Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

B. Maurey

Sous-espaces complémentés de L^P, d' après P. Enflo

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. nº 3, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A3_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 4 - 1 9 7 5

SOUS-ESPACES COMPLEMENTES DE L^p, D'APRES P. ENFLO

par B. MAUREY

Exposé N° III

20 Novembre 1974

Un problème classique de la théorie des espaces de Banach est de chercher à caractériser les sous-espaces complémentés d'un espace donné. On sait par exemple qu'un sous-espace de dimension infinie complémenté dans l^p est isomorphe à l^p [2]. Cela n'est pas vrai pour L^p : on voit facilement que l^p est isomorphe à un sous-espace complémenté de L^p, et pour $1 < p < \infty$, l^2 est isomorphe à un sous-espace complémenté de L^p (prendre un sous-espace de L^p engendré par des variables de Rademacher ou des variables gaussiennes indépendantes). On a cependant dans L^p le résultat suivant, dû à P.Enflo:

<u>Théorème 1</u> :Soit p tel que $1 \leq p < \infty$. Si $L^p([0,1],dt)$ est somme directe topologique de deux sous-espaces E et F, l'un des deux espaces E ou F est isomorphe à $L^p([0,1],dt)$.

Si $(\Omega,\mathcal{A},P)$ est un espace de probabilité, et $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$, nous désignerons par $E^{\mathcal{B}}$ l'opérateur d'espérance conditionnelle sur $\mathcal{B}$. Si $B \in \mathcal{A}$, nous désignerons par $L^p(B,\mathcal{B})$ (resp. $L^p_o(B,\mathcal{B})$) l'espace des fonctions $f \in L^p$ $\mathcal{B}$-mesurables, nulles en dehors de B (resp: $\mathcal{B}$-mesurables nulles en dehors de B et telles que $\int f dP = 0$.) On désignera par q l'exposant conjugué de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Nous démontrerons le théorème 1 par l'intermédiaire du résultat suivant,

<u>Théorème 2</u> : Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace de probabilité,P étant supposée diffuse. Soient T_1 et T_2 deux opérateurs linéaires continus de $L^p(\Omega,\mathcal{A},P)$ dans lui-même, avec $1 \leq p < \infty$, et $T_1 + T_2 = Id$.

Il existe un indice $i \in \{1,2\}$, un ensemble $B \in \mathcal{A}$ tel que $P(B) \geq \frac{1}{2}$ et une constante c telle que $\frac{1}{2} \leq c \leq \sup\{\|T_1\|, \|T_2\|\}$ possédant la propriété suivante :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une sous tribu $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ telle que $B \in \mathcal{C}$, et que $L^p(B,\mathcal{C})$ soit isomorphe à $L^p([0,1],dt)$, avec de plus:

1) $\forall f \in L^p_o(B,\mathcal{C})$, $\|E^{\mathcal{C}}(1_B T_i(f)) - cf\| \leq \varepsilon \|f\|$

2) Il existe un ensemble $C \in \mathcal{C}$, $C \subset B$, $P(C) > 0$ tel que :

$\forall f \in L^p(C,\mathcal{C})$, $\|E^{\mathcal{C}}(1_C T_i(f)) - cf\| \leq 3\varepsilon \|f\|$

<u>Remarque 1</u> : La propriété 1) (resp 2)) implique que la restriction de T_i à $L^p_o(B,\mathcal{C})$ (resp. $L^p(C,\mathcal{C})$) est un isomorphisme de $L^p_o(B,\mathcal{C})$ sur $T_i(L^p_o(B,\mathcal{C}))$ (resp: de $L^p(C,\mathcal{C})$ sur $T_i(L^p(C,\mathcal{C}))$.) En effet: si $f\in L^p_o(B,\mathcal{C})$:

$$(c-\varepsilon)\ \|f\| \le \|E^{\mathcal{C}} 1_B\ T_i(f)\| \le \|1_B\ T_i(f)\| \le \|T_i(f)\|$$

(même raisonnement si $f\in L^p(C,\mathcal{C})$).

