

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. PISIER

(Annexe n° 1) Corrections et additions à l'exposé III

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1975-1976), p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1975-1976__A21_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 5 - 1 9 7 6

CORRECTIONS ET ADDITIONS A L'EXPOSE III

G. PISIER

CORRECTIONS

p. III.20 Supprimer la deuxième phrase de la Remarque 4.1, qui est inexacte.

p. III.21, l. 3 Remplacer "connu" par "vrai".

Enfin, il y a une traduction moins contestable de "central limit theorem" : "théorème-limite central" !

ADDITIONS

On peut donner une démonstration plus simple du fait que toute v.a. gaussienne vérifie la LLI :

Démonstration du Corollaire 4.1 : Puisque la distribution de X est une mesure de Radon, il existe K compact convexe équilibré tel que

$$\mathbb{P}(X \in K) > 1/2 \quad .$$

Par conséquent, si l'on note j_K la jauge de K :

$$P(j_K(X) \leq 1) > 1/2 \quad .$$

La démonstration du théorème de Fernique [2] assure alors qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\mathbb{E} e^{\alpha j_K(X)^2} < \infty \quad .$$

Puisque X est gaussienne, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E} e^{\alpha j_K(S_n/\sqrt{n})^2} = \mathbb{E} e^{\alpha j_K(X)^2} \quad .$$

Le lecteur peut alors reprendre la preuve (élémentaire) de la proposition 4.2 et conclure aisément que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} j_K(S_n/a_n) \stackrel{p.s.}{\leq} \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \quad .$$

Par conséquent $\{S_n/a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est p.s. inclus dans un homothétique de K , donc est relativement compact p.s. cqfd

Le fait de travailler avec les jauges j_k permet de simplifier aussi la démonstration du théorème 4.3 ; il suffit pour cela de remarquer que si une v.a. X à valeurs dans un Banach E (séparable) vérifie $\mathbb{E} \|X\|^2 < \infty$, alors il existe un compact/convexe ^{équilibré} $K \subset E$ tel que $\mathbb{E} j_k(X)^2 < \infty$; les autres modifications sont faciles. On évite ainsi l'utilisation du théorème 3.1.

Le théorème 4.3 a été tout récemment amélioré par J. Kuelbs qui a démontré le

Théorème [27] : Pour qu'une v.a. X à valeurs dans un espace de Banach vérifie la LLI, il suffit que $\mathbb{E} \|X\|^2 < \infty$ et que $S_n/a_n \rightarrow 0$ en probabilité.

Ce résultat permet de donner une caractérisation des espaces de Banach (ou des opérateurs) pour lesquels les conditions classiques sont suffisantes pour la LLI :

Corollaire : Soit $u: E \rightarrow F$ un opérateur entre espaces de Banach, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Pour toute v.a. $X(.)$ à valeurs dans E telle que $\mathbb{E} X = 0$ et $\mathbb{E} \|X\|^2 < \infty$, la v.a. $u(X(.))$ à valeurs dans F vérifie la LLI.

ii) Il existe une constante C telle que, pour toute suite finie $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de E et pour tout entier $n \geq 3$ on a :

$$(1) \quad \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u(x_i) \right\| \leq C \sqrt{\text{Log Log } n} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right)^{1/2}.$$

Démonstration : L'implication $i) \Rightarrow ii)$ est démontrée dans l'exposé III, corollaire 5.2, page 26.

$ii) \Rightarrow i)$. On se ramène facilement au cas où X est une v.a. symétrique à valeurs dans E ; on note que $\mathbb{E} \|u(X)\|^2 \leq \|u\|^2 \mathbb{E} \|X\|^2 < \infty$; d'après le théorème ci-dessus, il suffit de montrer que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \|u(S_n/a_n)\| = 0.$$

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'espace de probabilité de référence ; d'après (1), on a pour ω fixé dans Ω :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \mathbf{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u(X_i(\omega)) \right\| \leq C \sqrt{\text{Log Log } n} \left(\sum_{i=1}^n \|X_i(\omega)\|^2 \right)^{1/2}$$

