

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

D. DACUNHA-CASTELLE

Variables aléatoires échangeables et espaces d'Orlicz

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 10, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975___A9_0

© Séminaire analyse fonctionnelle (dit "Maurey-Schwartz")
(École Polytechnique), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 4 - 1 9 7 5

VARIABLES ALEATOIRES ECHANGEABLES ET ESPACES D'ORLICZ

par D. DACUNHA-CASTELLE

Exposé N° X

22 Janvier 1975

Soit (Ω, \mathcal{O}, P) un espace de probabilité, \mathfrak{B} une sous- σ -algèbre de \mathcal{O} .

Si $Y_1 \dots Y_n$ sont des variables aléatoires, on définit par $\mathfrak{L}(Y_1 \dots Y_n)$ la loi (sur \mathbb{R}^n) de $Y_1 \dots Y_n$.

Définition : Une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables est dite écartable (resp. échangeable) au dessus de \mathfrak{B} , si pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout (n_1, \dots, n_k) , $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ (resp. : $n_1 \neq n_2 \neq \dots \neq n_k$), tout $h \in \mathbb{N}$ toutes variables X_1, \dots, X_h , \mathfrak{B} -mesurables, on a :

$$(1) \quad \mathfrak{L}(X_1, \dots, X_h, U_{n_1}, \dots, U_{n_k}) = \mathfrak{L}(X_1, \dots, X_h, U_1, \dots, U_k)$$

Si \mathfrak{B} est la σ -algèbre triviale, on dira simplement écartable (resp. échangeable).

On suppose à partir de maintenant que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables définies sur un espace $(\Omega_1, \mathcal{O}_1, P_1)$ ayant la propriété P suivante :

$$(P) \quad \{\mathfrak{L}(X_n), n \in \mathbb{N}\} \text{ est relativement compact (pour la convergence étroite) et } 0 \notin \overline{\{\mathfrak{L}(X_n), n \in \mathbb{N}\}}$$

Soit alors \mathfrak{D} un ultrafiltre non trivial sur \mathbb{N} .

L'ensemble de formules

$$(2) \quad \mathfrak{L}(X'_1, \dots, X'_h, U_1, \dots, U_{k-1}, U_k) = \lim_{\mathfrak{D}} \mathfrak{L}(X_1, \dots, X_h, U_1, \dots, U_{k-1}, X_n)$$

définit des suites de variables $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur un espace $(\Omega_2, \mathcal{O}_2, P_2)$ telles que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soient isonômes (c'est-à-dire de même loi).

En effet, (2) a bien un sens d'après (P) et il suffit alors d'appliquer le théorème de Kolmogorov à la famille projective de lois $\{\mathfrak{L}(X'_1, \dots, X'_h, U_1, \dots, U_k)\}$.

On identifiera dans la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(X'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on considèrera toujours $(\Omega_1, \mathcal{O}_1, P_1)$ comme plongé dans $(\Omega_2, \mathcal{O}_2, P_2)$ (c'est-à-dire $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ et $P_1 = P_2$ restreinte à \mathcal{O}_1). Enfin, pour simplifier l'écriture, on notera (Ω, \mathcal{O}, P) pour $(\Omega_2, \mathcal{O}_2, P_2)$ et $\sigma(X)$ pour la σ -algèbre engendrée par $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \mathcal{O} .

On dira que $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est la suite d'indiscernables construite au-dessus de $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$. On notera $C_b(\mathbb{R}^k)$ l'ensemble des fonctions continues bornées.

Définition : On dira que la variable Z approche en probabilité, à ε près, la variable Y si $P(|Y - Z| \leq \varepsilon) > 1 - \varepsilon$.

Lemme 1 : On a

$$(3) \quad \mathfrak{L}(Y_1, \dots, Y_h, U_1, \dots, U_{k-1}, U_k) = \lim_{\mathfrak{D}} \mathfrak{L}(Y_1, \dots, Y_h, U_1, \dots, U_{k-1}, X_n)$$

pour tout $h, k \in \mathbf{N}$, tout $Y_1, \dots, Y_h, \sigma(X)$ mesurables.

