J. STERN

Propriétés locales et ultrapuissances d'espaces de Banach (suite et fin)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 8, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A7_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 4 - 1 9 7 5

PROPRIETES LOCALES ET ULTRAPUISSANCES D'ESPACES DE BANACH

(suite et fin)

par J. STERN

Exposé N^{o} VIII 8 Janvier 1975

Dans cet exposé, on se propose d'étudier les rapports entre les notions d'ultrapuissance et de u-extension(définies dans l'exposé précédent) et certaines opérations intervenant naturellement dans la géométrie des espaces de Banach, le passage au dual et le passage d'un espace E a un sous-espace complémenté de E.

1. SUPER-REFLEXIVITE ET DUALITE DES ULTRAPUISSANCES.

Soit E un espace de Banach ; $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur un ensemble I ; il existe un plongement isométrique $j : E'^I/\mathcal{U} \to (E^I/\mathcal{U})'$ où $j((f_i)_{i \in I})$ est l'élément de $(E^I/\mathcal{U})'$ défini par $(x_i)_{i \in I} \to \lim f_i(x_i)$. On identifiera $E'^I/\mathcal{U}$ et $j(E'^I/\mathcal{U})$; on peut se demander quand $E'^I/\mathcal{U} = (E^I/\mathcal{U})'$. Le théorème suivant répond à cette question.

<u>Théorème 1</u> : <u>Soit E un espace de Banach</u> ; <u>les conditions suivantes sont équivalentes</u>

(i) <u>E est super-réflexif</u>.

(ii) <u>Pour tout ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur un ensemble I quelconque, $(E^I/\mathcal{U})' = (E'^I/\mathcal{U})$</u>.

(iii) <u>Il existe un ultrafiltre non principal $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$ tel que $(E^{\mathbb{N}}/\mathcal{U})' = (E'^{\mathbb{N}}/\mathcal{U})$</u>.

On rappelle (cf. [1]) que E est dit <u>super-réflexif</u> si tout espace finiment représentable dans E est réflexif. D'après la proposition 1 de l'exposé précédent, E est super-réflexif si et seulement si toute ultrapuissance de E est réflexive.

<u>Preuve du théorème</u> : i) $\to$ ii) : Si $E'^I/\mathcal{U} \subsetneq (E^I/\mathcal{U})'$, alors, il existe une forme linéaire φ sur $(E^I/\mathcal{U})'$ qui est nulle sur $E'^I/\mathcal{U}$ et de norme 1. Puisque $E^I/\mathcal{U}$ est réflexif, il existe un élément x de $E^I/\mathcal{U}$ tel que si $f \in (E^I/\mathcal{U})'$, $\varphi(f) = f(x)$. Soit $(x_i)_{i \in I}$ un représentant de x. Pour chaque i, on choisit une forme linéaire f_i de E', telle que $\|f_i\| = 1$ et $f_i(x_i) = \|x_i\|$. Soit f l'élément de $E'^I/\mathcal{U}$ défini par $(f_i)_{i \in I}$; on a :

$$0 = \varphi(f) = f(x) = \lim_{\mathcal{U}} f_i(x_i) = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| = 1$$

contradiction.

ii) $\rightarrow$ iii) est clair.

iii) $\rightarrow$ i) : On introduit d'abord la propriété (P) suivante

(P) : il existe θ, $0 < \theta < 1$ tel que $\forall\ \varepsilon > 0$, $\forall\ n$, $\exists\ z_1 \in E \ldots \exists\ z_n \in E$, $\exists\ g_1 \in E' \ldots \exists\ g_n \in E'$ tels que $\|z_1\| \leq 1+\varepsilon, \ldots, \|z_n\| \leq 1+\varepsilon$

$\|g_1\| \leq 1+\varepsilon, \ldots, \|g_n\| \leq 1+\varepsilon$.

et $g_j(z_i) = \theta$ si $j \leq i$

$g_j(z_i) = 0$ sinon.

La démonstration se décompose alors en deux lemmes.

Lemme 2 : Si un espace de Banach E a la propriété (P), alors pour tout ultrafiltre non trivial $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{N}$, $E'^{\mathbb{N}}/\mathcal{U} \neq (E^{\mathbb{N}}/\mathcal{U})'$.

Lemme 3 : Si E n'est pas super-réflexif, E a la propriété (P).