Démontrons le théorème 2 : désignons par X la boule unité de $L^\infty(\Omega,\mathcal{A},P)$, munie de la topologie $\sigma(L^\infty,L^1)$. Si $A\in\mathcal{A}$, nous poserons:

$$X(A) = \{\ h\in X\ ;\ |h| = 1_A \text{ et } \int h dP = 0\ \}$$

(Autrement dit, un élément de X(A) est de la forme $1_{A_1} - 1_{A_2}$, avec

$A = A_1 \cup A_2$, $P(A_1) = P(A_2) = 1/2\ P(A)$.)

Nous munirons X(A) de la topologie induite par celle de X, et nous poserons , si S est un opérateur linéaire continu de $L^p(\Omega,\mathcal{A},P)$ dans lui-même, $1\le p<\infty$: $\tilde{Q}_S(A) = \lim\sup\{\ <S\,h,\ h>\ ;\ h\to 0,\ h\in X(A)\ \}$
(On remarquera que, P étant diffuse, 0 est toujours adhérent à X(A))

Notons que :

$$(1)\qquad \begin{cases} |\tilde{Q}_S(A)| \le \|S\|.P(A) \\ \tilde{Q}_{S_1+S_2}(A) \le \tilde{Q}_{S_1}(A) + \tilde{Q}_{S_2}(A) \end{cases}$$

La deuxième propriété est évidente. La première résulte de :

$$|<Sh,h>| \le \|S\|\ \|h\|_p\ \|h\|_q = \|S\|\ P(A)$$

Remarquons que si S est l'opérateur identique, on a $\tilde{Q}_S(A) = P(A)$.

<u>Lemme 1</u> : Pour tout $h\in L^\infty$, on a :

$$\lim\sup\{\ <S(h+k)\ ,h+k>\ ;\ k\to 0,\ k\in X(A)\ \} = <Sh\ ,\ h> + \tilde{Q}_S(A)$$

<u>Démonstration</u> : Notons que $Sh \in L^p$, donc $Sh \in L^1$, et que S étant continu de L^p dans L^p est également continu de $\sigma(L^\infty, L^1)$ dans $\sigma(L^1, L^\infty)$. Par conséquent :

$$\lim_{k \to 0} \left(< S(h), k > + < h, S(k) > \right) = 0$$

On en déduit facilement le résultat.

<u>Lemme 2</u> : Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. La somme $\sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_S(A_i)$ est une valeur d'adhérence de $< S\left(\sum_{i=1}^{n} h_i\right), \sum_{i=1}^{n} h_i >$, lorsque $h_1, \ldots, h_n$ tendent vers zéro dans X, avec $h_i \in X(A_i)$.

<u>Démonstration</u> : Il est clair que

$$\limsup_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_1 \in X(A_1)}} \left(\ldots \left(\limsup_{\substack{h_{n-1} \to 0 \\ h_{n-1} \in X(A_{n-1})}} \left(\limsup_{\substack{h_n \to 0 \\ h_n \in X(A_n)}} < S\left(\sum_{i=1}^{n} h_i\right), \sum_{i=1}^{n} h_i > \right) \right) \right) = b$$

est une valeur d'adhérence de $< S(\sum_{i=1}^{n} h_i), \sum_{i=1}^{n} h_i >$.

Par ailleurs d'après le lemme 1 :

$$\limsup_{\substack{h_n \to 0 \\ h_n \in X(A_n)}} < S\left(\sum_{i=1}^{n} h_i\right), \sum_{i=1}^{n} h_i > = < S\left(\sum_{i=1}^{n-1} h_i\right), \sum_{i=1}^{n-1} h_i > + \tilde{Q}_S(A_n),$$

d'où l'on déduit de proche en proche :

$$b = \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_S(A_i) \text{ , ce qui démontre le lemme.}$$

