SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. PISIER

(Annexe n° 2) Un exemple concernant la super-réflexivité

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A27_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 4 - 1 9 7 5

UN EXEMPLE CONCERNANT LA SUPER-REFLEXIVITE

par G. PISIER

Annexe 2

Juin 1975

On va construire ci-dessous pour chaque $p < 2$ un espace super-réflexif, de type p-Rademacher mais qui n'est pas p-lisse (on dit qu'un espace de Banach est p-lisse si il admet une norme équivalente pour laquelle le module de lissité est $O(t^p)$ quand $t \to 0$).

Le principe est simple : on va interpoler les normes d'espaces B-convexes non super-réflexifs construites dans l'exposé XX avec une norme euclidienne convenablement choisie ; l'espace euclidien assure à lui seul que le résultat de l'interpolation est super-réflexif (voir remarque 1) mais comme les deux espaces entre lesquels on interpole sont B-convexes , le résultat est "plus B-convexe qu'il n'est super-réflexif" ce qui se traduit par un écart des indices correspondants.

Pour la définition des espaces de type p-Rademacher, voir [8] exposé III. Pour le lien avec la B-convexité : [8] exposé VII. Soit **E** un espace de Banach, nous posons :

$$p(\mathbf{E}) = \sup\{p \mid \mathbf{E} \text{ est de type p-Rademacher}\}$$

$$\pi(\mathbf{E}) = \sup\{p \mid \mathbf{E} \text{ est p-lisse}\} .$$

A) RAPPELS SUR LA SUPER REFLEXIVITE [2]

Le premier lemme est classique, il résulte de divers résultats de R. C. James caractérisant les espaces réflexifs ([2], repris dans [8] exposé XIV. prop. 2).

Lemme 1 : Si un espace de Banach B n'est pas super-réflexif, il existe, pour chaque entier n, $x_1, x_2, \dots, x_n$ éléments de B tels que :
$\forall \alpha = (\alpha_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{R}^n$

$$(1) \qquad \|\alpha\|_{S,n} \le \|\Sigma_1^n \alpha_i x_i\| \le 2\|\alpha\|_{1,n} ,$$

où l'on a posé $\|\alpha\|_{S,n} = \sup_{1 \le k \le n} |\Sigma_1^k \alpha_i|$ et $\|\alpha\|_{1,n} = \Sigma_1^n |\alpha_i|$.

Le lemme suivant peut être traité par dualité en travaillant sur l'uniforme convexité comme dans [5] prop. 2. Nous choisissons une méthode indiquée par J. Lindenstrauss.

<u>Lemme 2</u> : Soit n un entier ; notons (Ω_n, P_n) l'espace $\{-1,+1\}^n$ muni de la probabilité équirépartie. Il existe une variable aléatoire X_n^n sur (Ω_n, P_n) à valeurs dans $\ell^1_{2^n}$, telle que :

$$(2)\begin{cases} \forall\, \omega \in \Omega_n \quad : \quad \|X_n^n(\omega)\|_{S,2^n} \geq n/3 \\ \forall\, k = 1,2,\dots,n \quad : \quad \|X_k^n(\omega) - X_{k-1}^n(\omega)\|_{1,2^n} = 1 \quad ; \\ \qquad \text{et} \quad X_o^n = 0 \, , \end{cases}$$

où l'on a posé $X_o^n = \mathbf{E}\, X_n^n$ et pour $k = 1,2,\dots,n$, $X_k^n = \mathbf{E}(X_n^n | \mathcal{C}_k)$, en désignant par $\mathcal{C}_k$ la tribu engendrée par les k premières coordonnées $\omega_1, \dots, \omega_k$ sur $\{-1,+1\}^n$.

<u>Démonstration</u> : Elle se fait par récurrence :
si l'on note $e_1^n, \dots, e_{2^n}^n$ les vecteurs de base de $\ell^1_{2^n}$, on va écrire $X_n^n(\omega)$ sous la forme

$$\Sigma_1^{2^n} \alpha_j(\omega) e_j^n \quad \text{où } \alpha_j \text{ est à valeurs dans } \{-1,0,+1\},$$

$\Sigma_1^{2^n} |\alpha_j| \equiv n$; on impose de plus : $\alpha_j(\omega) = -1 \Rightarrow \alpha_{j+1}(\omega) \neq 1$ pour tout $j = 1,2,\dots,2^n$; enfin : $\|dX_k^n(\omega)\|_{1,2^n} = 1$ pour $k = 1,2,\dots,n$.

