Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

B. Maurey

Système de Haar (suite et fin)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. nº 2, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A2_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

SEMINAIRE MAUREY-SCHWARTZ 1974-1975

SYSTEME DE HAAR

(suite et fin)

par B. MAUREY

Exposé N° II

13 Novembre 1974

Nous allons démontrer dans cet exposé le théorème classique selon lequel le système de Haar est une base inconditionnelle de $L^p([0,1],dt)$ $1 < p < \infty$. Nous démontrerons ce résultat par des techniques de martingales. En fait, nous nous limiterons à des martingales particulières, que nous allons introduire dans un premier paragraphe.

1. Martingales T.A.P. et système de Haar.

Soient $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace de probabilité, $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$. Nous dirons qu'une martingale réelle ou banachique $(X_n)_{n \geq 0}$ (relative à la suite $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 0}$) est telle que la taille de ses accroissements est prévisible (en abrégé : martingale T.A.P.) si en posant $d_n = X_n - X_{n-1}$ pour $n \geq 1$, on a :

$$(\text{T.A.P.}) \begin{cases} \forall\ n \geq 0, \text{ la variable aléatoire} \\ \omega \to \|d_{n+1}(\omega)\| \text{ est } \mathcal{B}_n\text{-mesurable.} \end{cases}$$

Par exemple, toute martingale $(X_n)_{n \geq 0}$ définie à partir d'un arbre dans un espace de Banach (cf. exposé I) est une martingale T.A.P.. En effet, en reprenant les notations de l'exposé I :

$$d_{n+1}(\varepsilon) = x_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n+1}} - x_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n} ,$$

donc

$$\|d_{n+1}(\varepsilon)\| = \frac{1}{2} \|x_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,1} - x_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,-1}\| .$$

Par conséquent $\|d_{n+1}\|$ est constante sur chaque atome $B_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n}$ de $\mathcal{B}_n$, donc est $\mathcal{B}_n$-mesurable.

Le deuxième exemple sera construit à partir du système de Haar. Rappelons que le système de Haar $(\chi_m)_{m \geq 0}$ est une suite de fonctions sur $[0,1]$ définie de la façon suivante :

- $\chi_o = 1$
- Si m est tel que $2^n \leq m < 2^{n+1}$, et si $k = m - 2^n$

$$\chi_m = 2^{n/2} \left[1_{\left[\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right]} - 1_{\left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right]} \right] .$$

Définissons une suite croissante $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 0}$ de sous-tribus de la tribu borélienne $\mathcal{B}$ sur $[0,1]$ par :

$$\mathcal{B}_o = \{\emptyset , [0,1]\} \quad ; \quad \mathcal{B}_n = \sigma(\chi_m, \ 0 \leq m \leq n) \ ,$$

c'est-à-dire que $\mathcal{B}_n$ est la tribu engendrée par les variables aléatoires $\chi_o, \chi_1, \dots, \chi_n$. On voit immédiatement que l'ensemble $A_{n+1} = \{\chi_{m+1} \neq 0\}$ est un atome de $\mathcal{B}_n$, et que $\mathcal{B}_{m+1}$ et $\mathcal{B}_m$ diffèrent exactement en ce que l'on a découpé l'atome A_{m+1} de $\mathcal{B}_m$ en deux parties de mesure égale, $\{\chi_{m+1} < 0\}$ et $\{\chi_{m+1} \geq 0\}$, sur lesquelles les valeurs de χ_{m+1} sont opposées.

On en déduit (en désignant par P la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$):

$$E^{\mathcal{B}_m} \chi_{m+1} = \left(\frac{1}{P(A_{m+1})} \int_{A_{m+1}} \chi_{m+1} \, dP \right) 1_{A_{m+1}} = 0 \ ,$$

et d'autre part $|\chi_{m+1}| = \sqrt{2^n} . \ 1_{A_{m+1}}$ est $\mathcal{B}_m$-mesurable (n est l'entier tel que $2^n \leq m+1 < 2^{n+1}$).