Preuve du lemme 2 : Pour chaque entier n, on considère les éléments $z_1^n, \ldots, z_n^n$; $g_1^n, \ldots, g_n^n$ donnés par la propriété (P) avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

On désigne par $[1\ n]$ l'ensemble des entiers m, $1 \leq m \leq n$; on note $\mathbb{N}^*$ le quotient du produit $\prod_n [1,n]$ par la relation d'équivalence

$\delta \sim \delta'$ si $\{n : \delta(n) = \delta'(n)\} \in \mathcal{U}$.

$\mathbb{N}^*$ est totalement ordonné par la relation $\delta \leq \delta'$ si $\{n : \delta(n) \leq \delta'(n)\} \in \mathcal{U}$.

On notera $\bar{n}$ un élément de $\mathbb{N}^*$ défini par une fonction δ presque partout égale à n. A tout élément δ de $\mathbb{N}^*$, on peut associer un élément z_δ de $E^I/\mathcal{U}$ en posant $z_\delta = (z^n_{\delta(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ (Il résulte des conventions : $z_{\bar{m}} = (z^n_m)_{m \in \mathbb{N}}$)

De même, on définit g_δ, élément de $E'^I/\mathcal{U}$.

La famille des sous-ensembles X_δ de $\mathbb{N}^*$ définis par $X_\delta = \{\delta' : \delta' \leq \delta, \delta' \neq \bar{1}, .., \delta' \neq \bar{n}, ..\}$, a la propriété de l'intersection finie ; soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}^*$ qui étend cette famille. On va voir que la forme linéaire g de $(E^I/\mathcal{U})'$

$$g(x) = \lim_{\mathcal{F}} g_\delta(x)$$

n'est pas un élément de $E'^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$.

On a . $\|g_\delta\| \leq 1$ pour $\delta \neq \bar{m}$, $m \in \mathbb{N}$ et, donc, $\|g\| \leq 1$, en effet, puisque $\{n : \delta(n) > m\} \in \mathcal{U}$, $\{n : \|g^n_{\delta(n)}\| \leq 1 + \frac{1}{m}\} \in \mathcal{U}$.

. $g(z_\delta) = \theta$ pour $\delta \neq \bar{m}$, $m \in \mathbb{N}$; en effet, pour $\delta' \in X_\delta$, $g_{\delta'}(z_\delta) = \theta$.

. $g(z_{\bar{n}}) = 0$, en effet, pour $\delta \neq \bar{m}$, $m \in \mathbb{N}$, $g_\delta(z_{\bar{n}}) = 0$.

Dans le but de trouver une contradiction, on suppose que $g \in E'^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$, soit $g = (h_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On a $\lim\limits_{\mathcal{U}} h_n(z^n_m) = 0$ (pour m fixé), donc si $X_m = \{n : |h_n(z^n_m)| \leq \frac{\theta}{2}\}$, alors $X_m \in \mathcal{U}$.

On pose $Y_m = X_1 \cap \ldots \cap X_m - [1\ m]$; alors X_m est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{U}$ d'intersection vide. On définit $\delta(n)$ comme étant le plus petit entier p tel que $n \notin Y_{p+1}$. On a alors :

$$| h_n(z^n_{\delta(n)}) | \leq \frac{\theta}{2} \quad \text{puisque } n \in X_{\delta(n)} .$$

Donc
$$|g(z_\delta)| \leq \frac{\theta}{2} .$$

Or, δ n'est égal à aucun entier $\bar{m}$, sinon on aurait $Y_{m+1} \notin \mathcal{U}$, donc, $g(z_\delta) = \theta$, contradiction

Preuve du lemme 3 : Si E n'est pas super-réflexif, il existe un espace F non réflexif finiment représentable dans E ; dans ces conditions, il existe θ, $0 < \theta < 1$ et des suites $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de F, F' respectivement telles que :

$$\|y_n\| \leq 1 \qquad \|f_n\| \leq 1$$

et
$$f_j(y_i) = \theta \quad \text{si } j \leq 1$$
$$f_j(y_i) = 0 \quad \text{sinon.}$$

(Pour la démonstration de ce résultat, voir [1], exposé XIV).

Soit $\varepsilon > 0$ donné, $n \in \mathbb{N}$ donné ; soit A le sous-espace de F engendré par les éléments $y_1, \ldots y_n$; φ un $1 + \varepsilon$-isomorphisme de A sur un sous-espace de E.