En effet, soit $f \in C_b(\mathbb{R}^h)$. Alors il existe $m \in \mathbf{N}$, et $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^m)$ tel que $\varphi(X_1, \dots, X_m)$ approche $f(Y_1, \dots, Y_h)$ à ε près en probabilité et $\|\varphi\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

On a, si $\psi \in C_b(\mathbb{R}^k)$

$$|E f(Y_1, \dots, Y_h) \psi(U_1, \dots, U_k) - E \varphi(X_1, \dots, X_m) \psi(U_1, \dots, U_k)| < \varepsilon + 2\varepsilon \|\psi\|_\infty \|f\|_\infty$$

Comme ε est arbitraire, (3) se déduit alors de (2).

Lemme 2 : La suite $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ des indiscernables construits au-dessus de $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est écartable au-dessus de $\sigma(X)$, et formée de variables distinctes.

- Montrons par récurrence sur k que pour tout h , toutes $Y_1, \dots, Y_h, \sigma(X)$ mesurables, on a pour tout $n_1 < n_2 < \dots < n_k$

$$(4) \quad \mathfrak{L}(U_{n_1}, \dots, U_{n_k}, Y_1, \dots, Y_h) = \mathfrak{L}(U_1, \dots, U_k, Y_1, \dots, Y_h)$$

Pour $k = 1$, on a

$$\mathfrak{L}(U_{n_1}, Y_1, \dots, Y_h) = \lim_{\mathfrak{D}} \mathfrak{L}(X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_h)$$

(d'après le lemme 1)

$$= \mathfrak{L}(U_1, Y_1, \dots, Y_h)$$

Soit alors $k > 1$.

$$\mathfrak{L}(U_{n_1}, \dots, U_{n_k}, Y_1, \dots, Y_h) = \lim_{\mathfrak{D}} \mathfrak{L}(U_{n_1}, \dots, U_{n_{k-1}}, X_{n_k}, Y_1, \dots, Y_h)$$

(d'après le lemme 1 et la remarque que si $\mu_n \xrightarrow{\mathfrak{D}} \mu$ (pour la convergence étroite sur \mathbb{R}^n) alors toute marginale $\mu_n^{m'}$ (et toute projection de μ_n sur $\mathbb{R}^{m'}$), $m' < m$ est telle que $\mu_n^{m'} \rightarrow \mu^{m'}$).

Donc

$$\mathfrak{L}(U_{n_1}, \dots, U_{n_k}, Y_1, \dots, Y_h) = \lim_{\mathfrak{D}} \mathfrak{L}(U_1, \dots, U_{k-1}, X_n, Y_1, \dots, Y_h)$$

(par hypothèse de récurrence)

$$= \mathfrak{L}(U_1, \dots, U_{k-1}, U_k, Y_1, \dots, Y_h)$$

Comme

$$\mathfrak{L}(U_{n_1} - U_{n_2}) = \mathfrak{L}(U_{n_1} - U_{n_2}) \quad , \quad n_1 < n_2$$

$$= \lim_{\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{D}} \mathfrak{L}(X_{n_1} - X_{n_2})$$

il résulte de (P) que $P(U_i \neq U_j) > 0$ pour tout $i \neq j$, d'où le lemme 2.

Proposition 1 : $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est échangeable au dessus de $\sigma(X)$.

Démonstration : En utilisant comme précédemment le théorème de Kolmogorov, on définit un espace $(\Omega', \mathcal{O}', P')$ tel que $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ et P' restreinte à \mathcal{O} soit P et on définit une variable W sur $(\Omega', \mathcal{O}', P')$ à partir de l'ensemble des formules :

$$(5) \quad \mathfrak{L}(Y_1, \dots, Y_h, U_1, \dots, U_k, W) = \lim_{\mathfrak{D}} \mathfrak{L}(Y_1, \dots, Y_h, U_1, \dots, U_k, U_n)$$

pour tout $h, k \in \mathbb{N}$, $Y_1, \dots, Y_h, \sigma(X)$ mesurables.

Soit $f, f_1, \dots, f_k \in C_b(\mathbb{R})$, $Y \sigma(X)$ mesurable, on a

$$\begin{aligned} & E f(Y) f_1(U_1) \dots f_{k-1}(U_{k-1}) f_k(U_k) \\ &= E f(Y) f_1(U_{n_1}) \dots f_{k-1}(U_{n_{k-1}}) f_k(U_{n_k}) \end{aligned}$$

pour tout $n_1 < \dots < n_k$.

$$= E f(Y) f_1(U_{n_1}) \dots f_{k-1}(U_{n_{k-1}}) f_k(W)$$

par définition de W .