Si maintenant $(x_m)_{m \geq 0}$ est une suite de réels ou de vecteurs dans un espace de Banach, posons :

$$X_n = \sum_{m=0}^{n} x_m \chi_m \ .$$

On voit que X_n est une martingale pour la suite $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 0}$.
En effet, en posant $d_n = X_n - X_{n-1}$ pour $n \geq 1$, on a :

$$E^{\mathcal{B}_n} d_{n+1} = E^{\mathcal{B}_n} x_{n+1} \chi_{n+1} = x_{n+1} E^{\mathcal{B}_n} \chi_{n+1} = 0$$

et, par ailleurs :

$$\|d_{n+1}\| = \|x_{n+1}\| \, |\chi_{n+1}| \text{ est } \mathcal{B}_n\text{-mesurable,}$$

donc $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale T.A.P..

2. Un cas particulier du théorème de Burkholder-Gundy.

Le théorème de Burkholder-Gundy [1] affirme ceci : soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une martingale réelle, et posons $d_o = X_o$, $d_n = X_n - X_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Si la martingale (X_n) est bornée dans L^p, $1 < p < \infty$, la série $\sum\limits_{n \geq 0} d_n$ converge inconditionnellement dans L^p, c'est-à-dire que $\sum\limits_{n \geq 0} \varepsilon_n d_n$ converge dans L^p pour tout choix de signes $\varepsilon_n = \pm 1$.

Nous démontrerons le théorème dans un cas particulier (qui nous suffira pour le système de Haar), à savoir le cas des martingales T.A.P.. La démonstration sera tirée de Garsia [2], et suivra les étapes suivantes :

1) Le résultat est trivial pour $p = 2$.

En effet, si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale bornée dans L^2, la suite $(d_n)_{n \geq 0}$ est une suite de vecteurs 2 à 2 orthogonaux dans L^2.
Si $m < n$:

$$E\, d_n d_m = E\, E^{\mathcal{B}_m}(d_n d_m) = E\, d_m E^{\mathcal{B}_m} d_n = 0 .$$

2) On cherche à démontrer le résultat pour $1 < p < 2$. Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une martingale bornée dans L^p, $1 < p < 2$, on cherche à la transformer pour la ramener au cas trivial $p = 2$. Or quelle est la façon naturelle de passer de $f \in L^p$ à une fonction de L^2? C'est de prendre $\frac{f}{|f|^\alpha}$, avec $\alpha = 1 - p/2$.

En première approximation, on veut raisonner ainsi : si $(X_n)_{n \geq 0}$ est bornée dans L^p, $1 < p < 2$, sa fonction maximale $X^* = \sup_{n \geq 0} |X_n|$ est dans L^p d'après le théorème de Doob (exposé 1, théorème 3).

On considèrera quelque chose comme $\frac{X_n}{(X^*)^\alpha}$. Mais ce n'est plus une martingale. Il nous faut utiliser une transformation de martingale (exposé I, p. I.8), du type $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{(X^*_{n-1})^\alpha}$, ou plutôt $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{(X^*_{n-1} + \sup_{k \leq n} |d_k|)^\alpha}$.

Pour montrer que le résultat de l'opération est essentiellement le même que $\frac{X_n}{(X^*)^\alpha}$, on utilisera un lemme du type lemme d'Abel (lemme A plus loin).

3) On redescend de 2 à p : pour cela, on utilise le lemme classique d'Abel (lemme B plus loin).

4) On obtient le cas $p > 2$ par dualité.

Lemme A : Soient $a_o, a_1, \ldots, a_n$ des vecteurs d'un espace de Banach, $0 < b_o \leq b_1 \leq \ldots \leq b_n$ et $\gamma > 1$ tels que :

$$\|a_o + a_1 + \ldots + a_k\| \leq b_k^\gamma \ , \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Alors :

$$\left\| \frac{a_o}{b_o} + \frac{a_1}{b_1} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} \right\| \leq \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ b_n^{\gamma - 1} .$$

Démonstration : Posons $S_k = a_o + a_1 + \ldots + a_k$. En utilisant la transformation d'Abel, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{b_j} = \frac{S_n}{b_n} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{b_{k-1}} - \frac{1}{b_k} \right) S_{k-1} .$$

Notons que :

$$0 \le u \le v \Rightarrow (v - u) \le \frac{1}{\gamma - 1} \frac{u^{1-\gamma} - v^{1-\gamma}}{v^{-\gamma}} .$$