$_1 = \varphi(y_1), \dots, z_n = \varphi(y_n)$.

les formes linéaires $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$ sur $\varphi(A)$ par $\tilde{f}_j = f_j \upharpoonright A \circ \varphi^{-1}$

..aque j, on choisit une forme linéaire g_j sur E qui étend $\tilde{f}_j$

a même norme que f_j. On a alors :

$$\|z_1\| \leq 1+\varepsilon, \dots, \|z_n\| \leq 1+\varepsilon$$

$$\|g_1\| \leq 1+\varepsilon, \dots, \|g_n\| \leq 1+\varepsilon$$

$$g_j(z_i) = 1 \text{ si } j \leq i$$

$$g_j(z_i) = 0 \text{ sinon}$$

c'est-à-dire qu'on a la propriété (P).

2. LE DUAL D'UNE ULTRAPUISSANCE.

Dans le cas où E n'est pas super-réflexif, l'inclusion $E'^I/\mathcal{U} \subseteq (E^I/\mathcal{U})'$ a des propriétés comparables à celles de l'inclusion $E \subsetneq E''$.

Théorème 4 : Soit E un espace de Banach, $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur un ensemble I ; il existe un ultrafiltre $\mathcal{V}$ sur un ensemble J et une application linéaire $\varphi : (E^I/\mathcal{U})' \to (E'^I/\mathcal{U})^J/\mathcal{V}$ tels que :

1. φ est une isométrie de $(E^I/\mathcal{U})'$ sur un sous-espace de $(E'^I/\mathcal{U})^J/\mathcal{V}$ fortement complémenté.
2. $\varphi \upharpoonright E'^I/\mathcal{U}$ est l'isométrie canonique de $E'^I/\mathcal{U}$ dans $(E'^I/\mathcal{U})^J/\mathcal{V}$.

Le théorème 4 est la conséquence du lemme suivant analogue du principe de "réflexivité locale".

Lemme 5 : Pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout espace de dimension finie $A \subset (E^I/\mathcal{U})'$ et pour toute suite d'éléments $x_1, \dots, x_n$ de $E^I/\mathcal{U}$, il existe une application linéaire $T : A \to E'^I/\mathcal{U}$ telle que

- $T_{|A \cap E'^I/\mathcal{U}}$ est l'identité.
- T est un $1+\varepsilon$-isomorphisme de A sur une image.
- $|T(f)(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon \|f\|$ $j = 1,\dots,n$; $f \in A$.

Preuve du théorème à partir du lemme : Soit J l'ensemble des couples (A,S) où A est un espace de dimension finie $A \subseteq (E^I/\mathcal{U})'$ et S un ensemble fini d'éléments de $E^I/\mathcal{U}$. J est ordonné par double inclusion. Soit $\mathcal{V}$ un ultrafiltre sur I qui étend la famille des $\widehat{(A,S)}$ où $\widehat{(A,S)} = \{(A',S') : (A',S') \supseteq (A,S)\}$. Pour chaque (A,S), on choisit $T_{(A,S)}$ donné par le lemme avec $\varepsilon = \dfrac{1}{\dim A}$.

On pose $\varphi(f) = (T_{(A,S)}(f))_{(A,S) \in J}$ où $T_{(A,S)}(x) = 0$ si $x \notin A$.

φ est une isométrie de $(E^I/\mathcal{U})'$ dans $(E'^I/\mathcal{U})^J/\mathcal{V}$ qui est l'identité sur $E'^I/\mathcal{U}$.

On définit $\pi : (E'^I/\mathcal{U})^J/\mathcal{V} \to (E^I/\mathcal{U})'$ en posant si g est $(g_{(A,S)})_{(A,S) \in J}$

$$\pi(g).x = \lim_{\mathcal{V}} g_{(A,S)}(x) \qquad x \in E^I/\mathcal{U} .$$

Il est clair que $\pi(\varphi(f)) = f$. Donc $\varphi \circ \pi$ est une projection de norme 1 de $(E'^I/\mathcal{U})^J/\mathcal{V}$ sur $\varphi((E^I/\mathcal{U})')$.