<u>Lemme 3</u> : Si A_1, $A_2 \in \mathcal{A}$ sont disjoints, on a :

$$\tilde{Q}_S(A_1 \cup A_2) \geq \tilde{Q}_S(A_1) + \tilde{Q}_S(A_2)$$

Si A_1 et A_2 sont disjoints, et si $h_1 \in X(A_1)$, $h_2 \in X(A_2)$,on a

$h_1+h_2 \in X(A_1 \cup A_2)$. D'après le lemme 2, $\tilde{Q}_S(A_1) + \tilde{Q}_S(A_2)$ représente une valeur d'adhérence de $\langle S(h_1+h_2), h_1+h_2 \rangle$, lorsque h_1, h_2 tendent vers zéro, alors que $\tilde{Q}_S(A_1 \cup A_2)$ représente la plus grande valeur d'adhérence de $\langle S(h), h \rangle$ lorsque h tend vers zéro dans $X(A_1 \cup A_2)$. On a donc bien l'inégalité annoncée.

Posons maintenant :

$$Q_S(A) = \inf \{ \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_S(A_i) \quad ; \quad A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \ A_i \text{ disjoints} \}$$

On peut encore définir $Q_S(A)$ de la façon suivante : si $\pi = (A_i)_{i=1,\dots n}$ est une partition finie de A, posons :

$$Q_S(A,\pi) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_S(A_i)$$

Si π_1 est une partition plus fine que π_2, ce que nous noterons $\pi_2 \leq \pi_1$, on a d'aprés le lemme 3 :

$$Q_S(A,\pi_1) \leq Q_S(A,\pi_2)$$

Le filtre $(Q_S(A,\pi))_\pi$ est donc décroissant pour l'ordre introduit sur les partitions, donc convergent quand $\pi \to \infty$ au sens de cet ordre, et on voit facilement que :

$$Q_S(A) = \lim_{\pi \to \infty} Q_S(A,\pi)$$

On déduit très simplement de cette propriété que si A_1, $A_2 \in \mathcal{A}$ sont disjoints :

$$Q_S(A_1 \cup A_2) = Q_S(A_1) + Q_S(A_2)$$

Par ailleurs, les inégalités (1) donnent :

$$(2) \quad \begin{cases} |Q_S(A)| \leq \|S\| \ P(A) \\ Q_{S_1+S_2}(A) \leq Q_{S_1}(A) + Q_{S_2}(A) \end{cases}$$

Il résulte de ce qui précède que Q_S est une mesure σ-additive (pas nécessairement positive) absolument continue par rapport à P, et plus précisément admettant une densité bornée par rapport à P :

$$Q_S = k_S P \ , \quad \text{avec} \quad |k_S| \leq \|S\| \quad \text{d'après (2).}$$

<u>Lemme 4</u> : Soient $\varepsilon > 0$ donné, $A \in \mathcal{A}$, et V un voisinage de zéro dans X. On peut trouver $h \in X(A) \cap V$ tel que $|Q_S(A) - \langle Sh, h \rangle| \leq \varepsilon$.

<u>Démonstration</u> : Par définition, on peut trouver une partition finie $(A_1, \ldots A_n)$ de A telle que

$$|Q_S(A) - \sum_{i=1}^{n} \tilde{Q}_S(A_i)| \leq \varepsilon/2$$

On applique ensuite le lemme 2.

Revenons maintenant à la situation du théorème 2 : soit T un opérateur linéaire continu de $L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans lui-même. Introduisons les mesures Q_T et Q_{1-T}. On aura d'après (2) :

$$Q_T + Q_{1-T} \geq Q_1 = P$$

En introduisant les densités $Q_T = kP$, $Q_{1-T} = k'P$, on déduit :

$$k + k' \geq 1$$

Posons $B = \{k \geq 1/2\}$, $B' = \{k' \geq 1/2\}$. On a $P(B \cup B') = 1$, donc l'un des deux ensembles a une probabilité $\geq 1/2$. Supposons par exemple que $P(B) \geq 1/2$ dans la suite. Nous noterons désormais simplement $Q(A)$ au lieu de $Q_T(A)$.