(Vérification élémentaire par le théorème des accroissements finis).
On en déduit :

$$\left\| \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{b_j} \right\| \le \frac{\|S_n\|}{b_n} + \frac{1}{\gamma-1} \sum_{k=1}^{n} (b_k^{\gamma-1} - b_{k-1}^{\gamma-1}) \frac{\|S_{k-1}\|}{b_{k-1}^{\gamma}} \le \frac{\gamma}{\gamma-1} b_n^{\gamma-1} .$$

Rappelons le lemme classique d'Abel :

<u>Lemme B</u> : Soient $a_o, a_1, \dots, a_n$ des vecteurs d'un espace de Banach, et $0 \le b_o \le b_1 \le \dots \le b_n \le 1$. On a :

$$\left\| \sum_{j=0}^{n} a_j b_j \right\| \le 2 \sup_{0 \le k \le n} \| a_o + a_1 + \dots + a_k \| .$$

Passons au théorème annoncé :

<u>Théorème 1</u> : (Cas particulier du théorème de Burkholder-Gundy).
Pour tout $p \in]1,\infty[$, il existe une constante C_p telle que :
Pour toute martingale <u>réelle</u> T.A.P. $(X_n)_{n \ge 0}$ (sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $(\mathcal{B}_n)_{n \ge 0}$ quelconques), bornée dans L^p, on a :

$$\sup_{\varepsilon_n = \pm 1} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n d_n \right\|_p \le C_p \sup_n \|X_n\|_p .$$

<u>Démonstration</u> : Supposons d'abord $1 < p < 2$. Nous poserons $\alpha = 1 - p/2$, donc $0 < \alpha < 1$, et $\gamma = 1/\alpha > 1$. Par ailleurs :

$$X_n^* = \sup_{k \le n} |X_k| \quad ; \quad {}^*X_n = X_{n-1}^* + \sup_{k \le n} |d_k| .$$

Notons que X_n^* et ${}^*X_n$ sont croissants, et que ${}^*X_n$ est $\mathcal{B}_{n-1}$-mesurable, puisque (X_n) est T.A.P..

Par ailleurs $X_n^* \leq {}^*X_n \leq 3\, X_n^*$.

Posons :

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{({}^*X_k)^\alpha} .$$

Notons que $\left| \dfrac{d_k}{({}^*X_k)^\alpha} \right| \leq |\, d_k\, |^{p/2}$, donc $Y_n \in L^2$.

D'autre part, (Y_n) est une martingale transformée (cf. Exposé 1, p. I.8) puisque $({}^*X_k)_{k\geq 0}$ est une suite prévisible.

D'autre part, $|d_o + d_1 + \dots + d_k| \leq {}^*X_k = ({}^*X_k)^{\alpha\gamma}$, donc d'après le lemme A :

$$(1) \qquad |Y_n| \leq \frac{\gamma}{\gamma-1} ({}^*X_n)^{\alpha(\gamma-1)} = \frac{2}{p} ({}^*X_n)^{p/2} .$$

Soit (ε_k) une suite de signes ± 1, et posons :

$$Z_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \frac{d_k}{({}^*X_k)^\alpha} .$$

Comme nous l'avons remarqué, nous aurons :

$$(2) \qquad E\, |Z_n|^2 = E\, |Y_n|^2 \quad \text{pour tout } n.$$

Posons $Z_n^* = \sup\limits_{k \leq n} |Z_k|$. On a d'après le théorème de Doob (exposé I, théorème 3) :

$$(3) \qquad \|Z_n^*\|_2 \leq 2\, \|Z_n\|_2 \quad \text{pour tout } n.$$

Considérons la martingale transformée de (X_n) par la suite (ε_n) :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k\, d_k .$$

Nous aurons :

$$\frac{T_n}{({}^*X_n)^\alpha} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon_k d_k}{({}^*X_k)^\alpha} \frac{({}^*X_k)^\alpha}{({}^*X_n)^\alpha}$$

ce qui implique d'après le lemme B :

$$(*) \qquad |T_n| \leq 2\, Z_n^* \,.\, ({}^*X_n)^\alpha \,.$$

Appliquons l'inégalité de Hölder, avec $1/p = 1/2 + 1/q$, et les inégalités (1), (2) et (3) :

$$\begin{aligned} \|T_n\|_p &\leq 2\ \|Z_n^*\|_2 .\, (E({}^*X_n)^p)^{1/q} \\ &\leq 4\ \|Z_n\|_2 \,.\, (E({}^*X_n)^p)^{1/q} \\ &\leq \frac{8}{p}\ (E({}^*X_n)^p)^{1/p} \\ &\leq \frac{24}{p}\ (E(X_n^*)^p)^{1/p} \\ &\leq \frac{24}{(p-1)}\ \|X_n\|_p \,, \end{aligned}$$

où nous avons appliqué à nouveau pour finir le théorème de Doob, dans L^p cette fois. La martingale transformée (T_n) est bornée dans L^p, donc convergente dans L^p (exposé I, corollaire du théorème 3) et le théorème est démontré pour $1 < p \leq 2$ avec $C_p = \frac{24}{p-1}$ (constante évidemment absurde pour $p = 2$!).

