SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

D. MOUCHTARI

Sur l'existence d'une topologie du type de Sazonov sur un espace de Banach

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1975-1976), exp. nº 17, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1975-1976____A13_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 5 - 1 9 7 6

SUR L'EXISTENCE D'UNE TOPOLOGIE DU TYPE DE SAZONOV SUR UN ESPACE DE BANACH

par D. MOUCHTARI

(Kazan)

Exposé No XVII 16 Mars 1976

§ 1. INTRODUCTION

Soient E un e.l.c., E' son dual, Φ une fonction linéaire aléatoire, c'est-à-dire une application continue linéaire $\Phi : E \to L^{o}(\Omega,\mathcal{A},P)$. Soit μ_{Φ} la mesure cylindrique sur $\sigma(E',E)$ définie par Φ. Si μ_{Φ} est σ-additive, nous désignerons par P_{Φ} son prolongement à la σ-algèbre engendrée par les ensembles cylindriques. Soit pour tout $x \in E$

$$\chi_{\Phi}(x) = \int_{E'} e^{-|<x,x'>|} \, d\mu_{\Phi} \quad .$$

Définition 1 : Une topologie $\mathcal{T}$ sur E est dite de type Sazonov si, pour toute fonction linéaire aléatoire Φ sur E, la condition "Φ est continue par rapport à $\mathcal{T}$" est équivalente à la σ-additivité de μ_{Φ}.

L'objet de cet exposé est de savoir s'il existe une topologie de type Sazonov sur E ainsi que l'étude des propriétés de cette topologie.

§ 2. EXISTENCE DE LA TOPOLOGIE DE TYPE SAZONOV

Théorème 1 : Soit E un Banach séparable admettant la propriété d'approximation métrique. On suppose qu'il existe un plongement isomorphique Ψ de E' dans L^{o}. Alors il existe sur E une topologie de type Sazonov $\mathcal{T}$.

Faisons quelques remarques préliminaires : Ψ a les propriétés

(1a) Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\chi_{\Psi}(x') > 1 - \delta \text{ implique } \|x'\| < \varepsilon \quad , \qquad (1)$$

(1b) Pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x'\| < \delta \text{ implique } \chi_{\Psi}(x') > 1 - \varepsilon \quad .$$

Soit T_n une suite d'opérateurs de rang fini telle que $\lim T_n x = x$ pour chaque $x \in E$, $\sup_n \|T_n\| < C < \infty$.
Posons $\Phi_n = \Phi T_n$, $\Psi_n = \Psi T_n'$. Maintenant nous pouvons formuler le lemme suivant.

<u>Lemme 1</u> : Supposons que les conditions du théorème soient remplies. Alors μ_Φ est σ-additive si et seulement si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $K = K(\varepsilon) > 0$ tel que pour chaque n

$$\int_E \chi_{\Phi_n}(x/K)\,d\mu_{\Psi_n} > 1-\varepsilon \quad . \tag{2}$$

<u>Démonstration</u> : Notons que la suite $\{T_n^2\}$ a les mêmes propriétés que $\{T_n\}$, $\sup_n \|T_n^2\| < C^2$. En outre, en désignant par T_n' le transposé de T_n :

$$\mu_{\Phi_n}\{x' : \|T_n' x'\| > A\} = \mu_\Phi\{x' : \|T_n'^2 x'\| > A\} \quad . \tag{3}$$

En effet, le second membre est égal à

$$\mu_\Phi\{x' : \sup_{\|x\|<1} |<T_n'x', T_n x>| > A\} =$$

$$= \mu_{\Phi_n}\{x' : \sup_{\|x\|<1} |<T_n'x', x>| > A\} \quad .$$

1. Soit μ_Φ σ-additive. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit S tel que :

$$P_\Phi\{x' : \|x'\| > S/C^2\} < \varepsilon/2 \quad .$$

Alors, d'après (3)