Soit $\mathfrak{B}_{n_1} = \sigma((X_n)_{n \in \mathbb{N}}, U_n, n \geq n_1)$. On a donc :

$$E f(Y) f_1(U_1) \dots f_k(U_k) = E f(Y) \dots f_{k-1}(U_{n_{k-1}}) E^{\mathfrak{B}_{n_1}} f_k(W)$$

Soit $\tilde{\varphi} = \varphi(X_1 \dots X_h, U_{n_1}, \dots, U_{n_1+\ell})$, $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^{h+\ell})$ approchant à ε près en probabilité $E^{\mathfrak{B}_{n_1}} f_k(W)$.

On a

$$|E f(Y) f_1(U_{n_1}) \dots f_{k-1}(U_{n_{k-1}}) \tilde{\varphi} - E f(Y) f_1(U_1) \dots f_k(U_k)| < \varepsilon \|f_k\|_{\infty}$$

En faisant tendre n_{k-1} vers ∞ , on obtient (lemme 2)

$$|E f(Y) f_1(U_{n_1}) \dots f_{k-1}(W) \varphi - E f(Y) f_1(U_1) \dots f_k(U_k)| < \varepsilon \|f_k\|_{\infty}$$

d'où

$$E f(Y) f_1(U_{n_1}) \dots f_{k-1}(W) E^{\mathfrak{B}_{n_1}} f_k(W) = E f(Y) f_1(U_1) \dots f_k(U_k)$$

puisque ε est arbitraire, et de proche en proche

$$(8) \quad E[f(Y) \prod_{i=1}^k f_i(U_i)] = E f(Y) [E^{\mathfrak{B}_{n_1}} \prod_{i=1}^k f_i(U_i)]$$

d'où la proposition 1 ; on voit de plus que les variables (U_n) sont conditionnellement indépendantes par rapport à \mathfrak{B}_{n_1} pour tout n_1 , comme $\mathfrak{B}_{n_1} \downarrow \mathfrak{B}_{\infty}$, σ -algèbre engendrée par $\sigma(X)$ et $q(U)$, ou $q(U) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma(U_m, m \geq n)$ d'après le théorème des martingales, (8) vaut aussi pour \mathfrak{B}_{∞} à la place de \mathfrak{B}_{n_1} .

Soit alors a fixé, $\varphi_a = \sigma(X_n, n \geq a)$.

Soit $f, \varphi, \psi \in C_b$. Soit V une variable $q(U)$ mesurable. On a

$$(9) \quad E E^{\varphi_a} f(V) \varphi(U_1 \dots U_{\ell}) \psi(X_a, \dots, X_{a+h}) = \lim_{\mathfrak{D} \times \dots \times \mathfrak{D}} E E^{\varphi_a} f(V) \varphi(X_{n_1} \dots X_{n_{\ell}}) \psi(X_a, \dots, X_{a+h})$$

pour tout m , on peut approcher à ε près en probabilité $f(V)$ par $\chi(U_m, \dots, U_{m+k})$, où $\chi \in C_b$, avec $m > \ell$.

On a

$$(10) \quad \mathbb{E} \chi(U_m, \dots, U_{m+k}) \varphi(U_1, \dots, U_\ell) \psi(X_a, \dots, X_{a+h}) = \\ = \lim_{\mathfrak{D}} \mathbb{E} \chi(U_m, \dots, U_{m+k}) \varphi(X_{n_1}, \dots, X_{n_\ell}) \psi(X_a, \dots, X_{a+h})$$

(d'après l'échangeabilité des U_n au-dessus de $\sigma(X)$).

On déduit alors de (9) et (10) que

$$\mathbb{E} \mathbb{E}^{\varphi_a} f(V) \varphi(U_1, \dots, U_\ell) \psi(X_a, \dots, X_{a+h}) = \mathbb{E} f(V) \varphi(U_1, \dots, U_\ell) \psi(X_a, \dots, X_{a+h})$$

Donc

$$\mathbb{E}^{\varphi_a} f(V) = f(V) \quad \text{p.s.}$$

et par suite

$$q(U) \subset \varphi_a$$

Si $q(X) = \bigcap_{a=1}^{\infty} \varphi_a$, on en déduit

Proposition 2 : $q(U) \subset q(X)$ et

- 1) les (U_n) sont conditionnellement indépendantes par rapport à $q(U)$,
- 2) les (U_n) sont conditionnellement indépendantes par rapport à $q(X)$ au-dessus de $\sigma(X)$.