Pour $p > 2$, on raisonne par dualité de la façon suivante. Soit $Y \in L^{p'}$, $Y_n = E^{\mathcal{B}_n} Y$, $e_n = Y_n - Y_{n-1}$.

On aura :
$$\begin{aligned} < \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k d_k, Y > &= \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \,(< E^{\mathcal{B}_k} X_n, Y > - < E^{\mathcal{B}_{k-1}} X_n, Y >) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \,(< X_n, E^{\mathcal{B}_k} Y > - < X_n, E^{\mathcal{B}_{k-1}} Y >) \\ &= < X_n, \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k e_k > \,. \end{aligned}$$

Alors :

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k d_k \right\|_p = \sup \left\{ \left| < \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k d_k , Y > \right| \quad ; \quad \|Y\|_{p'} \leq 1 \right\}$$

$$= \sup \left\{ \left| < X_n , \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k e_k > \right| \quad ; \quad \|Y\|_{p'} \leq 1 \right\}$$

$$\leq \|X_n\|_p \sup \left\{ \left\| \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k e_k \right\|_{p'} \quad ; \quad \|Y\|_{p'} \leq 1 \right\}$$

$$\leq C_{p'} \|X_n\|_p$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque 1 : On voit facilement que la constante optimale C_p doit vérifier $C_p = C_{p'}$ si $1/p + 1/p' = 1$.

Remarque 2 : Dans le cas $p = 1$, la démonstration précédente donne encore des informations. En effet, on utilise $p > 1$ uniquement dans la dernière inégalité. Remarquons aussi que l'inégalité (*) peut être renforcée. En effet, on majore $|T_n|$ par la suite croissante $2 Z_n^* ({}^*X_n)^\alpha$, donc en fait :

$$T_n^* \leq 2 Z_n^* ({}^*X_n)^\alpha .$$

Pour $p = 1$, on obtient donc à partir de (*) :

$$\|T^*\|_1 \leq 24 \|X^*\|_1$$, si X^* et T^* sont les fonctions maximales des martingales (X_n) et (T_n).

Remarque 3 : Il est possible de ramener l'inconditionnalité des différences des martingales les plus générales au cas du système de Haar. L'argument est fastidieux mais a le mérite de montrer que la constante d'inconditionnalité de n'importe quelle suite de différences de martingale est majorée par la constante d'inconditionnalité du système de Haar. Indiquons les grandes lignes de la démonstration :

1) Par une approximation convenable, on voit qu'il suffit de démontrer le résultat lorsque la suite des tribus $(\mathcal{B}_n)$ est une suite de tribus engendrées par des partitions finies de Ω.

2) Si $(\mathcal{B}_n)$ est une suite croissante de tribus engendrées par des partitions finies de Ω, il est possible de trouver une autre suite croissante $(\mathcal{A}_k)$ de tribus telle que :

a) $(\mathcal{B}_n)$ est une sous-suite $(\mathcal{A}_{k_n})_n$ de $(\mathcal{A}_k)_{k\geq 0}$.

b) $\mathcal{A}_{k+1}$ est obtenue à partir de $\mathcal{A}_k$ en divisant l'un des atomes de $\mathcal{A}_k$ en deux parties de mesure non nulle. (Autrement dit, $\mathcal{A}_k$ est obtenue par une partition de Ω en $(k+1)$ parties de mesure non nulle).

Dans ce cas si (X_n) est une martingale par rapport à $(\mathcal{B}_n)$, on peut définir une martingale (Y_k) par rapport à $(\mathcal{A}_k)$ en posant :

$$Y_k = E^{\mathcal{A}_k} X_n \quad \text{si } k \leq k_n .$$

Si $d_n = X_n - X_{n-1}$, $e_k = Y_k - Y_{k-1}$, on voit que $d_n = \sum_{k_{n-1} < k \leq k_n} e_k$.

