

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

P. BILLARD

**Primarité des espaces $C(\alpha)$ (α ordinal infini $< \omega_1 =$
premier ordinal non dénombrable)**

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1975-1976), exp. n° 22, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=SAF_1975-1976____A17_0

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 5 - 1 9 7 6

PRIMARITE DES ESPACES $C(\alpha)$

(α ORDINAL INFINI $< \omega_1$ - PREMIER ORDINAL NON DENOMBRABLE)

par P. BILLARD

(Marseille)

INTRODUCTION

Il est connu (cf. [2] et [5]) que les espaces de Banach

$C([0,1])$ et $C(\omega^\alpha)$ (α ordinal $< \omega_1$ et $\omega^0 = 1$ par convention)

sont deux à deux non isomorphes et constituent, à un isomorphisme près, tous les espaces de Banach $C(K)$ (K compact) qui sont séparables et de dimension infinie.

Il est connu que $C([0,1])$ est primaire (cf. [3]) ainsi que $C(\omega^0) \cong c_0$ qui est même premier, c'est-à-dire que tout sous-espace fermé complété de dimension infinie de c_0 est isomorphe à c_0 .

Nous nous proposons ici de donner un bref aperçu d'une preuve de la primarité des espaces $C(\omega^\alpha)$ ($1 \leq \alpha < \omega_1$) dont l'exposé complet donné dans [1] est long.

Nous étudions d'abord le cas de $C_0(\omega^\alpha)$ ($= \{f, f \in C(\omega^\alpha) \text{ et } f(\omega^\alpha) = 0\}$) qui est visiblement isomorphe à $C(\omega^\alpha)$ et nous généralisons ensuite au cas de $C_0(\omega^\alpha)$ ($1 \leq \alpha < \omega_1$).

§ 1. SUR CERTAINES BASES DE $C(\omega^\alpha)$

Définition 1 : Si $\alpha = \omega^{\alpha_k} n_k + \dots + \omega^{\alpha_0} n_0$ est l'écriture arithmétique usuelle de l'ordinal α ($\alpha_k > \alpha_{k-1} > \dots > \alpha_0$ et n_j entier > 0 pour $0 \leq j \leq k$), α_0 définira le type de α .

Une partie A de $[1, \omega^\alpha[$ sera dite normale si elle est fermée et de même type d'ordre que $[1, \omega^\alpha[$.

Une famille $[\Phi(\alpha), \alpha]_{\alpha \in A}$ de segments de $[1, \omega^\omega[$ indexée sur une partie normale A de $[1, \omega^\omega[$ sera dite une famille normale associée à A si elle vérifie

- (1) $\forall \alpha, \alpha \in A \Rightarrow \Phi(\alpha)$ est isolé dans $[1, \omega^\omega[$ et $\Phi(\alpha) \leq \alpha$,
- (2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{pour chaque ordinal } \xi \text{ les segments } [\Phi(\alpha), \alpha] \text{ pour lesquels type de } \alpha \\ \text{(dans } A) = \xi \text{ sont deux à deux disjoints,} \end{array} \right.$
- (3) $\left\{ \begin{array}{l} \forall \alpha \forall \alpha', \alpha \text{ et } \alpha' \in A \Rightarrow [\Phi(\alpha), \alpha] \text{ et } [\Phi(\alpha'), \alpha'] \text{ sont disjoints ou sinon} \\ \text{l'un d'eux est inclus dans l'autre,} \end{array} \right.$
- (4) $\forall \xi, \xi \in [1, \omega^\omega[\Rightarrow \{\alpha, \alpha \in A \text{ et } \xi \in [\Phi(\alpha), \alpha]\}$ est fini ;

enfin si $\chi_\alpha = \chi_{[\Phi(\alpha), \alpha]}$ est la fonction caractéristique de $[\Phi(\alpha), \alpha]$, une application $n \mapsto \chi_{\alpha_n}$ de $N = [1, \omega[$ dans $\{\chi_\alpha, \alpha \in A\}$ sera dite une numérotation normale de $\{\chi_\alpha, \alpha \in A\}$ si elle vérifie

- (5) $n \mapsto \chi_{\alpha_n}$ est une bijection de N sur $\{\chi_\alpha, \alpha \in A\}$,
- (6) $\forall n \forall n', n \text{ et } n' \in N \text{ et } [\Phi(\alpha_{n'}), \alpha_{n'}] \supset [\Phi(\alpha_n), \alpha_n] \Rightarrow n' \leq n$.