$$P_{\Phi_n}\{x' : \|T_n'x'\| > S\} = P_\Phi\{x' : \|T_n'^2 x'\| > S\} \le$$

$$\le P_\Phi\{x' : \|x'\| > S/C^2\} < \varepsilon/2 \quad .$$

Maintenant, choisissons δ dans (1b) tel que

$$\|x'\| < \delta \text{ entraîne } \chi_\Psi(x') > 1-\varepsilon/2 \quad .$$

Posons $K = K(\varepsilon) = S/\delta$. Alors, (2) est vérifié :

$$\int_E \chi_{\Phi_n}(x/K)\,dP_{\Psi_n} = \int_{E'} \chi_{\Psi_n}(x'/K)\,dP_{\Phi_n} >$$

$$> \int_{\{x' : \|T_n'x'\| < s\}} \chi_{\Psi_n}(x'/K)\,dP_{\Phi_n} > (1-\varepsilon/2)^2 > 1-\varepsilon \quad .$$

2. Supposons que (2) soit vérifié. Soit δ correspondant à $\varepsilon = \tau$ tel que (1a) soit réalisé. Supposons que μ_Φ ne soit pas σ-additive. Alors, l'image de la boule unité par P n'est pas latticiellement bornée. Donc, pour un $\varepsilon < \delta$ il existe $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in E$, $\|\varphi_i\| < 1$ tels que

$$P\{\omega : \sup_{i \leq s} |\Phi(\varphi_i)(\omega)| > 2K\tau\} > 2\,\varepsilon/\delta \quad ,$$

où $K = K(\varepsilon)$ est définie au moyen de (2). Comme Φ est continue, pour tout $n > n_o$ on a :

$$P\{\omega : |\Phi(T_n^2\varphi_i - \varphi_i)(\omega)| > K\tau\} < \varepsilon/\delta s \quad , \quad i \leq s \quad .$$

Alors,

$$\mu_\Phi\{x' : |\langle T_n^2\varphi_i, x'\rangle| > K\tau\} > \varepsilon/\sigma \quad , \tag{4}$$

(4) et (3) nous donnent

$$P_{\Phi_n}\{x' : \|T_n'x'\| > K\tau\} = \mu_\Phi\{x' : \|T_n'^2x'\| > K\tau\} >$$

$$> \mu_\Phi\{x' : \sup_i |\langle T_n^2\varphi_i, x'\rangle| > K\tau\} > \varepsilon/\delta \quad ,$$

$$P_{\Phi_n}\{x' : \chi_{\Psi_n}(x'/K) < 1 - \delta\} > \varepsilon/\delta \quad .$$

Soit $B_n \subset \{x' \in E' : \chi_{\Psi_n}(x^2/K) < 1 - \delta\}$ tel que $P_{\Phi_n} B_n = \varepsilon/\delta$. Alors

$$1 - \varepsilon < \int_E \chi_{\Phi_n}(x/K)\,dP_{\Psi_n} \quad \text{(d'après (2))} =$$

$$= \int_{E'} \chi_{\Psi_n}(x'/K)\,dP_{\Phi_n} = \int_{B_n} + \int_{E'-B_n} <$$

$$< (\varepsilon/\delta)(1 - \delta) + (1 - \varepsilon/\delta) = 1 - \varepsilon \quad .$$

Ce qui est contradictoire.

<u>Démonstration du théorème 1</u> : Soit $U(\Phi, \varepsilon) = \{x \in E : \chi_\Phi(x) > 1 - \varepsilon\}$. Soit $\mathcal{T}$ la topologie dont une base est constituée des ensembles de la forme $U(\Phi, \varepsilon)$, où $\varepsilon > 0$ et où Φ est une fonction linéaire aléatoire telle que μ_Φ soit σ-additive.

1. Si $\mu_{\bar\Phi}$ est σ-additive, $\bar\Phi$ est $\mathcal{T}$-continue par définition de $\mathcal{T}$.

2. Supposons que $\bar\Phi$ est $\mathcal{T}$-continue. Démontrons que (2) a lieu pour $\bar\Phi$ pour chaque $\varepsilon > 0$. Soit Φ une fonction linéaire aléatoire telle que $U(\Phi,\delta) \subset U(\bar\Phi,\varepsilon/2)$ et μ_Φ est σ-additive. Soit $K = K(\varepsilon\,\delta/2)$ la constante obtenue par l'inégalité (2) appliquée à Φ. Posons :