La suite (d_n) est donc une suite de blocs disjoints de la suite (e_k), donc sa constante d'inconditionnalité est inférieure ou égale à celle de la suite (e_k).

3) Par un raisonnement d'approximation, on se ramène au cas d'une suite croissante $(\mathcal{A}_k)_{k\geq 0}$ comme dans 2), mais possédant de plus la propriété suivante : si $\mathcal{A}_{k+1}$ est obtenue en coupant un atome A de $\mathcal{A}_k$ en deux parties A_1 et A_2 disjointes, les rapports $\frac{P(A_1)}{P(A)}$ et $\frac{P(A_2)}{P(A)}$ sont dyadiques (c'est-à-dire de la forme $h\,2^{-n}$, h et n entiers).

4) Si $(\mathcal{A}_k)_{k\geq 0}$ est une suite croissante de tribus comme dans 3), on construit par récurrence une suite croissante de tribus $(\mathcal{A}'_k)_{k\geq 0}$ sur $[0,1]$, "isomorphe" à la suite $(\mathcal{A}_k)_{k\geq 0}$, et une suite n_k d'entiers

strictement croissante, telles que :

a) $\mathcal{A}'_k \subset \mathcal{B}_{n_k}$ (où $\mathcal{B}_n = \sigma(X_o, X_1, \dots, X_n)$)

b) $E^{\mathcal{A}'_k} f = E^{\mathcal{B}_{n_k}} f$ pour toute variable aléatoire f $\mathcal{A}'_{k+1}$-mesurable.

Indiquons le principe de la récurrence : supposons $\mathcal{A}'_o, \dots, \mathcal{A}'_k$ déterminées, ainsi que $n_o, n_1, \dots, n_{k-1}$.
Notons $A \in \mathcal{A}_k \to A' \in \mathcal{A}'_k$ l'isomorphisme entre $\mathcal{A}_k$ et $\mathcal{A}'_k$ (par isomorphisme nous entendrons que $A \to A'$ préserve les opérations d'ensembles, et que $P(A) = P(A')$, en notant également P la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.)
Supposons que $\mathcal{A}_{k+1}$ s'obtienne à partir de $\mathcal{A}_k$ en divisant un atome $A \in \mathcal{A}_k$ en deux parties disjointes A_1 et A_2, avec $\frac{P(A_1)}{P(A)} = h\ 2^{-m}$.

Choisissons n_k de façon que $\mathcal{A}'_k \subset \mathcal{B}_{n_k}$. L'ensemble A' correspondant à A peut s'écrire comme réunion d'intervalles dyadiques disjoints $D_1, \dots, D_p$, où chaque D_i est un atome de $\mathcal{B}_{n_k}$.
Si $D_i = [l\ 2^{-n}, (l+1)\ 2^{-n}[$, posons :

$$D_i^1 = \left[\frac{2^m l}{2^{n+m}} , \frac{(2^m+h)l}{2^{n+m}} \right] .$$

Posons $A'_1 = \bigcup_{i=1}^{p} D_i^1$, et $A'_2 = A' - A'_1$.

On a $\frac{P(A'_1)}{P(A')} = h\ 2^{-m}$, donc $P(A'_1) = P(A_1)$, $P(A'_2) = P(A_2)$.

D'autre part, $E^{\mathcal{B}_{n_k}} 1_{A'_1} = h\ 2^{-m}\ 1_{A'} = E^{\mathcal{A}'_k} 1_{A'_1}$

et $E^{\mathcal{B}_{n_k}} 1_{A'_2} = (1 - h\ 2^{-m})\ 1_{A'} = E^{\mathcal{A}'_k} 1_{A'_2}$.

Si on désigne par $\mathcal{A}'_{k+1}$ la tribu engendrée par $\mathcal{A}'_k$, A'_1 et A'_2, on constate facilement que b) est réalisée, d'après les deux égalités ci-dessus.