On obtient facilement les

Lemme 1 : Sous les conditions de normalité précédentes $(\chi_{\alpha_n})_{n=1,2,\dots}$ est une base monotone du sous-espace fermé B de $C_0(\omega^\omega)$ engendré par les χ_α ($\alpha \in A$).

Lemme 2 : Sous les conditions de normalité précédentes en désignant par τ l'isomorphisme d'ordre de $[1, \omega^\omega[$ sur A , il existe une unique application linéaire et isométrique T de $C_0(\omega^\omega)$ sur B qui vérifie

$$\forall \beta \forall f, \beta \in [1, \omega^\omega[\text{ et } f \in C_0(\omega^\omega) \Rightarrow f(\beta) = T(f)(\tau(\beta)) \quad .$$

§ 2. SELECTION D'UNE CERTAINE PARTIE NORMALE DE $[1, \omega^{(0)}[$

Nous fixons une projection continue P de $C_0(\omega^\omega)$ de projection supplémentaire Q et nous écrivons

$$(7) \quad C_0(\omega^\omega) = X \oplus Y \quad (X = P(C_0(\omega^\omega)) \text{ et } Y = Q(C_0(\omega^\omega))) .$$

On établit par récurrence le

Lemme 3 : Il est possible de former une suite strictement croissante $(\mu'_p)_{p=1,2,\dots}$ d'entiers ≥ 1 telle que quel que soit p et quels que soient les sous-ensembles E_0 et E_1 de $[1, \omega^{\mu'_p}] = E_0 \cup E_1$ alors l'un au moins de ces deux sous-ensembles contient une partie fermée A_p de $[1, \omega^{\mu'_p}]$ de même type d'ordre que $[1, \omega^p]$ et telle que pour chaque entier q vérifiant $0 \leq q \leq p$ les points de A_p de type q (au sens de A_p) sont d'un même type r_q (au sens de $[1, \omega^{\mu'_p}]$). Soit $\Phi: [1, \omega^\omega[\rightarrow [1, \omega^\omega[$ définie par

$$(8) \quad \forall \alpha, \alpha \text{ isolé} \in [1, \omega^\omega[\Rightarrow \Phi(\alpha) = \alpha,$$

$$(9) \quad \Phi(\omega^k) = \omega^{k-1} + 1 \text{ pour } k = 2, 3, \dots \text{ et } \Phi(\omega) = 1,$$

$$(10) \quad \begin{cases} \forall \alpha, \alpha \in [1, \omega^\omega[\text{ et } \alpha \text{ s'écrivant, dans l'arithmétique des ordinaux, sous} \\ \text{la forme } \alpha = \omega^{k+q} n_{k+q} + \dots + \omega^k n_k \text{ avec } n_k > 1 \text{ ou avec } n_k = 1 \text{ et} \\ \max(n_{k+2}, \dots, n_{k+q}) \geq 1 \Rightarrow \Phi(\alpha) = \omega^{k+q} n_{k+q} + \dots + \omega^{k+1} n_{k+1} + \omega^k (n_k - 1) + 1. \end{cases}$$

La famille $[\Phi(\alpha), \alpha]_{\alpha \in [1, \omega^\omega[}$ est une famille normale associée à la partie normale $[1, \omega^\omega[$ de $[1, \omega^\omega[$ et il existe une numérotation normale naturelle de $\{\chi_\alpha, \alpha \in [1, \omega^\omega[\}$; en désignant par μ_α ($\alpha \in [1, \omega^\omega[$) les formes coordonnées de la base monotone de $C_0(\omega^\omega)$ ainsi formée (cf. lemmes 1 et 2) nous établissons le

Lemme 4 : Nous pouvons sélectionner une partie normale A de $[1, \omega^\omega[$ telle que $[\Phi(\alpha), \alpha]_{\alpha \in A}$ est une famille normale associée où $\Phi: [1, \omega^\omega[\rightarrow [1, \omega^\omega[$ est définie par (8), (9) et (10), et nous pouvons sélectionner une numérotation normale $n \mapsto \chi_{\alpha_n}$ de $\{\chi_\alpha, \alpha \in A\}$ vérifiant