Preuve du lemme : Un raisonnement analogue à celui fait dans la deuxième partie de la preuve de la proposition 2 de l'exposé précédent montre qu'on peut se borner à démontrer le résultat suivant :

- Si $f_1,\dots,f_p$ sont des éléments de $E'^I/\mathcal{U}$, $g_1,\dots,g_n$ des éléments de $(E^I/\mathcal{U})'$; $x_1,\dots,x_l$ des éléments de $E^I/\mathcal{U}$ et $(\alpha_{kj})_{1\le k\le p\,;\,1\le j\le n}$ des réels, et si on pose :

$$\|f_1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j}\, g_j\| = \gamma_1$$

$$\vdots$$

$$\|f_p + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{pj}\, g_j\| = \gamma_p$$

$$g_j(x_s) = \lambda_{js} \qquad 1 \le j \le n \;,\; 1 \le s \le l.$$

alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des éléments $h_1, \dots, h_n$ de $(E'^I/\mathcal{U})$ tels que

$$\left| \begin{array}{l} \gamma_k + \varepsilon \leq \|f_k + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}\, h_j\| \leq \gamma_k + \varepsilon \qquad 1 \leq k \leq p \;. \\ \\ \lambda_{js} - \varepsilon \leq h_j(x_s) \leq \lambda_{js} + \varepsilon \;, \quad 1 \leq s \leq l \;, \; 1 \leq j \leq n. \end{array} \right.$$

En fait, on peut même affaiblir la conclusion en :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|f_k + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}\, h_j\| \leq \gamma_k + \varepsilon \\ \\ \lambda_{js} - \varepsilon \leq h_j(x_s) \leq \lambda_{js} + \varepsilon \;. \end{array} \right.$$

En effet, l'inégalité $\|f_k + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}\, h_j\| \geq \gamma_k - \varepsilon$ est la conséquence d'une inégalité (plus forte) $(f_k + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}\, h_j)\,(y_k) \geq \gamma_k - \varepsilon \qquad \|y_k\| \leq 1$

et cette inégalité sera obtenue si on applique la forme affaiblie du résultat à $f_1, \dots, f_p$; $g_1, \dots, g_n$; $x_1, \dots, x_l$; $y_1, \dots, y_p$ pour $\varepsilon' > 0$ assez petit.

On suppose que f_k est donné par $(f_k^i)_{i \in I}$ et que x_s est donné par $(x_s^i)_{i \in I}$. On va montrer que l'ensemble des i tels qu'on puisse trouver $h_1^i, \dots, h_n^i$ dans E' tels que

$$\| f_k^i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}\, h_j^i \| \leq \gamma_k + \varepsilon \qquad 1 \leq k \leq p$$

$$\lambda_{js} - \varepsilon \leq h_j^i\,(x_s^i) \leq \lambda_{js} + \varepsilon \qquad 1 \leq j \leq n \;;\; 1 \leq s \leq l$$

appartient à $\mathcal{U}$, ce qui établira l'existence de $h_i, \dots, h_n$ $(h_j = (h_j^i)_{i \in I})$.

Si on ne peut trouver $h_1^i, \dots, h_n^i$ réalisant les inégalités ci-dessus ; a fortiori, on ne peut réaliser les inégalités suivantes

$$(*) \qquad f_k^i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj}\, h_j^i\,(x) < \gamma_k + \varepsilon \qquad \|x\| \leq 1$$

$$\lambda_{js} - \varepsilon < h_j^i\ (x_s^i) < \lambda_{js} + \varepsilon\ .$$

Dans l'espace $E^n \times \mathbb{R}$, on considère les points :

- $v_k^i(x) = (\alpha_{k1}x, \dots, \alpha_{kn}x,\ f_k^i(x) - \gamma_k - \varepsilon) \qquad \|x\| < 1$

- $z_{js}^i = (0, \dots, 0, -x_s^i, \dots,\ \lambda_{js} - \varepsilon$ où $-x_s^i$ représente la $j^{\text{ième}}$ coordonnée ; $1 \leq j \leq n,\ 1 \leq s \leq l$.

- $z'^{\,i}_{js} = (0, \dots, 0,\ x_s^i, \dots,\ -\lambda_{js} - \varepsilon)$ où x_s^i représente la j^{ieme} coordonnée ; $1 \leq j \leq n,\ 1 \leq s \leq l$.

- $-1^i = (0, \dots, 0,\ -1)$.