Si (X_k) est une martingale relative à $(\mathcal{A}_k)$, on en déduit par isomorphisme une martingale (X'_k) relative à $(\mathcal{A}'_k)$.
Alors :

$$d'_{k+1} = X'_{k+1} - X'_k = X'_{k+1} - E^{\mathcal{A}'_k} X'_{k+1}$$
$$= E^{\mathcal{B}_{n_{k+1}}} X'_{k+1} - E^{\mathcal{B}_{n_k}} X'_{k+1}$$

ce qui prouve que d'_{k+1} s'écrit sous la forme :

$$d'_{k+1} = \sum_{n_k < j \leq n_{k+1}} \alpha_j \chi_j \quad .$$

La suite (d'_k) est donc une suite de blocs disjoints sur le système de Haar, donc sa constante d'inconditionnalité est inférieure ou égale à celle du système de Haar.

Remarque 4 : Que peut-on dire pour les différences de martingales à valeurs dans un espace de Banach, en utilisant les méthodes précédentes ? Rien en général, car on peut montrer que si les différences des martingales à valeurs dans un espace de Banach F sont des suites inconditionnelles dans $L^p(F)$, $1 < p < \infty$, l'espace F est super-réflexif. D'ailleurs, toutes les méthodes du cas réel consistent à se ramener d'une façon ou d'une autre au cas trivial $p = 2$, alors qu'il n'y a pas de cas trivial pour les martingales banachiques.
Cependant, G. Pisier a observé le fait suivant : si on sait que les différences des martingales à valeurs dans F sont inconditionnelles dans $L^q(F)$, pour un q donné (nécessairement $1 < q < \infty$), elles seront aussi inconditionnelles dans $L^p(F)$ pour tout p tel que $1 < p < \infty$. On peut par exemple reprendre la démonstration du théorème 1, en remontant de p à q pour $1 < p < q$, et en dualisant ensuite convenablement).

A l'heure actuelle, nous savons peu de chose sur les espaces de Banach vérifiant la propriété (I) d'inconditionnalité des différences de martingales ; cette classe est stable par passage aux sous-espaces, aux quotients, au dual, à $L^p(F)$, $1 < p < \infty$ (si F vérifie (I)), par interpolation $[A_o, A_1]_{\theta,p}$ (si A_o et A_1 vérifient (I)), cette classe contient les espaces L^q, $1 < q < \infty$, et la propriété (I) est une super-propriété.

3. Propriétés du système de Haar.

Théorème 2 : Pour tout p tel que $1 < p < \infty$, la suite $(\chi_m)_{m \geq 0}$ est une base inconditionnelle de $L^p([0,1],dt)$.

Démonstration : Nous devons montrer que toute fonction $f \in L^p([0,1],dt)$ admet un développement unique $f = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \chi_j$, et que ce développement est inconditionnellement convergent. D'après le théorème 1 et le §1 (où l'on a vu que $X_n = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \chi_j$ est une martingale T.A.P.) il suffit de montrer que $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \chi_j$ converge dans L^p.

Posons $\mathcal{B}_n = \sigma(\chi_o, \chi_1, \ldots, \chi_n)$. Notons que $\mathcal{B}_\infty = \bigvee_n \mathcal{B}_n$ est la tribu borélienne de $[0,1]$ (en effet, l'algèbre $\mathcal{B} = \bigcup_n \mathcal{B}_n$ contient tous les intervalles ouverts à extrémités dyadiques, donc $\mathcal{B}$ engendre tous les ouverts de $[0,1]$).

Soit $f \in L^p$, et posons $X_n = E^{\mathcal{B}_n} f$. Il est clair que (X_n) est une martingale, bornée dans L^p, donc convergente d'après le théorème des martingales (exposé I, théorème 2 et corollaire du théorème 3) vers X, la convergence ayant lieu dans L^p et p. s.
On en déduit que $E^{\mathcal{B}_n} X = X_n$ pour tout n, soit encore $E^{\mathcal{B}_n}(X-f) = 0$ pour tout n, donc $X = f$ puisque $\bigcup_n \mathcal{B}_n$ engendre la tribu borélienne de $[0,1]$.

Pour finir, on voit facilement que $X_n - X_{n-1}$ peut s'écrire $\alpha_n \chi_n$, donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \chi_n$ converge vers f. L'unicité est claire, car si

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \chi_n \quad , \quad E^{\mathcal{B}_n} f = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \chi_k \quad ,$$

ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D.L. Burkholder et R.F. Gundy : Extrapolation and interpolation of quasi-linear operators on martingales, Acta Math. 124 (1970) p. 249-304.

[2] A. Garsia : Martingales inequalities.