$$\mathcal{G}_n = \{x \in E : T_n x \in KU(\Phi,\delta)\} \quad .$$

Alors, pour tout n, $x \notin \mathcal{G}_n$ entraîne $\chi_{\Phi_n}(x/K) < 1 - \delta$, donc

$$1 - \delta\varepsilon/2 < \int_E \chi_{\Phi_n}(x/K)\,dP_{\Psi_n} = \int_{\mathcal{G}_n} + \int_{E-\mathcal{G}_n} \leq$$

$$\leq P_{\Psi_n}\,\mathcal{G}_n + (1 - P_{\Psi_n}\,\mathcal{G}_n)(1-\delta) \quad .$$

Cela entraîne $P_{\Psi_n}\,\mathcal{G}_n > 1 - \varepsilon/2$. Comme $x \in \mathcal{G}_n$ entraîne $T_n x \in KU(\bar\Phi,\varepsilon/2)$ et $\chi_{\bar\Phi_n}(x/K) > 1 - \varepsilon/2$, nous avons

$$\int_E \chi_{\bar\Phi_n}(x/K)\,dP_{\Psi_n} > P_{\Psi_n}\,\mathcal{G}_n(1 - \varepsilon/2) > 1 - \varepsilon \quad . \qquad \text{CQFD}$$

<u>Théorème 2</u> : Supposons que dans un espace de Banach E il existe une topologie $\mathcal{T}$ de type Sazonov. Alors, l'espace E' est plongeable dans $L^p(\Omega,\mathcal{Q},P)$ avec $p \in (0,1)$, donc, a fortiori E' est plongeable dans un L^0.

<u>Démonstration</u> : Supposons le contraire. D'après un critère de Lindenstrauss et Pełczynski (cf. par ex. [1]) , pour chaque entier N il existe deux suites finies $x_i'(N)$ $(i \leq n_N)$ et $y_j'(N)$ $(j \leq m_N)$ telles que pour chaque $x \in E$ on ait :

$$\sum_{i=1}^{n_N} |\langle x, x_i'(N)\rangle|^p > \sum_{j=1}^{m_N} |\langle x, y_j'(N)\rangle|^p \quad , \tag{5}$$

$$1/2^N = \sum_{i=1}^{n_N} \|x_i'(N)\|^p < \sum_{j=1}^{m_N} \|y_j'(N)\|^p / 2^{2N} \quad . \tag{6}$$

Soit $\Omega_N = \overline{\{-m_N, m_N\}}$ l'espace probablisé défini par :

$$\Omega_N = \overline{\{-m_N, m_N\}} - \{0\},\ P_N(\{j\}) = \|y'_{|j|}(N)\|^p / 2 \sum_{j=1}^{m_N} \|y_j'(N)\|^p \quad . \tag{7}$$

Posons : $\Psi_N : E \to L^p(\Omega_N, P_N)$,

$$\Psi_N(x)(j) = \operatorname{sgn} j.2^N \langle x, y'_{|j|}(N)\rangle / \|y'_{|j|}(N)\| \quad .$$

Soit $\{\Omega,P\} = \prod_N \{\Omega_N,P_N\}$, $\Psi = \sum_N \Psi_N : E \to L^p\{\Omega,P\}$. Alors, toutes les μ_{Ψ_N} étant concentrées sur les points $\pm 2^N y'_j(N)/\|y'_j(N)\|$, dont la norme est égale à 2^N, μ_Ψ n'est pas σ-additive. En effet, on aurait dans le cas contraire :

$$P_\Psi = P_{\Psi_N} * P_{\Psi'_N} \quad ,$$

où $\Psi'_N = \Psi - \Psi_N$ et on aurait l'inégalité

$$P_\Psi\{x' : \|x'\| > 2^N\} \geq 1/2 \; P_{\Psi_N}\{x' : \|x'\| > 2^N\} = 1/2$$

pour chaque N.