L'espace $E^n \times \mathbb{R}$ est un espace de Banach (muni, par exemple de la norme $(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \sup\ (\ \|x_1\|,\ \dots,\ \|x_n\|\ ,\ |\lambda|)$.
L'ultrapuissance $(E^n \times \mathbb{R})^I/\mathcal{U}$ est canoniquement isométrique à $(E^I/\mathcal{U})^n \times \mathbb{R}$. Dans cet espace, on définit les points $v_k(x)$, z_{js}, z'_{js}, -1 comme $v_k^i(x)$, z_{js}^i, $z'^{\,i}_{js}$, -1^i en omettant l'indice supérieur i.

Si on ne peut réaliser les inégalités (*), alors, a fortiori, on ne peut séparer du vecteur nul, par un hyperplan fermé, l'enveloppe des points $v_k(x) \quad \|x\| < 1 \quad 1 \leq k \leq p$, et des points situés à une distance $< \delta$ d'un au moins des points z_{js}^i, $z'^{\,i}_{js}$, -1^i , et $v_k(x) \quad \|x\| < 1 \quad 1 \leq k \leq p$.
Il en résulte que 0 appartient à l'enveloppe convexe A^i définie ci-dessus ; cette enveloppe est en effet un ouvert. Dans l'espace $(E^n \times \mathbb{R})^I/\mathcal{U}$, on désigne par A l'ensemble des points dont un représentant au moins est de la forme $(x_i)_{i \in I}$ pour $x_i \in A^i$. Il n'est pas difficile de voir que A est dans l'enveloppe convexe des points situés à une distance $\leq \delta$ de l'un des points $v_k(x) \quad \|x\| \leq 1 \quad 1 \leq k \leq p$ ou de l'un des points z_{js}, z'_{js}, -1.
Soit g la forme linéaire sur $(E^n \times \mathbb{R})^I/\mathcal{U}$ qui à $(x_1, \dots, x_n, \lambda)$ associe $\sum_{j=1}^{n} g_j(x_j) + \lambda$. Par hypothèse, on a :

$$g(v_k(x)) \leq -\varepsilon$$

$$g(z_{ij}) \leq -\varepsilon$$

$$g(z'_{ij}) \leq -\varepsilon$$

$$g(-1) \leq -\varepsilon \quad \text{(en supposant } \varepsilon \leq 1\text{)}.$$

Il en résulte que pour $y \in A$, on a :

$$g(y) \leq -\varepsilon + \delta \|g\|$$

et si $\delta \|g\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $\qquad g(y) \leq -\frac{\varepsilon}{2}$.

Or $0 \in A$, contradiction.

Le théorème 4 permet par exemple de mettre en évidence la propriété duale de celle de finie-représentabilité.

Définition 6 : <u>On dit qu'un espace F est un quotient local de E si F est isométrique au quotient d'une ultrapuissance $E^I/\mathcal{U}$ de E par un sous-espace fermé</u>.

Théorème 7 : -<u>Si F est un quotient local de E, F' est finiment représentable dans E'</u>.

-<u>Si F est finiment représentable dans E, F' est un quotient local de E'</u>.

Les deux assertions du théorème découlent directement du théorème 4.

3. SOUS-ESPACES COMPLEMENTES ET u-EXTENSIONS FAIBLES.

Soit E un sous-espace complémenté de F ; il existe une condition suffisante très simple pour que F soit une u-extension faible de E.

<u>Théorème 8</u> : <u>Soit E un sous-espace complémenté de F ; si F est finiment représentable dans E alors F est une u-extension faible de E</u>.

Avant de donner la preuve de ce théorème, on va en tirer quelques conséquences. Soit $\mathcal{C}$ une classe d'espaces de Banach (comme dans l'exposé précédent) ; si,de plus, $\mathcal{C}$ est stable par isomorphisme, les deux propriétés suivantes sont équivalentes pour un espace de Banach E:

- E a une u-extension dans $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire $E \in \overline{\mathcal{C}}$)
- E a une u-extension faible dans $\mathcal{C}$.