Nous allons construire sur l'ensemble B une suite $(h_n)_{n \geq 0}$ de fonctions qui sera d'une certaine façon une "reproduction" du système de Haar sur $[0,1]$ (cf. exposé 2).

On définit donc par récurrence une suite $(h_n)_{n \geq 0}$ de fonctions, nulles en dehors de B, et ne prenant que les valeurs 1, -1 et 0 de la façon suivante :

- $h_o = 1_B$

- soit $m > 0$, et soit n tel que $2^n \leq m < 2^{n+1}$

Posons $h = m-2^n$, et définissons m' par $m'=0$ si $m=1$, et pour $m > 1$:

$$m' = 2^{n-1} + \frac{h}{2} \quad \text{si } h \text{ est pair.} \quad m' = 2^{n-1} + \frac{h-1}{2} \text{ si } h \text{ est impair.}$$

Supposons que les fonctions $h_o, h_1, \ldots h_{m-1}$ soient déjà déterminées. Définissons un ensemble B_m par : $B_m = \{h_{m'} = 1\}$ si h est pair, $B_m = \{h_{m'} = -1\}$ si h est impair.

Nous demanderons que la fonction h_m vérifie les propriétés suivantes :

$$(3) \begin{cases} \text{a)} \quad h_m \in X(B_m) \\ \text{b)} \quad |\langle T(h_m), h_m\rangle - Q(B_m)| \leq \frac{\varepsilon}{3} 2^{-(m+1)} P(B_m) \\ \text{c)} \quad |\langle h_i, Th_m\rangle| \leq (\frac{\varepsilon}{3} 2^{-(m+1)} \|h_m\|_p) \cdot (2^{-(i+1)} \|h_i\|_q) \\ \quad \text{pour } i = 0,1,\ldots(m-1) \\ \text{d)} \quad |\langle h_m, Th_i\rangle| \leq (\frac{\varepsilon}{3} 2^{-(i+1)} \|h_i\|_p) \cdot (2^{-(m+1)} \|h_m\|_q) \\ \quad \text{pour } i = 0,1,\ldots(m-1) \\ \text{e)} \quad |\langle k, h_m\rangle| \leq \frac{\varepsilon}{6} 2^{-(m+1)} P(B_m) \end{cases}$$

(k étant la densité de Q par rapport à P.)

Démontrons que le choix de h_m est possible : notons tout d'abord que les conditions c,d et e signifient simplement que h_m doit appartenir à un certain voisinage de zéro V_m dans X. D'après le lemme 4, on peut trouver $h_m \in X(B_m) \cap V_m$ vérifiant la condition b) , et ceci établit la possibilité de la récurrence. On remarquera que la suite $(h_n)_{n \geq 0}$ est une suite de variables aléatoires 2 à 2 orthogonales.

Désignons par $\mathcal{B}$ la sous-tribu de $\mathcal{A}$ engendrée par la suite $(h_n)_{n \geq 0}$, et désignons par $\mathcal{B}_m$ la sous-tribu engendrée par $(h_o, h_1, \ldots h_m)$

On en déduit, par définition de l'espérance conditionnelle comme projecteur orthogonal sur $L^2(\mathcal{B}_m)$,pour $f \in L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$

$$E^{\mathcal{B}_m}(1_B f) = \sum_{i=0}^{m} < f, \frac{h_i}{\|h_i\|_2} > \frac{h_i}{\|h_i\|_2}$$

Cette formule peut encore s'écrire :

$$E^{\mathcal{B}_m}(1_B f) = \sum_{i=0}^{m} < f, \frac{h_i}{\|h_i\|_q} > \frac{h_i}{\|h_i\|_p}$$

(car $(\|h_i\|_2)^2 = \|h_i\|_q \, \|h_i\|_p = P(B_i)$) , et elle reste valable pour $f \in L^p(\Omega,\mathcal{A},P)$. On en déduit à la limite :

$$E^{\mathcal{B}}(1_B f) = \sum_{i=0}^{\infty} < f, \frac{h_i}{\|h_i\|_q} > \frac{h_i}{\|h_i\|_p}$$