Maintenant démontrons que Ψ est $\mathcal{T}$-continue. Pour cela nous introduisons les applications $T_N \; : \; E \to \ell^p_{n_N}(N)$:

$$T_N x = (\langle x, x'_i(N)\rangle)_{i \leq n_N} \quad , \quad T = \sum T_N = E \to \overset{p}{\oplus} \ell^p_{n_N}(N) \cong \ell^p \quad .$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\|\Psi_N(X)\|^p &= \sum_{j=1}^{m_N} |\langle x, y'_j(N)\rangle|^p \,.\, 2^{Np} \Big/ \sum_{j=1}^{m_N} \|y'_j(N)\|^p \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{m_N} |\langle x, y'_j(N)\rangle|^p < \sum_{i=1}^{n_N} |\langle x, x'_i(N)\rangle|^p = \\ &= \|T_N x\|^p \quad .\end{aligned}$$

Alors

$$\|Tx\|^p = \sum \|T_N x\|^p \geq \sum \|\Psi_N(x)\|^p \geq \|\Psi(x)\|^p \tag{8}$$

T admet la factorisation : $T = T_o S : E \xrightarrow{S} C_o \xrightarrow{T_o} \ell^p$, où

$Sw = (\langle x, x'_i(N)\rangle / \|x'_i(N)\| 2^{N/2})_{N,i}$, $T_o(a_i(N)) = (2^{N/2}.a_i(N).\|x'_i(N)\|)_{N,i}$.

Ici les suites doublement indexées sont rangées suivant l'ordre lexicographique. La partie gauche de (6) montre que T_o est une multiplication par un élément de ℓ^p. Par définition, S est un opérateur continu. Soit maintenant $\Phi : \ell^p \to L^o(\Omega,\mathcal{A},P)$ un plongement de ℓ^p dans un espace de variables aléatoires p-stables, $\Phi = \bar{\Phi}T$. La fonction linéaire aléatoire $\bar{\Phi}T_o : C_o \to \ell^p \to L^o$ définit une mesure de Radon $\mu_{\Phi T_o}$ sur $\sigma(\ell^1, C_o)$ ([2]) donc, l'image par Φ de la boule unité de E est latticiellement bornée et μ_Φ est σ-additive. Mais, χ_Φ ne dépend que de $\|Tx\|$ donc, (d'après (8)), Ψ est continue par rapport à la topologie définie par les ensembles $U(\Phi,\varepsilon)_{\varepsilon>0}$. Comme Φ, par définition, est $\mathcal{T}$-continue, Ψ est $\mathcal{T}$-continue. CQFD

§ 3. LA FORME DES TOPOLOGIES DE TYPE SAZONOV

Théorème 3 : Soit E un Banach séparable tel que dans E il existe une topologie $\mathcal{T}$ de type Sazonov dont un système fondamental $\mathcal{B}$ de voisinages de 0 ne contient que des convexes du type $p \in [1,2]$ (au sens de [4], § 3). Alors E' est de type p.

Démonstration : Supposons que pour $\varepsilon \in (0,1/4)$ et pour un $K > 0$ il existe $x_1', \dots, x_n' \in E'$ tels que

$$\Sigma \|x_i'\| = 1, \quad P\{t : \|\Sigma f_i^p(t) x_i'\| > K\} = \varepsilon \quad , \tag{9}$$

où f_i^p sont les variables indépendantes p-stables. Alors, on peut démontrer l'existence d'une suite $y_1', \dots, y_n' \in E'$ telle que

$$\sum_{i=1}^n \|y_i'\|^p = 1, \quad P\{t : \|\sum_{i\in\mathfrak{J}} f_i^p(t) y_i'\| > K/4\} > \varepsilon/3 \tag{10}$$

chaque fois que $\sum_{i\in\mathfrak{J}} \|y_i'\|^p > 35/36$. Démontrons ce point.
Soit E_o l'espace engendré par les $\{x_i'\}$. Comme E_o est un espace de dimension finie, E_o est de type p. Soit K_o la borne supérieure des K qui satisfont à une relation du type (9) avec les x_i' formant un ensemble fini de E_o. Soit $(\{y_i'\}_{i=1}^n)$ en ensemble dans E pour lequel (9) a lieu avec $K > \frac{16}{18} K_o$. Supposons que (10) n'ait pas lieu pour $\{y_i'\}_{i=1}^n$. Alors, pour un $\mathfrak{J} \subset \overline{[1,n]}$ nous avons :

$$\sum_{i=\mathfrak{J}} \|y_i'\|^p > 35/36, \quad P\{\|\sum_{i\in\mathfrak{J}} f_i^p(t) y_i'\| > K/4\} < \varepsilon/3 \tag{11}$$