En effet, une u-extension faible est isomorphe à une u-extension. On a alors le résultat suivant :

<u>Proposition 9</u> : <u>Soit $\mathcal{C}$ une classe d'espaces de Banach stable par ultrapuissance et isomorphisme ; E un espace de Banach ; $E \in \overline{\mathcal{C}}$ si et seulement si il existe F, $F \in \mathcal{C}$ tel que</u>

- <u>F est finiment représentable dans E</u>,
- <u>E" est isométrique à un sous-espace complémenté de F</u>.

<u>Preuve</u> : si $E \in \overline{\mathcal{C}}$, E a une u-extension H, $H \in \overline{\mathcal{C}}$; d'après la proposition 2 de l'exposé précédent, E" est isométrique à un sous-espace complémenté de H" ; or H" est isométrique à un sous-espace complémenté d'une ultrapuissance de H, soit $H^I/\mathcal{U} = F$.
D'autre part, F est finiment représentable dans H, donc dans E.
On a montré l'une des deux implications de la proposition 9 ; l'implication inverse résulte du théorème 8.

<u>Corollaire 10</u> : <u>Soit $\mathcal{C}$ une classe d'espaces de Banach stable par ultrapuissance et isomorphisme ; $\overline{\mathcal{C}}$ est stable par passage au bidual</u>.

En effet, E" est isométrique à un sous-espace complémenté d'une ultrapuissance de E.

<u>Remarques</u> : 1 - La proposition 9 n'apporte aucune information nouvelle dans le cas des espaces $\mathcal{L}^p$; en revanche, elle donne une caractérisation nouvelle semble-t-il des espaces à structure locale inconditionnelle.

2 - Le corollaire 10 a été prouvé par Lindenstrauss-Rosenthal [3] dans le cas où $\overline{\mathcal{E}}$ est la classe des espaces $\mathcal{L}^p$ et par Figiel-Johnson-Tzafriri [2] dans le cas où $\overline{\mathcal{E}}$ est la classe des espaces à structure locale inconditionnelle.

On va maintenant donner la preuve du théorème 8. Soit Q la projection de F sur E. On aura besoin du lemme suivant :

<u>Lemme 11</u> : <u>Soit A un sous-espace de dimension finie de $I - Q(F)$; pour tout n et pour tout $\delta > 0$, il existe une suite de sous-espaces de E,</u> $A_1, \dots, A_n$ <u>$1+\delta$-isomorphes à A et tels que si</u> $S_1, \dots, S_n$ <u>sont les sphères unités de</u> $A_1, \dots, A_n$ <u>respectivement, on a</u> $d(S_i, S_j) \geq \|Q\|^{-1}(1-\delta)$; $i \neq j$.

On va démontrer par récurrence sur n qu'il existe une ultrapuissance de E, $E^J/\mathcal{V}$ qui a une suite de sous-espaces $B_1, \dots, B_n$ isométriques à A et dont les sphères unités sont à des distances mutuelles $\geq \|Q\|^{-1}$. C'est ce qu'affirme l'hypothèse pour $n = 1$ puisque F se plonge isométriquement dans une ultrapuissance de E.

Soient $B_1, \dots, B_n$ isométriques à A, $B_i \subseteq E^J/\mathcal{V}$ $1 \leq i \leq n$ et tels que les sphères unités des B_i soient à des distances mutuelles $\geq \|Q\|^{-1}$. L'espace $E^J/\mathcal{V}$ est un sous-espace complémenté de $F^J/\mathcal{V}$; de plus, si $\tilde{Q}$ est la projection de $F^J/\mathcal{V}$ sur $E^J/\mathcal{V}$ (obtenue par "ultrapuissance" de Q), on a $\|\tilde{Q}\| = \|Q\|$. Il existe un sous-espace B_{n+1} du noyau de $\tilde{Q}$ isométrique à A (obtenu par ultrapuissance de A).
Enfin, si $x \in E^J/\mathcal{V}$ et si $\tilde{Q}(y) = 0$, on a :

$$\|x\| = \|\tilde{Q}(x-y)\| \leq \|\tilde{Q}\| \, \|x-y\| .$$

Par suite, si $y \in B_{n+1}$, $x \in E^J/\mathcal{V}$ et $\|y\| = \|x\| = 1$, on a $\|y-x\| \geq \|Q\|^{-1}$.
Donc, les sphères unités de B_i $1 \leq i \leq n$, et B_{n+1} sont bien à une distance $\geq \|Q\|^{-1}$. D'autre part, $B_1, \dots, B_n$, B_{n+1} sont des sous-espaces de $F^I/\mathcal{U}$ qui est finiment représentable dans E et donc se plonge dans une ultrapuissance de E.