Notons, si $f = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \frac{h_i}{\|h_i\|_p}$ que :

$$|\alpha_n| = \|E^{\mathcal{B}_n} f - E^{\mathcal{B}_{n-1}} f\| \leq 2\|f\|$$

<u>Lemme 5 :</u> Soit S un opérateur linéaire continu défini sur $L_o^p(B,\mathcal{B})$, à valeurs dans un espace de Banach G, et tel que :

$$\forall n \geq 1 , \quad \|S(h_n)\| \leq \varepsilon \, 2^{-(n+1)} \|h_n\|_p$$

On a alors : $\|S\| \leq \varepsilon$

<u>Démonstration</u> : Soit $f \in L_o^p(B,\mathcal{B})$. On peut écrire :

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{h_n}{\|h_n\|_p} \qquad \text{(dire que } \alpha_o = 0 \text{ équivaut à } \int f dP = 0)$$

On a :

$$\|S(f)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \left\|\frac{S(h_n)}{\|h_n\|_p}\right\| \leq 2\|f\| \, \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-(n+1)} = \varepsilon\|f\|,$$

ce qui démontre le lemme.

Définissons une fonction g par :

$g = E^{\mathcal{B}}k$ sur B , et $g = 1$ sur B^c .

Nous allons montrer que $E^{\mathcal{B}_m}g$ converge rapidement vers g . Soit $m \geq 1$. L'ensemble B_m est un atome de la tribu $\mathcal{B}_{m-1}$. Par conséquent :

$$E^{\mathcal{B}_{m-1}}(1_{B_m} k) = \frac{\int_{B_m} k dP}{P(B_m)} 1_{B_m} = \frac{Q(B_m)}{P(B_m)} 1_{B_m} = \sum_{n=0}^{m-1} < 1_{B_m} k, \frac{h_n}{\|h_n\|_q} > \frac{h_n}{\|h_n\|_p}$$

D'autre part,

$$1_{B_m} g - E^{\mathcal{B}_{m-1}}(1_{B_m} k) = 1_{B_m} [E^{\mathcal{B}}(k) - E^{\mathcal{B}_{m-1}}(k)]$$

$$= 1_{B_m} \sum_{n=m}^{\infty} < k, \frac{h_n}{\|h_n\|_q} > \frac{h_n}{\|h_n\|_p}$$

D'aprés (3)e), on a :

$$\left| < k, \frac{h_n}{\|h_n\|_q} > \frac{h_n}{\|h_n\|_p} \right| \leq \varepsilon \frac{2}{6}^{-(n+1)}$$

donc :

$$1_{B_m} \left| g - \frac{Q(B_m)}{P(B_m)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} 2^{-(m+1)},$$

d'où l'on déduit :

(4) $$\left\| gh_m - \frac{Q(B_m)}{P(B_m)} \right\| \leq \frac{\varepsilon}{3} 2^{-(m+1)} \|h_m\|_p$$

Définissons un opérateur linéaire continu S de $L^p_o(I, \mathcal{B})$ dans $L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par :

$$S(f) = E^{\mathcal{B}}(1_B T(f)) - gf$$

Soit $n \geq 1$, et cherchons une majoration de $\|S(h_n)\|$.

On a :

$$S(h_n) = \sum_{i=0}^{n-1} < Th_n, \frac{h_i}{\|h_i\|_q} > \frac{h_i}{\|h_i\|_p} + \sum_{i=n+1}^{\infty} < Th_n, \frac{h_i}{\|h_i\|_q} > \frac{h_i}{\|h_i\|_p}$$

$$+[< \frac{Th_n, h_n}{P(B_n)} > - g]\ h_n$$

Les deux premiers termes de la somme se majorent en utilisant (3)c) et d) . Pour le dernier, on a d'après (3)b) et (4) :

$$\left\| \left(\frac{<Th_n, h_n>}{P(B_n)} - g \right) h_n \right\| \leq \frac{2\varepsilon}{3}\, 2^{-(n+1)}\ \|h_n\|_p ,$$

d'où finalement :

$$\|S(h_n)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}\, 2^{-(n+1)}\ \|h_n\|_p \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-(i+1)} + \frac{2\varepsilon}{3}\, 2^{-(n+1)}\ \|h_n\|_p$$

soit

$$\|S(h_n)\| \leq \varepsilon . 2^{-(n+1)}\ \|h_n\|_p ,$$

ce qui implique $\|S\| \leq \varepsilon$ d'après le lemme 5.

