faire une approximation convenable de f par des variables de L_0^∞ .

Applications des propositions 7.1, 7.2 et 7.3 : On obtient l'exemple 2 1o) en choisissant f centrée telle que $\mathbb{E}\, |f|^2\, Lf/LLf < \infty$ mais $\mathbb{E}\, |f|^2\, Lf = \infty$; il est clair que ce choix est possible. On obtient l'exemple 2 2o) en choisissant f telle que $\mathbb{E}\, |f|^2 < \infty$ et $\mathbb{E}\, |f|^2\, L|f| / LL|f| = \infty$.

Problème 7.1 : Soit E un espace de Banach. On suppose que, pour tout espace de probabilité (Ω, P)

$$CL(\Omega, P\,;\, E) \subset LI(\Omega, P\,; E) \quad .$$

L'espace E est-il nécessairement de cotype 2 ?

Problème 7.2♦ : Dans la même situation, on suppose que pour tout (Ω, P) $CL(\Omega, P\,;\, E) \subset L^2(\Omega, P; E)$; est-ce que E est de cotype 2 ?

Théorème 7.1 : Chacune des propriétés de l'espace E décrites aux problèmes 7.1 et 7.2 implique que E est de cotype-q (au sens de [25]) pour tout $q > 2$.

♦ Cette question vient d'être résolue par l'affirmative par David Aldous (communication personnelle).

Démonstration : Nous utilisons la terminologie de [25] sans la rappeler : chacune des propriétés se réduit à des inégalités entre certaines normes sur l'espace $\mathcal{E}_o(\Omega, P ; E)$; par conséquent, chacune d'elles est une super-propriété. L'exemple 7.2 montre que l'espace ℓ^{α} n'a aucune de ces propriétés si $\alpha > 2$. Par conséquent, chacune de ces propriétés implique que : ℓ^{α} n'est pas finiment représentable dans E si $\alpha > 2$. Or, le théorème 2.3 de [25] affirme qu'un espace ayant cette dernière propriété est nécessairement de cotype q pour tout $q > 2$. cqfd.

Exemple 7.3♦ : Il existe une v.a. X à valeurs dans c_o, ne vérifiant pas la LLI, mais vérifiant $\sup \| S_n / a_n \| < \infty$ p.s.

Cet exemple montre qu'en général $LI_{\infty}(c_o) \neq LI(c_o)$; l'analogue pour le TLC est très facile à voir : la variable de l'exemple 7.1 est dans $CL_{\infty}(c_o)$ mais pas dans $CL(c_o)$.

Démonstration : Considérons la v.a. $X \in L^0(c_o)$ définie par

$$X = \Sigma \, \alpha_n \, e_n \, \varepsilon_n \quad ,$$

où (α_n) est une suite élément de c_o.
Reprenons les notations de l'exemple 7.1 : on voit immédiatement par Borel-Cantelli que :

- $\{S_n / a_n\}$ est p.s. borné si et seulement si $\exists \; a \in \,]0,\infty[$ tel que

$$(7.3) \qquad \Sigma \, P\left(\varphi_n > \frac{a}{|\alpha_n|} \right) < \infty \quad .$$

- •• $\{S_n / a_n\}$ est p.s. relativement compact si et seulement si (7.3) est vérifié $\forall \; a > 0$.

Puisque $P(\varphi > c)$ décroît exponentiellement vers 0 quand c croît vers l'infini (cf. lemme 7.1), il en résulte que

$$\lim_{c \to \infty} \frac{P(\varphi > 2c)}{P(\varphi > c)} = 0 \quad .$$

♦ Un résultat "positif" est donné à la remarque 1.5.

On peut donc trouver une suite (c_n) croissant vers l'infini telle que

(7.4) $$P(\varphi > 2c_n) \leq (1/2^n)\, P(\varphi > c_n) \quad .$$

Soit M_n l'entier défini par :

(7.5) $$M_n - 1 \leq \frac{1}{P(\varphi > c_n)} < M_n \quad .$$

On peut alors définir (α_n) par :

$$\alpha_m = 1/c_n \quad \text{si} \quad M_1 + \ldots + M_{n-1} < m \leq M_1 + \ldots + M_n \quad .$$

On tire de (7.4) et (7.5) :

$$\sum_m P(\varphi > 2/\alpha_m) = \sum_n M_n\, P(\varphi > 2c_n)$$

$$\leq \sum_n 1/2^n\, [P(\varphi > c_n) + 1] < \infty \quad ;$$

mais, par ailleurs :

$$\sum_m P(\varphi > 1/\alpha_m) = \sum M_n\, P(\varphi > c_n) \geq \sum 1 = \infty \quad .$$

Ce qui fournit le contre-exemple annoncé.

<u>Problème 7.3</u> : Caractériser les espaces de Banach E pour lesquels on a toujours $CL_\infty(E) = CL(E)$ et ceux pour lesquels on a $LI_\infty(E) = LI(E)$.

<u>BIBLIOGRAPHIE</u> (Suite et fin)

[22] N.C. Jain, An example concerning CLT and LIL in Banach spaces, à paraître.

[23] J. Kuelbs, A counterexample for Banach space valued random variables, à paraître.

[24] S. Kwapień, Studia Math. 44 (1972) 583-595.

[25] B. Maurey et G. Pisier, Séries de v.a. vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces des Banach, Studia Math., à paraître

[26] Séminaire Maurey-Schwartz 1972-73, Ecole Polytechnique Paris.