Corollaire 1 : Toute suite de variables échangeables $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est conditionnellement indépendante par rapport à $q(X)$.

En effet, si $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est échangeable, la double suite $((X_n)_{n \in \mathbf{N}})_{n \in \mathbf{N}}$ est échangeable,

$(\mathcal{L}(Y_1, \dots, Y_k) = \mathcal{L}(Y_{n_1}, \dots, Y_{n_k})$ ou Y_1, \dots, Y_k et Y_{n_1}, \dots, Y_{n_k} sont des k -uplets

de variables distinctes choisies parmi les $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et les $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$, et $q(X) = q(U)$.

Définition : On dit qu'une suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est signe-invariante si pour tout k , tout $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$, $\varepsilon_1^2 = 1$, on a

$$\mathfrak{L}(\varepsilon_1 X_1, \dots, \varepsilon_k X_k) = \mathfrak{L}(X_1, \dots, X_k)$$

Soit F une fonction d'Orlicz modérée, c'est-à-dire une fonction croissante sur \mathbb{R}^+ , $F(0) = 0$, $F(\infty) = \infty$ telle que $F(x+y) \leq C(F(x) + F(y))$. Dans toutes les questions concernant des espaces de Banach, on suppose F convexe.

On note $L_F(\Omega, \mathcal{A}, P)$ l'espace d'Orlicz des fonctions F -sommables sur (Ω, \mathcal{A}, P) , muni de la norme $\|Z\|_F$ définie par $\int_{\Omega} F\left(\frac{Z}{\|Z\|_F}\right) dP = 1$.

Enfin on note $[X, F]$, l'espace engendré dans L_F par la suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}} = X$.

Dans la suite on se limitera au cas suivant :

(H) F est telle qu'il existe une fonction F_1 , des constantes $x_0, a, b, c > 0$, une mesure de Lévy dM sur $[0, 1]$ telles que H-1: $a < \frac{F(cx)}{F_1(x)} < b$

pour $x > x_0$ (c'est-à-dire F équivalente à l' ∞ à F_1 au sens des fonctions d'Orlicz

$$\text{H-2: } F_1(x) = \int_0^1 (1 - \cos tx) dM(t)$$

Les espaces L_F et L_{F_1} sont alors isomorphes.

Remarquons que $F(x) = x^p$, $0 < p < 2$ satisfait à cette condition, en effet si

$$F_1(x) = \int_0^1 \frac{1 - \cos tx}{t^{p+1}} dt, \text{ posant } C(x) = \int_0^1 \frac{1 - \cos u}{u^{p+1}} du, \text{ on a pour } x > 1 :$$

$$0 < C(1) < C(x) < C(\infty) < \infty,$$

$$\text{et donc } C(1)x^p < F_1(x) < C(\infty)x^p$$

Supposons d'abord les variables $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ indépendantes et symétriques (signe-invariantes) et F admettant la représentation (H-2).

On a :

$$\begin{aligned} E F\left(\sum_1^N c_n X_n\right) &= \int_0^1 E\left(1 - \cos t \sum_1^N c_n X_n\right) dM(t) \\ &= \int_0^1 [1 - \exp \sum \psi(tc_n)] dM(t) \end{aligned}$$

où $E \cos t X_i = \exp - \psi(t) = \varphi(t)$

Supposons $\sum_1^N \psi(tc_n) \leq 1$, pour $0 \leq t \leq 1$.

Comme $(1 - e^{-1})u \leq 1 - e^{-u} < u$ pour $0 < u < 1$, on a

$$(1 - e^{-1}) \sum_1^N \int \psi(tc_n) dM(t) \leq EF \left(\sum_1^N c_n X_n \right) \leq \sum_1^N \int_0^1 \psi(tc_n) dM(t)$$

Si $\psi(t) \leq 1$, on a $(1 - e^{-1})(1 - \varphi(t)) \leq \psi(t) \leq 1 - \varphi(t)$.

Or

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 - \varphi(\lambda t)) dM(t) &= \int_0^1 E(1 - \cos t \lambda X) dM(t) \\ &= EF(\lambda X) \end{aligned}$$

par le théorème de Fubini.