(9) et (11) nous donnent que pour $\mathfrak{J}' = \overline{[1,n]} - \mathfrak{J}$ on a :

$$P\{\|\sum_{i\in\mathfrak{J}'} f_i^p(t) y_i'\| > (3/4).K\} > \frac{2}{3}\varepsilon \quad . \tag{12}$$

Supposons que la partie gauche de (12) est inférieure à ε. Si la partie gauche est supérieure ou égale à ε, on peut arriver aux mêmes conclusions d'une manière plus simple. En utilisant une inégalité due à de Acosta ([3], Lemma 3.1 (a)) nous avons vu que

$$P\{t : \|\sum_{i\in\mathfrak{I}'} f_i^p(t)y_i'\| > \frac{3}{16} K\} > \frac{3}{2} P\{\|\sum_{i\in\mathfrak{I}'} f_j^p(t)y_i'\| > \frac{3}{4} K\} > \varepsilon \quad . \tag{13}$$

Maintenant, remplaçons l'ensemble $\{y_i'\}$ par un autre $\{Cy_i'\}_{i\in\mathfrak{I}'}$, où $C > 36^{1/p}$. Il résulte de la définition de $\mathfrak{I}'$ et de (13) que cet ensemble satisfait à une relation du type (9) avec $K(\varepsilon) > K_o$. Cela est contraire à nos suppositions.

Supposons que E' n'est pas du type p. Alors, on a vu, que pour un $\varepsilon \in (0,1/4)$ il existe une suite $\{x_1'(N),\dots,x_{n_B}'(N)\}_{N=1}^{\infty}$ d'ensembles finis dans E' telle que

$$\sum_{i=1}^{n_N} \|x_i'(N)\|^p = 1, \quad P\{t : \|\sum_{i\in\mathfrak{I}} f_i^p(t)x_i'\| > 2^{4N}\} > \varepsilon \quad , \tag{14}$$

chaque fois que $\sum_{i\in\mathfrak{I}} \|x_i'(N)\|^p > 35/36$. Soit $\{\Omega_N, P_N\}$ l'espace probabilisé, $\Omega_N = \overline{[1,n_N]} \cup \overline{[-n_N,-1]}$, $P_N(i) = \|x'_{|i|}(N)\|^p/2$. Soit $\Phi_N : E \to L^o(\Omega_N, P_N)$, $\Phi_N(x)(i) = \operatorname{sgn} i \langle x, x'_{|i|}(N)\rangle / \|x'_{|i|}(N)\|.2^N$.

Supposons les Φ_N indépendantes et soit $\Phi = \sum \Phi_N$. μ_{Φ_N} est concentrée sur les points $x_i'(N)/\|x_i'(N)\|.2^N$ dont la norme est égale à $1/2^N$. Cela entraîne que μ_Φ est σ-additive, donc Φ est $\mathcal{T}$ continue. Alors, il existe $C > 0$ et un $V \in \mathcal{B}$ de type p tel que pour chaque $x \in V$

$$P\{|\Phi(x)| > C\} < 1/36 \,.\, 8 \,.\, 4 \quad .$$

Comme les Φ_N sont symétriques, pour chaque N et $x \in V$

$$P\{|\Phi_N(x)| > C\} < 1/36 \,.\, 8 \,.\, 2 \quad .$$

D'après le théorème de Nikishin et Maurey [4] pour chaque N il existe $\mathfrak{I}_N \subset \Omega_N$ tel que $P_N\{\mathfrak{I}_N\} > 1 - 1/36.2$ et

$$\sum_{i\in\mathfrak{I}_N} |<x,x_i'(N)>|^p / 2^{Np} = \int_{\mathfrak{I}_N} |\Phi_N(x)|^p dP_N < (j_V(x))^p$$