On a donc obtenu jusqu'à présent :

(5) $$\forall f \in L_o^p(B,\mathcal{B}),\quad \|E^{\mathcal{B}}(1_B T(f)) - gf\| \leq \varepsilon\ \|f\|$$

La dernière étape de la démonstration, qui consiste à remplacer g par une constante, nous a été indiquée par P. Assouad. Elle est fondée sur le lemme suivant :

<u>Lemme 6</u> : Soit $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espace de probabilité, avec μ diffuse, et f une fonction μ- intégrable. Il existe une sous-tribu Y de $\mathcal{X}$, telle que $L^p(X,Y,\mu)$ soit isomorphe à $L^p([0,1],dt)$, et telle que $E^Y f$ soit une constante (nécessairement égale à $\int f d\mu$)

La démonstration utilise un théorème de Liapounov(cf [1] par exemple):si λ est une mesure σ- additive bornée et <u>diffuse</u> à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, définie sur $(X,\mathcal{X})$,l'ensemble $\{\lambda(C);\ C \subset A\}$ est un convexe fermé pour tout $A \in \mathcal{X}$.

Définissons λ par :

$$\lambda(A) = (\mu(A), \int_A f d\mu)$$

Si $A = \emptyset$, $\lambda(A) = 0$, et pour $A = X$, on trouve le point $(1, \int f d\mu)$. D'après le théorème de Liapounov, on peut trouver un ensemble A_1 tel que:

$$(\mu(A_1) \ , \int_{A_1} f d\mu) = \frac{1}{2}(1, \int f d\mu)$$

Par différence, on a également :

$$(\mu(A_1^c), \int_{A_1^c} f d\mu) = \frac{1}{2}(1, \int f d\mu)$$

On pose $A_{-1} = A_1^c$, et on utilise à nouveau le théorème de Liapounov pour trouver par récurrence une suite $A_{\varepsilon_1 \ldots, \varepsilon_n}$ de parties de X telles que

$$A_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n} = A_{\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n, 1} \cup A_{\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n, -1}$$

$$(\mu(A_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n}) \ , \int_{A_{\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n}} f d\mu) = 2^{-n}(1, \int f d\mu) \quad .$$

Désignons par Y_n la sous-tribu engendrée par la partition $(A_{\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n})$,

et par Y la sous tribu engendrée par la suite $(Y_n)_n$.

Si $x \in A_{\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n}$ on a :

$$(E^{Y_n} f)(x) = \frac{1}{\mu(A_{\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n})} \int_{A_{\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n}} f d\mu = \int f \, d\mu .$$

En passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient que $E^Y f$ est égale à la constante $\int f \, d\mu$. Pour finir, il est bien clair que $L^p(X, Y, \mu)$ est isomorphe à $L^p([0,1], dt)$.

Achevons la démonstration du théorème 2. Considérons l'espace de probabilité $(B, \tilde{\mathcal{B}}, \frac{\tilde{P}}{P(B)})$, où $\tilde{\mathcal{B}} = \{C \in \mathcal{B} ; C \subset B\}$ et où $\tilde{P}$ désigne la restriction de P à B.

D'après le lemme 6, il existe une sous-tribu $\tilde{\mathcal{C}} \subset \tilde{\mathcal{B}}$ telle que :

$$\forall C \in \tilde{\mathcal{C}} \ , \ \int_C g d\tilde{P} = c\ \tilde{P}(C) = c\ P(C) \ ,$$

avec $c = \frac{1}{P(B)} \int_B g dP$.