Posons alors $f(\lambda) = EF(\lambda X)$, et remarquons que f est convexe si F l'est.

On a donc pour $\sum_1^N \psi(tc_n) \leq 1$

$$(11) \quad (1 - e^{-1})^2 \sum_1^N f(c_n) \leq EF \left(\sum_1^N c_n X_n \right) \leq \sum_1^{\infty} f(c_n)$$

On a $F'(0) = 0$, $F''(0) > 0$, il existe donc une constante α telle que

$$\begin{aligned} F(x) &> \alpha^{-2}(1 \wedge x^2) \quad (\wedge \text{signifiant minimum}) \\ &> \alpha^{-2}(1 \wedge t^2 x^2) \quad \text{pour } 0 < t < 1 \end{aligned}$$

Donc $E(1 - \cos t Z) \leq 2E(1 \wedge t^2 Z) < 2\alpha^2 EF(Z)$
d'où

$$\begin{aligned} E \cos t Z &= \varphi_Z(t) \\ &= 1 - E(1 - \cos t Z) \\ &\geq 1 - 2\alpha^2 EF(Z) \end{aligned}$$

Supposons $2\alpha^2 \mathbb{E} F(Z) < \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned} |\psi_Z(t)| &= |\log \varphi_Z(t)| = |\log 1 - \mathbb{E}(1 - \cos t Z)| \\ &\leq 2 \mathbb{E}(1 - \cos t Z) \\ &\leq 4\alpha^2 \mathbb{E} F(Z) \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

Donc si $\mathbb{E} F(Z) \leq (4\alpha^2)^{-1} = \beta$ (β ne dépendant que de F , pas de la loi de Z)

On a $|\psi_Z(t)| < 1$.

Pour $t < t_0$, $\psi_Z(t) > 0$.

Choisissons $\max(c_n)$ assez petit tel que $\psi(c_n t) > 0$ pour tout $t \in (0, 1)$.

Alors si $\mathbb{E} F\left(\sum_{n=1}^N c_n X_n\right) \leq \beta$, on a

$$(12) \quad (1 - e^{-1})^2 \leq f(c_n) \leq \beta$$

Pour tout espace d'Orlicz L_F , il existe 2 fonctions continues croissantes, nulles en 0, définies sur \mathbb{R}^+ , soit ϕ_1, ϕ_2 telles que

$$\phi_1(\|Z\|_F) \leq \mathbb{E} F(Z) \leq \phi_2(\|Z\|_F),$$

on déduit donc de (12), qu'il existe 2 constantes γ_1 et γ_2 dépendant de F mais pas de la loi des $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\gamma_1 \left\| \sum_{n=1}^N c_n X_n \right\|_{L_F} \leq \|(c_n)\|_{\ell_f} \leq \gamma_2 \left\| \sum_{n=1}^N c_n X_n \right\|_{L_F}$$

d'où

Théorème 1 : Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et symétriques, si F est une fonction d'Orlicz convexe satisfaisant (H), en particulier à $F(x) = x^p$, $1 \leq p < 2$, alors il existe une constante $\lambda(F)$ telle

que $[X_n, F]$ soit $\lambda(F)$ -isomorphe à ℓ_f , ou $f(u) = E F(u X_n)$, $\lambda(F)$ est indépendante de la loi des X_n .

Supposons maintenant les variables $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ échangeables et signe-invariantes, et limitons nous pour simplifier au cas $F(x) = x^p$.

On a $E F \left| \sum_1^n c_n X_n \right|^p = E E^{q(X)} \left| \sum_1^n c_n X_n \right|^p$.

Notons μ la probabilité trace de P sur la σ -algèbre $q(X)$.