(où j_V désigne la jauge de V).
Maintenant, nous posons pour chaque n

$$\Psi_N(x) = \sum_{i\in\mathfrak{I}_N} f_i^p(t)<x,x'_{|i|}(N)> / 2^{2N},$$

$$\Psi = \sum \Psi_N / 2^N$$

où toutes les Ψ_N sont indépendantes.
Alors, pour $q < p$:

$$(\int |\Psi_N(x)|^q dP)^{p/q} < \text{Const} \int_{\mathfrak{I}_N} |\Phi_N(x)|^p \, dP_N <$$

$$< \text{Const} \; (j_V(x))^p \quad ;$$

et

$$(\int |\Psi(x)|^q)^{1/q} < \text{Const} \; j_V(x) \quad .$$

C'est-à-dire que $\Psi : E \to L^0$ elle aussi est $\mathcal{T}$-continue. Mais (14) nous donne (si μ_Ψ est σ-additive)

$$\mu_{\Psi_N}\{x' : \|x'\| > 2^{2N}\} > 1/2 \; P\{t : \|\sum_{i\in\mathfrak{I}_N\cup[0,\infty)} f_i^p(t)x_i'(N)\| > 2^{4N}\} > \varepsilon/2 \quad ,$$

et $\mu_\Psi\{x' : \|x'\| > 2^N\} > \varepsilon/4$ pour chaque N, ce qui est contraire à la σ-additivité de μ_Ψ, donc à la $\mathcal{T}$-continuité de Ψ.

<u>Corollaire 1</u> : Soit E un Banach séparable tel que dans E il existe une topologie $\mathcal{T}$ de type Sazonov dont les voisinages de 0 du type $p \geq 1$ forment une base. Alors E' est plongeable dans $L^p(\Omega,\mathcal{A},P)$.

Le corollaire résulte immédiatement des théorèmes 3 et 2 et du fait [4] que chaque Banach de type p plongeable dans L^0 est plongeable dans L^p.

<u>Corollaire 2</u> : Soit E un Banach séparable tel que dans E il existe une topologie $\mathcal{T}$ de type Sazonov définie par une famille de produits scalaires. Alors E est un Hilbert.

Théorème 4 : Soit E un Banach séparable sur lequel il existe une topologie de type Sazonov $\mathcal{T}$ et tel que E' soit de type $p \geq 1$. Alors sur E il existe une topologie de type Sazonov $\mathcal{T}_1$ qui est la plus faible rendant continue une famille $(T_i)_{i\in\mathfrak{J}}$: $E \to L^p(\Omega_i, P_i)$ d'opérateurs linéaires.

Avant de démontrer le théorème nous citons deux théorèmes qui présentent un changement modique du théorème dû à Hoffman-Jørgensen [5].

Définition : Soient (E,E') deux espaces de dualité. Une probabilité de Radon P sur E est dite pré-p-stable si la mesure cylindrique μ définie par la fonction caractéristique $\varphi : E' \to \mathbb{C}$, $\varphi(x') = \exp(-\int |\langle x,x'\rangle|^p dP)$ est de Radon.

Théorème 5 : Soit E un Banach séparable. E est de type p si et seulement si chaque probabilité de Radon dans E telle que $\int_E \|x\|^p dP < \infty$ est pré-p-stable.

Théorème 6 : Soit E un Banach séparable. E' est de type p si et seulement si chaque probabilité de Radon dans $\sigma(E',E)$ telle que $\int_{E'} \|x'\|^p dP < \infty$ est pré-p-stable.

(La démonstration est tout à fait analogue à celle de Hoffmann-Jørgensen.)