(en supposant bien entendu que $(\varepsilon_n)_n$ est une suite de Bernoulli indépendante de (X_n)). En intégrant en ω et en utilisant la symétrie des v.a. $X_1, X_2, \dots$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \mathbf{E} \|u(S_n)\| \leq C a_n (\mathbf{E} \|X\|^2)^{1/2}.$$

En d'autres termes, si l'on pose

$$\Lambda(u(X)) = \sup_n \mathbf{E} \|u(S_n / a_n)\|, \quad ,$$

on a démontré :

$$(2) \quad \Lambda(u(X)) \leq C (\mathbf{E} \|X\|^2)^{1/2}.$$

Soit $\varepsilon > 0$, soit Y une v.a. étagée symétrique à valeurs dans E telle que $\mathbf{E} \|X - Y\|^2 \leq \varepsilon^2$, on a d'après (2) :

$$\Lambda(u(X - Y)) \leq C \varepsilon ;$$

on peut remarquer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \|u(Y_1 + \dots + Y_n) / a_n\| = 0$ puisque $u(Y)$ est étagée.

On a donc $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \|u(S_n / a_n)\| \leq 0 + \Lambda(X - Y) \leq C \varepsilon$.

On conclut bien que $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \|u(S_n / a_n)\| = 0$ puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire.

Remarque 1 : Le corollaire précédent est l'analogue pour la LLI du théorème 4.1 et de sa réciproque, le corollaire 5.1.

Il en résulte qu'il existe des espaces de Banach dans lesquels les conditions classiques (i.e. $\mathbf{E} X = 0$ et $\mathbf{E} \|X\|^2 < \infty$) suffisent pour la LLI mais ne suffisent pas pour le TLC.

En effet, il existe des espaces de Banach dont l'opérateur identité vérifie la propriété ii) du corollaire ci-dessus mais qui ne sont pas de type 2.

Pour en convaincre le lecteur probabiliste, nous détaillons la construction d'un tel exemple.

Pour alléger, nous introduisons la :

Notation : Soit E un espace de Banach et n un entier ; nous noterons $\gamma_n(E)$ la plus petite constante C telle que, pour tout n -uple $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E on a :

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^2 \leq C^2 \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 .$$

La suite $(\gamma_n(E))_{n \geq 1}$ est croissante. De plus, on peut voir aisément que $1 \leq \gamma_n(E) \leq \sqrt{n} \quad \forall n \geq 1$.

Soit $(E_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une famille d'espaces de Banach. Nous notons $\ell^2(\{E_m\})$ l'espace des suites $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ où $x_m \in E_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$, muni de la norme $(x_m)_{m \in \mathbb{N}} \rightarrow (\sum \|x_m\|^2)^{1/2}$. Il est évident que :

$$(3) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \gamma_n(\ell^2(\{E_m\})) \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} \gamma_n(E_m) .$$

Soit $p \in [1, \infty[$ et $m \in \mathbb{N}$; nous notons ℓ_m^p l'espace de Banach obtenu en munissant $\mathbb{R}^m$ de la norme $(\alpha^1, \dots, \alpha^m) \in \mathbb{R}^m \rightarrow (\sum_{i=1}^m |\alpha^i|^p)^{1/p}$.

Lemme : Soient m, n entiers et p tel que $1 \leq p \leq 2$, on a :

$$\gamma_n(\ell_m^p) = (\min\{m, n\})^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} .$$

Démonstration : Tout d'abord, rappelons une inégalité due à Clarkson : si $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, $1 \leq p \leq 2$, on a :

$$(4) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^n \quad \left(\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i \right|^q \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p \right)^{1/p} .$$

Cette inégalité s'établit facilement par interpolation entre les cas $p = 1$ et $p = 2$.

Soit x un élément de ℓ_m^p , nous notons simplement x^j pour la j -ième coordonnée de x ($1 \leq j \leq m$) ; par ailleurs nous notons $\|x\|$ la norme dans ℓ_m^p .