On a donc

$$E \left| \sum_1^N c_n X_n \right|^p = \int E^{q(X)} \left| \sum_1^N c_n X_n \right|^p d\mu$$

D'après le théorème précédent, il existe μ ps pour tout ω , une fonction d'Orlicz $f(\omega)$ et des constantes γ_1, γ_2 (indépendantes de ω) telles que

$$\gamma_1 \left\| c_n \right\|_{\ell_{f(\omega)}}^p \leq (E^{q(X)} \left| \sum_1^N c_n X_n \right|^p)(\omega) \leq \gamma_2 \left\| c_n \right\|_{\ell_{f(\omega)}}^p$$

donc

Proposition 3 : Si $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de variables échangeables et signe invariantes, il existe une application bimesurable (pour $q(X) \otimes$ boréliens) $(x, \omega) \rightarrow f(\omega, x)$, ou $f(\omega, \cdot)$ une fonction d'Orlicz et des constantes γ_1, γ_2 telles que

$$\gamma_1 \int_{\Omega} \left\| c_n \right\|_{f_{\omega}}^p d\mu \leq \left\| \sum_1^N c_n X_n \right\|_{L^p}^p \leq \gamma_2 \int \left\| c_n \right\|_{f_{\omega}}^p d\mu$$

Dans [1], un résultat inexact est énoncé. Un espace $[X_n, p]$ n'est pas, en général, un espace d'Orlicz, le lemme [III.1] de [1] est faux (l'ensemble considéré des mesures de Lévy n'est pas dénombrable |)

Depuis que nous nous sommes aperçus de cette erreur plusieurs contre exemples ont été donnés (Bretagnolle, Maurey). On peut, par exemple, considérer le cas où les lois $q(\omega)$ -conditionnelles sont toutes des lois stables d'indice $p(\omega)$, $1 < q < p(\omega) < 2$.

Posons alors $S_N = \sum_1^N X_n$. On a $\frac{E |S_N|^{q(X)}}{N^{1/q}} = N^{1/p - 1/q}$ et donc $\frac{E |S_N|}{N^{1/q}}$ est

une fonction décroissante de N .

Supposons $[X_n, 1]$ isomorphe à un espace d'Orlicz \mathcal{L}_f . On sait qu'alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'envoie sur la base canonique d'un espace d'Orlicz, que l'on peut encore noter \mathcal{L}_f . Notons σ_N l'image de S_N dans \mathcal{L}_f .

On a $N f\left(\frac{1}{\|\sigma_N\|}\right) = 1$ donc, si l'on pose $\varphi(N) = \frac{\|S_N\|^q}{N}$, il existe des constantes C_1, C_2 telles que

$$C_1 \varphi(N) \leq \frac{f(1/\|S_N\|)}{1/\|S_N\|^q} \leq C_2 \varphi(N)$$

f étant modérée est déterminée par ses valeurs sur la suite $(\|S_N\|)_{N \in \mathbb{N}}$ à une équivalence près et donc $\frac{f(x)}{x^q}$ équivaut à une fonction croissante, ce qui implique que \mathcal{L}_f est réflexif puisque $q > 1$ ([1]).

Or pour μ bien choisi $[X_n, 1]$ n'est pas réflexif.

En effet, notons $A_\varepsilon = \{\omega, q < p(\omega) < q + \varepsilon\}$

$$\int_{A_{2\varepsilon}} E^{q(X)} |S_N| d\mu \geq \frac{1}{N^{q+\varepsilon}} \mu_\varepsilon, \quad \mu_\varepsilon = \mu(A_\varepsilon)$$

$$\int_{A_{2\varepsilon}^c} E^{q(X)} |S_N| d\mu \leq \frac{1}{N^{q+2\varepsilon}}.$$

Choisissons alors $\varepsilon(N)$ tel que $\mu(\varepsilon_N) \rightarrow 0$ ($\varepsilon_N \rightarrow 0$), et $\frac{1}{N^{q+2\varepsilon_N}} < \mu(\varepsilon_N) \frac{1}{N^{q+\varepsilon_N}}$, par exemple $\varepsilon = 1/\sqrt{\log N}$ et μ telle que $\mu(1/\sqrt{\log N}) > \frac{1}{N^{1/\sqrt{\log N}}}$.

Alors $\frac{S_N}{\|S_N\|}$ n'est pas équi-intégrable donc $[X_n, 1]$ n'est pas réflexif, donc n'est pas isomorphe à un espace d'Orlicz.

En modifiant un peu la situation, on a le même contre-exemple pour un espace réflexif $[X_n, 1]$, (la seule condition simple pour que $[X_n, 1]$ soit isomorphe à un espace d'Orlicz est que μ soit atomique et $[X_n, 1]$ réflexif.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Bretagnolle et Dacunha-Castelle : Formes linéaires aléatoires et espaces d'Orlicz.
 Ann. ENS 4^e série t2 fas4 1969 p437-480
