

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Exposé IV. Additif au théorème (4.3)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1975-1976), p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1975-1976__A23_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exposé IV. Additif au théorème (4.3)

(Schachermayer)

Dans le théorème (4.3), on peut remplacer le type $(\tau, 1)$ par le type (τ, p) , pour un $p \geq 0$ arbitraire fini. C'est intéressant pour le type $(\tau, 0)$; rappelons qu'une probabilité cylindrique Λ est de type $(\tau, 0)$ si et seulement si elle est scalairement concentrée sur la famille des parties faiblement compactes convexes, ou encore si son image de Fourier est continue pour $\tau(E', E)$.

Lemme (4.3 bis) : Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé complet. Pour qu'une application linéaire u de E' dans un espace vectoriel topologique localement convexe F soit continue de $\tau(E', E)$ dans F , il faut et il suffit que sa restriction à toute partie équicontinue de E' le soit^{*}.

Démonstration : Soit W un voisinage disqué de 0 dans F . Nous devons montrer que $M' = u^{-1}(W)$ est un voisinage de 0 de $\tau(E', E)$; comme toute application linéaire est continue de $\sigma(E', E'^*)$ dans $\sigma(F, F')$, M' est disqué dans $\sigma(E', E'^*)$. Les polarités seront considérées pour la dualité séparante entre E' et E'^* . Soit V un voisinage disqué de 0 dans E ; V^0 est équicontinue. Donc la restriction de u à V^0 est continue de $\tau(E', E)$ dans F , donc $M' \cap V^0$ est un voisinage de 0 dans V^0 pour la topologie induite par $\tau(E', E)$. Donc il existe K faiblement compact disqué de E tel que $K^0 \cap V^0 \subset M' \cap V^0 \subset M'$. Donc $M'^0 \subset (K^0 \cap V^0)^0$; mais K^0 et V^0 sont disqués dans $\sigma(E', E'^*)$, donc $(K^0 \cap V^0)^0 = (K^{00} \cup V^{00})^{00} = (K \cup V^{00})^{00}$ (puisque K est faiblement compact disqué) $\subset (K + V^{00})^{00} = K + V^{00}$, car la somme d'un compact disqué et d'un fermé disqué est fermée disquée. Ainsi $M'^0 \subset K + V^{00} \subset E + V^{00}$. Cela prouve que, dans E'^* muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E' , tout point de M'^0 est adhérent à E ; mais E est complet pour cette topologie, par hypothèse, donc fermé dans E'^* , donc $M'^0 \subset E$ donc $\subset K + V$: pour tout V , il existe K tel que $M'^0 \subset K + V$. Cela

* Résultat voisin d'un théorème général de Grothendieck.

prouve aussitôt que M'^0 est borné dans E ; mais un disqué borné de $\sigma(E'^*, E')$ est compact dans cet espace, donc M'^0 est faiblement compact disqué dans E . Puisque M' est disqué dans $\sigma(E', E'^*)$, $M' = M'^{00}$ est un voisinage de 0 de $\tau(E', E)$, cqfd.

Lemme (4.3 ter) : Soit E un Banach. Une probabilité cylindrique Λ sur E , de type $p > 1$ et de type $(\tau, 0)$, est de type (τ, q) pour tout $q < p$.

Démonstration : Il suffit de le montrer pour $1 < q < p$. Alors Λ est réalisable par une application linéaire $f: E' \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$, continue de E' dans $L^p(\Omega, \mu)$ et de $\tau(E', E)$ dans $L^0(\Omega, \mu)$. Nous voulons montrer qu'elle est continue de $\tau(E', E)$ dans $L^q(\Omega, \mu)$ localement convexe. D'après le lemme précédent, il suffit que sa restriction à la boule unité de E' le soit. Mais l'image de cette boule par f est dans une boule de $L^p(\Omega, \mu)$, et, sur une boule de L^p , la topologie L^0 coïncide avec celle de L^q , $q < p$. cqfd.

Théorème (4.3) modifié : Si E vérifie RNP, toute probabilité cylindrique Λ de type $(\tau, 0)$ sur E et de Radon sur $\sigma(E'', E')$ est de Radon sur E .

Inversement, si toute probabilité cylindrique sur E , de type $+\infty$ et de type (τ, p) , $p \geq 0$ fini, est de Radon sur E , E a la propriété RNP.

Démonstration : Supposons que E ait la propriété RNP. Soit Λ une probabilité cylindrique sur E , de type $(\tau, 0)$, réalisée par une fonction aléatoire linéaire $f: E' \rightarrow L^0(\Omega, \mu)$, continue sur $\tau(E', E)$, et de Radon sur $\sigma(E'', E')$.

On peut alors la réaliser par $\Phi: \Omega \rightarrow E''$, $*$ -scalairement μ -mesurable, $|\Phi|$ μ -mesurable, avec $f(\xi) = \xi \circ \Phi$ pour $\xi \in E'$ (théorème 4.1)). Soit

$\Omega_N = \{\omega \in \Omega ; |\Phi(\omega)| \leq N\}$, μ -mesurable. Alors $\Phi 1_{\Omega_N}$ réalise une mesure de

Radon sur $\sigma(E'', E')$, portée par la boule de rayon N , réalisée par

$\xi \mapsto (\xi \circ \Phi) 1_{\Omega_N}$, donc de type $+\infty$. Alors cette mesure cylindrique, de type $+\infty$

et de type $(\tau, 0)$, est de type $(\tau, 1)$ par le lemme (4.3 ter), et par le théorème (4.3) démontré dans l'exposé, elle est de Radon sur E . Cela prouve

que $\Phi 1_{\Omega_N}$ est $*$ -scalairement μ -presque partout égale à une fonction μ -mesurable,

bornée en module par N , à valeurs dans E , et portée par Ω_N . Comme

$\bigcup_N \Omega_N = \Omega$, Φ a la même propriété, et Λ est de Radon sur E .

Inversement, supposons que toute probabilité cylindrique Λ sur E , de type $+\infty$, de type (τ, p) (p fini), soit de Radon sur E . Si $p \leq 1$, c'est a fortiori vrai pour le type $(\tau, 1)$. Si $p > 1$, le lemme (4.3 ter) dit que toute

probabilité cylindrique de type $+\infty$, de type $(\tau, 1)$, est de type (τ, p) , donc c'est encore vrai pour le type $(\tau, 1)$. Alors le théorème (4.3) de l'exposé permet de conclure que E a la propriété RNP.

Remarque : On ne peut par contre pas supprimer toute condition. Si E n'est pas réflexif, et si $a \in E'' \setminus E$, δ_a est une probabilité de Radon sur $\sigma(E'', E')$ qui n'est pas de Radon sur E . Elle n'est pas de type $(\tau, 0)$. D'ailleurs, toute probabilité de Radon sur E est de type $(\tau, 0)$.