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ dans ℓ_m^p , on déduit de (4) :

$$\sum_{j=1}^m \left(\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^j \right|^q \right)^{p/q} \leq \sum_{i,j} |x_i^j|^p ,$$

d'où puisque $q \geq p$:

$$\left\{ \mathbf{E} \left(\sum_{j=1}^m \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^j \right|^p \right)^{q/p} \right\}^{1/q} \leq \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p}$$

soit :

$$(5) \quad \left(\mathbf{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^q \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p}.$$

Puisque $q \geq 2$, $\left(\mathbf{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\mathbf{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^q \right)^{1/q}$, et par l'inégalité

de Holder $\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p} \leq n^{1/p - 1/2} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right)^{1/2}$, on déduit donc de (5)

que $\gamma_n(\ell_m^p) \leq n^{1/p - 1/2}$.

D'autre part, on sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad \left(\sum_{j=1}^m |x_j|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{j=1}^m |x_j|^p \right)^{1/p} \leq m^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^m |x_j|^2 \right)^{1/2};$$

il en résulte que :

$$\left(\mathbf{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^2 \right)^{1/2} \leq m^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \right)^{1/2}.$$

Par conséquent $\gamma_n(\ell_m^p) \leq m^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}$, on a donc établi que

$$\gamma_n(\ell_m^p) \leq (m \wedge n)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}.$$

L'inégalité inverse est triviale : notant $e_1, \dots, e_m$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$, posant $k = m \wedge n$, on a :

$$\left(\mathbf{E} \left\| \sum_{i=1}^k \varepsilon_i e_i \right\|^2 \right)^{1/2} = k^{1/p}$$

et

$$\left(\sum_{i=1}^k \|e_i\|^2 \right)^{1/2} = k^{1/2}$$

donc nécessairement $\gamma_n(\ell_m^p) \geq \gamma_k(\ell_m^p) \geq k^{1/p - 1/2}$. cqfd

Remarque 2 : Le lemme précédent montre que : $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall C$ tel que $1 \leq C \leq \sqrt{n}$, il existe un espace de Banach E tel que $\gamma_n(E) = C$.

Exemple : Il existe un espace de Banach E et un entier M tel que

$$\forall n \geq M \quad \gamma_n(E) = \sqrt{\text{Log Log } n}.$$

Démonstration : Pour tout entier $m \geq e^e$, soit p_m tel que $\frac{1}{p_m} - \frac{1}{2} = \sqrt{\text{Log Log } m}$; nécessairement $1 \leq p_m \leq 2$. Par ailleurs on vérifie aisément qu'il existe un entier M tel que :

$$\forall m \geq M \quad p_{m+1} \geq p_m.$$

On pose $E = \ell^2(\{\ell_m^{p_m}, m \geq M\})$.

D'après le lemme et d'après (3), on a :

$$\gamma_n(E) \leq \sup_{m \geq M} (m \wedge n)^{\frac{1}{p_m} - \frac{1}{2}} ;$$

or si $M \leq m \leq n$, on a :

$$(m \wedge n)^{\frac{1}{p_m} - \frac{1}{2}} = m^{\frac{1}{p_m} - \frac{1}{2}} = \sqrt{\text{Log Log } m} \leq \sqrt{\text{Log Log } n} ;$$

et si $n \leq m$, on a (puisque p_m croît avec m) :

$$(m \wedge n)^{\frac{1}{p_m} - \frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{p_m} - \frac{1}{2}} \leq n^{\frac{1}{p_n} - \frac{1}{2}} = \sqrt{\text{Log Log } n}.$$

En conclusion, $\gamma_n(E) \leq \sqrt{\text{Log Log } n}$.

Par ailleurs, puisque $\ell_m^{p_m}$ est, pour $m \geq M$, un sous-espace de E , on a nécessairement, si $n \geq M$, $\gamma_n(E) \geq \gamma_n(\ell_n^{p_n})$, donc d'après le lemme

$$\gamma_n(E) \geq n^{\frac{1}{p_n} - \frac{1}{2}} = \sqrt{\text{Log Log } n}. \quad \underline{\text{cqfd}}$$

[27] J. Kuelbs, Kolmogorov's law of the iterated logarithm for Banach space valued random variables, (à paraître).