Rappelons que l'on avait $1/2 \leq k \leq \|T\|$ sur B, donc aussi $1/2 \leq g \leq \|T\|$ sur B, et par conséquent :

$$1/2 \leq c \leq \|T\| \ .$$

Désignons par $\mathcal{C}$ la sous-tribu de $\mathcal{B}$ engendrée par $\tilde{\mathcal{C}}$ et B^c. On aura alors

$$E^{\mathcal{C}}(1_B\, g) = c\, 1_B$$

Soit $f \in L^p_o(B,\mathcal{C})$. On a $gf = (1_B\, g)\, f$, et on déduit de (5) :

$$\|E^{\mathcal{C}}(E^{\mathcal{B}}(1_B\, T(f)) - (1_B\, g) f)\| \leq \varepsilon\ \|f\|$$

Or :

$$E^{\mathcal{C}}(E^{\mathcal{B}}(1_B\, T(f)) - (1_B\, g).f) = E^{\mathcal{C}}(1_B\, T(f)) - (c 1_B).f = E^{\mathcal{C}}(1_B\, T(f)) - cf \ ,$$

ce qui achève la démonstration du point 1) dans le théorème 2 .

Pour démontrer le point 2), choisissons un ensemble $C \in \mathcal{C}$, $C \subset B$ tel que :

$$P(C) > 0, \text{ et : } \left\| \frac{1}{P(B)}\ 1_C \right\| \leq \varepsilon/2c \ ; \ \left\| 1_C\ \frac{T(1_B)}{P(B)} \right\| \leq \varepsilon/2$$

Soit $f \in L^p(C, \mathcal{C})$. La fonction $(f - \frac{Ef}{P(B)}\ 1_B)$ (où $Ef = \int f dP$) appartient à $L^p_o(B,\mathcal{C})$, donc :

$$\|E^{\mathcal{C}} 1_B\, T(f - \frac{Ef}{P(B)}\ 1_B) - c(f - \frac{Ef}{P(B)}\ 1_B)\| \leq \varepsilon\ \|f - \frac{Ef}{P(B)}\ 1_B\|$$

Par ailleurs, on a $|Ef| \leq \|f\|$, mais aussi $\|\frac{Ef}{P(B)} 1_B\| \leq \|f\|$ (car $\frac{Ef}{P(B)} 1_B$ est l'espérance conditionnelle de f sur la tribu engendrée par B et B^c), donc en multipliant par 1_C :

$$\|E^{\mathcal{C}} 1_C T(f) - cf - E^{\mathcal{C}} 1_C T(\frac{Ef}{P(B)} 1_B) + c \frac{Ef}{P(B)} 1_C\| \leq 2\varepsilon \|f\|$$

d'où :

$$\|E^{\mathcal{C}} 1_C T(f) - cf\| \leq \|f\| \; [2\varepsilon + \|T(\frac{1_B}{P(B)}) 1_C\| + \| \frac{c 1_C}{P(B)} \|] \leq 3\varepsilon \|f\|,$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

Pour démontrer le théorème 1 à partir du théorème 2, on utilise un résultat de A. Pełczyński [2] :

<u>Proposition</u> : Soit E un sous-espace complémenté de $L^p([0,1],dt)$ (en abrégé: L^p). Si E contient un sous-espace complémenté isomorphe à L^p, l'espace E lui-même est isomorphe à L^p.

<u>Démonstration</u>: On peut écrire :

$$L^p = E \oplus F \text{ , et } E = L^p \oplus G \text{ .}$$

Notons d'abord que :

$$E = L^p \oplus G \approx (L^p \oplus L^p) \oplus G = L^p \oplus (L^p \oplus G)$$
$$= L^p \oplus E$$

($U \approx V$ signifiant U isomorphe à V) .