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \forall f, f \in C_0(\omega^\omega) \Rightarrow R(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\alpha_n}(f) \chi_{\alpha_n} \text{ converge et } R \text{ est une projection} \\ \text{de } C_0(\omega^\omega) \text{ sur le sous-espace fermé } B \text{ de } C_0(\omega^\omega) \text{ engendré par les } \chi_{\alpha_n} \\ (n = 1, 2, \dots) \text{ de norme } \leq 2, \end{array} \right.$$

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{1 \leq n} (\sum_{1 \leq n'} \text{ et } n' \neq n (|\mu_{\alpha_n}(P(\chi_{\alpha_{n'}}))| + |\mu_{\alpha_n}(Q(\chi_{\alpha_{n'}}))|)) \leq \varepsilon \text{ (}\varepsilon \text{ étant un} \\ \text{réel } > 0 \text{ donné).} \end{array} \right.$$

Au moyen du lemme 3 nous pouvons améliorer le lemme 4 selon le

Lemme 5 : Nous pouvons sélectionner une partie normale A' de la partie normale A de $[1, \omega^\omega[$ qui intervient dans le lemme 4 telle que $[\Phi(\alpha), \alpha]_{\alpha \in A'}$ est une famille normale associée et telle que si $(n_j)_{j=1,2,\dots}$ est la mise sous la forme d'une suite strictement croissante d'entiers de $\{n, n \in \mathbb{N} \text{ et } \alpha_n \in A'\}$ en posant $\beta_j = \alpha_{n_j}$ ($j=1,2,\dots$) alors $j \mapsto \chi_{\beta_j}$ est une numérotation normale de $\{\chi_\alpha, \alpha \in A'\}$ qui vérifie

$$(13) \quad \forall j, 1/2 \leq \mu_{\beta_j}(RP(\chi_{\beta_j})) \leq 4\|P\| \text{ ou } \forall j, 1/2 \leq \mu_{\beta_j}(RQ(\chi_{\beta_j})) \leq 4\|Q\|$$

et qui vérifie, en nous fixant les idées sur le 1er cas de (13),

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \text{si pour chaque } \alpha \in A' \text{ la suite } \chi_{\beta_{j_1}}, \dots, \chi_{\beta_{j_m}} \text{ est la suite des } \chi_\beta \text{ (}\beta \in A'\text{)} \\ \text{vérifiant } \chi_\beta(\alpha) = 1 \text{ et rangés par supports décroissants, alors en posant} \\ \beta_{j_\ell} = \gamma_\ell \text{ (} 1 \leq \ell \leq m \text{) nous avons} \\ \forall \ell \neq \ell', 1 \leq \ell \text{ et } \ell' \leq m \Rightarrow |\mu_{\gamma_\ell}(RP(\chi_{\gamma_\ell})) - \mu_{\gamma_{\ell'}}(RP(\chi_{\gamma_{\ell'}}))| < 1/16 \, m \quad . \end{array} \right.$$

§ 3. LE THEOREME PRINCIPAL POUR $C_o(\omega)$

Avec les notations du lemme 5 plaçons-nous dans la situation

$$(15) \begin{cases} f \in B' \text{ (= sous-espace fermé de } C_o(\omega) \text{ engendré par les } \chi_{\beta_j} \text{ pour } j = 1, 2, \dots) \\ \text{avec } \|f\| = 1 \text{ d'où } f = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{\beta_j}(f) \chi_{\beta_j} ; \end{cases}$$

dans ces conditions (cf. lemme 2) nous pouvons trouver $\alpha \in A'$ vérifiant

$|f(\alpha)| = 1$; fixons-nous les idées sur le cas $f(\alpha) = 1$ de sorte que si

$\chi_{\gamma_1}, \dots, \chi_{\gamma_m}$ sont comme dans (14) nous avons

$$(16) \quad \sum_{1 \leq \ell \leq m} \mu_{\gamma_\ell}(f) = 1 .$$

La continuité de RP jointe à (15) donne

$$(17) \quad RP(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{\beta_j}(f) RP(\chi_{\beta_j}) .$$

Pour $j = 1, 2, \dots$ nous pouvons, dans (17), développer $RP(\chi_{\beta_j}) \in B$ sur la base