Lemme 12 : Soit A un sous-espace de dimension finie de $I - Q\ (F)$, K un sous-ensemble compact de E ; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace B de E $1+\varepsilon$-isomorphe à A et tel que si S est la sphère unité de B, $d(K,S) \geq \frac{\|Q\|^{-1}}{2}\ (1-\varepsilon)$.

Preuve : On recouvre K par un ensemble fini de boules de diamètre $\frac{\varepsilon\,\|Q\|^{-1}}{2}$, $C_1, \dots, C_n$; en appliquant le lemme 11, on trouve des sous-espaces A_i de E, $1+\frac{\varepsilon}{2}$-isomorphes à A et dont les sphères unités S_i sont à des distances mutuelles $\geq \|Q\|^{-1}\ (1-\frac{\varepsilon}{2})$. On choisit une famille de n+1 sous-espaces. Si, pour chaque i, $d(S_i,K) < \frac{\|Q\|^{-1}}{2}(1-\varepsilon)$, alors il existe $x_i \in S_i$, $y_i \in K$ tels que

$$\|x_i - y_i\| < \frac{\|Q\|^{-1}}{2}\ (1-\varepsilon)\ .$$

Deux des n+1 points y_i appartiennent à la même boule C_k.
Donc, il existe i,j tels que

$$\|x_i - x_j\| \leq \|x_i - y_i\| + \|y_i - y_j\| + \|y_j - x_j\| < \|Q\|^{-1}\ (1-\frac{\varepsilon}{2})\ ,$$

contradiction.

On peut maintenant terminer la preuve du théorème.
Soit W un sous-espace de F de dimension finie. Soit A l'espace $I - Q\ (W)$, et soit K l'ensemble des éléments de QW de norme ≤ 2. D'après le lemme 12 on peut trouver un sous-espace B de E, $1+\varepsilon$-isomorphe à A et dont la sphère unité S est telle que $d(S,K) \geq \frac{\|Q\|^{-1}}{2}\ (1-\varepsilon)$. Soit τ un $1+\varepsilon$-isomorphisme de A sur B. On pose pour $w \in W$

$$T(w) = Q(w) + \tau(w - Q(w))\ .$$

T est l'identité sur $W \cap E$. On a :

$$\|T(w)\| \leq \left[\ \|Q\| + (1+\varepsilon)\ (1 + \|Q\|)\right]\ \|w\|\ .$$

D'autre part, si w est donné et si $y = \tau(w - Q(w))$, il vient :

- si $\|Q(w)\| \leq 2\|y\|$ puisque $d(K,S) \geq \frac{\|Q\|^{-1}}{2}(1-\varepsilon)$

$$\|T(w)\| = \|Q(w) + y\| \geq \frac{\|Q\|^{-1}}{2}(1-\varepsilon)\|y\| \geq \frac{\|Q\|^{-1}}{2}(1-\varepsilon)\frac{\|Q(w)\|}{2},$$

- si $\|Q(w)\| > 2\|y\|$

$$\|T(w)\| = \|Q(w) + y\| \geq \frac{\|Q(w)\|}{2} \geq \|y\| .$$

Dans tous les cas

$$\|T(w)\| \geq \alpha(\|y\| + \|Q(w)\|) \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{\|Q\|^{-1}}{8}(1-\varepsilon) .$$

Or $$\|y\| \geq (1+\varepsilon)^{-1}\|w - Q(w)\| .$$

D'où $$\|T(w)\| \geq \alpha(1+\varepsilon)^{-1}(\|w - Q(w)\| + \|Q(w)\|)$$

$$\geq \alpha(1+\varepsilon)^{-1}\|w\| .$$

On a ainsi montré que F est une λ-u-extension de E pour $\lambda = 8\|Q\|(2\|Q\| + 1)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Beauzamy : Séminaire Maurey-Schwartz 1973-1974, exposés XIII-XIV.

[2] T. Figiel, W.B. Johnson, L. Tzafriri : On a Banach spaces having local unconditional structures. Preprint.

[3] J. Lindenstrauss et H.P Rosenthal : The $\mathcal{L}_p$ spaces, Israel J. Math. 7 (1969), p. 325-349.