On a d'autre part, en notant $(E \oplus E \oplus \ldots)_p$ la p - somme d'une suite d'exemplaires de E (autrement dit l'espace $l^p(E)$)

$$L^p \approx (L^p \oplus L^p \oplus \ldots)_p \approx ((E \oplus F) \oplus (E \oplus F) \oplus \ldots)_p$$

$$\approx (E \oplus (F \oplus E) \oplus (F \oplus E) \oplus \ldots)_p$$

$$\approx E \oplus [(F \oplus E) \oplus (F \oplus E) \oplus \ldots]_p \approx E \oplus L^p \approx E ,$$

ce qui démontre la proposition.

Passons maintenant à la démonstration du théorème 1 . Supposons que $L^p = E \oplus F$, désignons par T_1 la projection de L^p sur E (parallèlement à F), et soit $T_2 = 1 - T_1$.

Posons

$$\varepsilon = \frac{1}{16 \sup (\|T_1\|, \|T_2\|)}$$

D'après le théorème 2, on aura, par exemple pour T_1 , la situation suivante : il existe une sous-tribu $\mathcal{C}$, un ensemble $C \in \mathcal{C}$, $P(C) > 0$ une constante c, $1/2 \leq c \leq \|T_1\|$ tels que :

$$\forall f \in L^p(C, \mathcal{C}) \quad \|E^{\mathcal{C}} 1_C T_1(f) - cf\| \leq \varepsilon \|f\|$$

On en déduit en particulier pour $f \in L^p(C, \mathcal{C})$:

$$\|T_1(f)\| \geq (c - \varepsilon) \|f\| \geq \frac{1}{4} \|f\|$$

De plus, $\mathcal{C}$ peut être choisie telle que $L^p(C, \mathcal{C})$ soit isomorphe à $L^p = L^p([0,1], dt)$.

Considérons le sous-espace G de E défini par :

$$G = T_1(L^p(C, \mathcal{C}).$$

D'après ce qui précède, la restriction de T_1 à $L^p(C, \mathcal{C})$ est un isomorphisme de $L^p(C, \mathcal{C})$ sur G, donc G est isomorphe à L^p.

Nous allons montrer pour finir que G est complémenté dans E. Définissons un opérateur linéaire U sur L^p par :

$$U(f) = T_1(E^{\mathcal{C}} 1_C f)$$

Il est clair que $U(L^p) \subset G$, de sorte que la restriction $\tilde{U}$ de U à est un opérateur de G dans lui-même. Nous allons voir que $\tilde{U}$ est un isomorphisme de G sur lui-même.

Soit $g \in G$. On peut écrire $g = T_1(f)$, avec $f \in L^p(C,\mathcal{C})$; On a :

$$U(g) - cg = T_1 \{E^{\mathcal{C}} 1_C T_1(f) - cf\}$$

donc :

$$\|U(g) - cg\| \leq \|T_1\| \; \|E^{\mathcal{C}} 1_C T_1(f) - cf\|$$
$$\leq \varepsilon \|T_1\| \|f\| \leq 4\varepsilon \|T_1\| \|g\| \leq \frac{\|g\|}{4} \leq \frac{c}{2} \|g\|,$$

ce qui montre que $\|\tilde{U} - c\,\mathrm{Id}_G\| \leq \frac{c}{2}$. Cela prouve que $\tilde{U}$ est une bijection de G sur G. Soit $V = (\tilde{U})^{-1}$, et posons pour $f \in L^p$:

$$\pi(f) = V \circ U(f)$$

Cet opérateur est bien défini, puisque $U(f) \in G$, il est à valeurs dans G, et $\pi(g) = g$ si $g \in G$. L'opérateur π est donc un projecteur linéaire de L^p sur G. A fortiori G est complémenté dans E (en prenant simplement la restriction de π à E). L'espace E est complémenté dans L^p, et contient un sous-espace complémenté isomorphe à L^p. On en déduit que E est isomorphe à L^p d'après la proposition, et ceci achève la démonstration.

***

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Karlin et Studden, Tchebycheff systems, Pure and applied Math. vol XV

[2] A.Pełczynski, Projections in certain Banach spaces, Studia Math.19 (1960) p.209 - 228.