$(\chi_{\alpha_n})_{n=1,2,\dots}$ de B puis évaluer les valeurs des deux membres au point α , et puisque seulement les $\chi_{\gamma_\ell}(\alpha)$ ($1 \leq \ell \leq m$) sont $\neq 0$ parmi les $\chi_{\beta_j}(\alpha)$ ($j = 1, 2, \dots$) nous pouvons écrire

$$(18) \quad \begin{cases} RP(f)(\alpha) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{\beta_j}(f) \mu_{\beta_j}(RP(\chi_{\beta_j})) \chi_{\beta_j}(\alpha) + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{\beta_j}(f) \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_j}}^{\infty} \mu_{\alpha_n}(RP(\chi_{\beta_j})) \chi_{\alpha_n}(\alpha) \right) = e_1 + e_2 . \end{cases}$$

Par la définition de R donnée dans (11) nous avons

$$(19) \quad \forall n, \forall j \quad \mu_{\alpha_n}(RP(\chi_{\beta_j})) = \mu_{\alpha_n}(P(\chi_{\beta_j})) .$$

Puisque $\forall \alpha, \alpha \in [1, \omega] \Rightarrow \|\mu_\alpha\| \leq 2$ avec (12) nous avons

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} |e_2| \leq 2 \sum_{1 \leq j} (\sum_{1 \leq n \text{ et } n \neq n_j} |\mu_{\alpha_n}(P(\chi_{\beta_j}))|) = \\ = 2 \sum_{1 \leq n} (\sum_{1 \leq j \text{ et } n_j \neq n} |\mu_{\alpha_n}(P(\chi_{\beta_j}))|) \leq 2\varepsilon ; \end{array} \right.$$

avec (13) et (14) nous avons, en tenant compte aussi de (16),

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_1 = \sum_{1 \leq l \leq m} \mu_{\gamma_l}(f) \mu_{\gamma_l}(RP(\chi_{\gamma_l})) = \\ = \sum_{1 \leq l \leq m} \mu_{\gamma_l}(f) \mu_{\gamma_m}(RP(\chi_{\gamma_m})) + \\ + \sum_{1 \leq l \leq m} \mu_{\gamma_l}(f) (\mu_{\gamma_l}(RP(\chi_{\gamma_l})) - \mu_{\gamma_m}(RP(\chi_{\gamma_m}))) \geq \\ \geq \frac{1}{2} - 2 \sum_{1 \leq l \leq m} |\mu_{\gamma_l}(RP(\chi_{\gamma_l})) - \mu_{\gamma_m}(RP(\chi_{\gamma_m}))| \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{8} . \end{array} \right.$$

La comparaison entre (18), (20) et (21) donne

$$(22) \quad RP(f)(\alpha) \geq \frac{1}{2} - 2\varepsilon - \frac{1}{8} \geq \frac{1}{4} \quad (\text{en prenant } \varepsilon \leq \frac{1}{16})$$

et puisque d'après (11) nous avons $\|R\| \leq 2$, de $\frac{1}{4} \leq \|RP(f)\| \leq \|R\| \|P(f)\|$ déduit de (22) nous déduisons

$$(23) \quad \|P(f)\| \geq \frac{1}{8}$$

et (23) implique que P restreint à B' est un isomorphisme ; puisque B' est isomorphe à $C_0(\omega)$ (cf. lemme 2) le corollaire 1 de [4] donne le

Théorème 1 : L'espace de Banach $C_0(\omega)$ est primaire.

§ 4. LE THEOREME PRINCIPAL DANS LE CAS GENERAL

Ce théorème qui exprime la primarité de $C_0(\omega^\alpha)$ ($1 \leq \alpha < \omega_1$) s'obtient en généralisant les lemmes qui précèdent et le calcul du § 3 ; cependant ces généralisations ne sont pas toujours immédiates et ne peuvent être développées ici.

REFERENCES

- [1] P. Billard, Sur la primarité des espaces $C(\alpha)$, Stud. Math., à paraître.
- [2] C. Bessaga and A. Pełczyński, Spaces of continuous functions, Stud. Math. 19 (1960) p. 53-62.
- [3] J. Lindenstrauss et A. Pełczyński, Contribution to the theory of classical Banach spaces, J. Funct. An. 8 (1971) p. 225-249.
- [4] A. Pełczyński, On $C(S)$ subspaces of separable Banach spaces, Stud. Math. 31 (1968) p. 513-522.
- [5] A. Pełczyński, Dissertationes, Mat. Rozprawy Mat. 58 (1968).