Démonstration du théorème 4 : Soit $\mathcal{T}_1$ la topologie définie par toutes les $U(\Phi,\varepsilon)$, où $\Phi(x)$ est p-stable pour chaque x, $x \in E$, et μ_Φ est σ-additive. Démontrons que $\mathcal{T}_1$ est une topologie de type Sazonov. Comme chaque Φ de la définition de $\mathcal{T}_1$ est $\mathcal{T}$-continue, $\mathcal{T}_1$ est plus faible que $\mathcal{T}$ et chaque fonction aléatoire linéaire Ψ qui est $\mathcal{T}_1$-continue définit une mesure μ_Ψ σ-additive. Inversement supposons la mesure μ_Ψ définie par Ψ σ-additive. Soit $P_\Psi(\|x'\| \leq R) = 1 - \varepsilon/2$, et posons $P'(C) = \frac{1}{1-\varepsilon/2} P_\Psi(C \cap \{x' : \|x'\| \leq R\})$. D'après théorème 6 P' est pré-p-stable. Soit P la probabilité p-stable correspondante à P'. Alors pour $\delta > 0$, et $K > 0$, $P\{x' : |\langle x,x'\rangle| > K\} < \delta$ entraîne $\int_E |\langle x,.\rangle|^p \, dP' < \varepsilon/2$, et d'après l'inégalité de Tchebychev cela entraîne $P'\{x' : |\langle x,x'\rangle| > 1\} < \varepsilon/2$ et $P\{\omega : |\Psi(x)(\omega)| > 1\} < \varepsilon\}$. Cela signifie que Ψ est $\mathcal{T}_1$-continue.

Pour terminer la démonstration, il faut remarquer qu'un sous-espace de L^0 formé de variables p-stables se plonge dans un espace L^p. On en déduit que $\mathcal{T}_1$ est la topologie la plus faible rendant continue une certaine famille

$T_i : E \to L^p(\Omega_i, P_i)$ d'opérateurs linéaires.

Ce résultat était suscité par les conversations avec B. Maurey qui m'a indiqué l'existence d'une topologie localement convexe du type Sazonov pour les espaces $E = \ell^p$, $p \in]2,\infty[$.

§ 3. CAS D'UN FRECHET

Les résultats ci-dessus peuvent être généralisés au cas d'un espace Fréchet séparable E.

Théorème 1' : Soit $|.|_n$ une suite de normes définissant la topologie de E. Supposons que

1) les espaces $E_{|.|_n}$ admettent la propriété d'approximation métrique,
2) $(E_{|.|_n})'$ est plongeable dans L^o.

Alors dans E il existe une topologie de Sazonov.

Théorème 2' : Soit E un Fréchet tel que dans E il existe une topologie de type Sazonov. Alors la topologie de E peut être définie par une suite de normes $|.|_n$ telles que tous les espaces $(E_{|.|})'$ sont plongeables dans L^o.

Théorème 3' : Supposons que dans E existe une topologie de type Sazonov définie par les convexes symétriques de type $p \in [1,2]$. Alors la topologie de E peut être définie par une suite de normes $|.|_n$ telles que les $(E_{|.|})'$ sont plongeables dans L^p.

Théorème 4' : Supposons que dans E il existe une topologie de type Sazonov. Si la topologie de E peut être définie par une suite de normes $|.|_n$ telles que $(E_{|.|_n})'$ soit de type p, alors il existe une topologie de Sazonov dans E définie par une famille de convexes de type p.

Remarque : Les résultats de cet article généralisent quelques uns de mes résultats [6], [7].

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Maurey, Un théorème de prolongement, Note aux C. R. Acad. Sc. Paris, t. 279, A-329 (1974).

[2] L. Schwartz, Les applications 0-radonifiantes dans les espaces de suite, Séminaire Schwartz 1969-1970, exp. XXVI.

[3] A. de Acosta, Stable measures and seminorms, Ann. of Prob. vol. 3, No 5 (1975) 865-875.

[4] B. Maurey, Théorèmes de Nikishin : théorèmes de factorisation pour les applications linéaires à valeurs dans un espace $L^0(\Omega,\mu)$, Séminaire Maurey-Schwartz 1972-1973, exp. X-XI.

[5] J. Hoffmann-Jørgensen, The strong law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces, Mat. Inst. Aarhus, Preprint Ser., 1975.

[6] D. Mouchtari, Teoria verojatnostej i primenenia, 1973, No 2, Some general questions of the theory of probability measures in linear spaces, XVIII, No 1 (1973) 66-77.

[7] D. Mouchtari, Une caractérisation probabiliste de l'espace de Hilbert, Teoria verojatnostej i primenia (à paraître).