Pour n = 1 la construction est triviale. Supposons que l'on a construit une telle variable X_n^n au rang n, avec $X_n^n = \Sigma_1^{2^n} \alpha_j e_j^n$ de la forme convenable. On peut poser alors $N(\omega) = \inf\{j \,|\, \alpha_j(\omega) = -1\}$; quand ω décrit Ω_n, $N(\omega)$ décrit un ensemble d'entiers $\{k_1, \dots, k_{2^n}\}$ (indexés en ordre croissant) que l'on peut supposer distincts.

On définit $\varphi = \{1,\dots,2^n\} \to \{1,\dots,2^{n+1}\}$ par

$$\begin{cases} \varphi(j) = j & \text{si } j < k_1 \ . \\ \varphi(j) = j+\lambda & \text{si } k_\lambda \leq j < k_{\lambda+1},\ \lambda < 2^n. \\ \varphi(j) = j+2^n & \text{si } k_{2^n} \leq \lambda < 2^n \ , \end{cases}$$

et on pose $\forall\ (\omega,\omega_{n+1}) \in \Omega_n \times \{-1,+1\} = \Omega_{n+1}$:

$$X_{n+1}^{n+1}(\omega,\omega_{n+1}) = \Sigma_1^{2^n} \alpha_j(\omega)\, e_{\varphi(j)}^{n+1} + \omega_{n+1}\, e_{\varphi(N(\omega))-1}^{n+1} \ .$$

Il est clair que X_{n+1}^{n+1} est aussi de la forme convenable ; les conditions imposées aux (α_j) impliquent aisément la conclusion du lemme.
Le lemme suivant est implicite dans [6].

<u>Lemme 3</u> : Soit B un espace de Banach et $p \in [1,\infty[$. On suppose l'existence d'une constante $C > 0$ telle que, pour tout entier n, il existe une variable aléatoire X_n sur (Ω_n,P_n) à valeurs dans B vérifiant :

$$(4) \quad \begin{cases} \forall\ \omega \in \Omega_n \qquad \forall\ k = 1,2,\dots,n\ , \qquad X_o = 0 \ , \\ \|X_n(\omega)\| \geq C\, n^{1/p} \quad \text{et} \quad \|X_k(\omega) - X_{k-1}(\omega)\| \leq 1. \end{cases}$$

Alors : $\pi(B) \leq p$.

<u>Démonstration</u> : Si $\pi(B) > p$, alors pour tout $r \in]p,\pi(E)[$ il existe une constante D telle que pour toute martingale $(X_m)_{m\geq 0}$ à valeurs dans B, on a :

$$(5) \qquad \sup_{m\geq 0} \mathbf{E}\|X_m\|^r \leq D^r[\mathbf{E}\|X_o\|^r + \sum_{k\geq 1} \mathbf{E}\|X_k - X_{k-1}\|^r] \ .$$

On trouvera une démonstration de cette assertion dans l'exposé n° XV , prop.2 Si l'on écrit (5) pour la martingale qui satisfait à (4), on obtient

$$C\, n^{1/p} \leq D\, n^{1/r} \quad ;$$

ce qui est impossible quand n est assez grand si $r > p$.

Remarque 1 : Les deux lemmes ci-dessus ont un analogue dual relatif à l'uniforme convexité (voir [5] [6]).

Lemme 2^* : Soit n un entier, il existe une variable aléatoire X'_n sur (Ω_n, P_n) à valeurs dans $\ell^1_{2^n}$ telle que :

$$\forall\, \omega \in \Omega_n \qquad \|X'_n(\omega)\|_{1,2^n} \leq 1$$

$$\inf_{1\leq k\leq n} \|X'_k(\omega) - X'_{k-1}(\omega)\|_{S,2^n} \wedge \|X'_o\|_{S,2^n} \geq 1/2$$

Lemme 3^* : Soit B un espace de Banach et $q \in [1,\infty]$. On suppose l'existence d'une constante C telle que, pour tout entier n, il existe une variable aléatoire X'_n sur (Ω_n,P_n) à valeurs dans B vérifiant :

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, \omega \in \Omega_n \\ \forall\, k = 1,2,\dots,n \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \|X'_k(\omega) - X'_{k-1}(\omega)\| \geq 1 \\ \text{et } \|X'_n(\omega)\| \leq C\, n^{1/q} . \end{array}$$

Désignons par $\mathcal{K}(B)$ la borne inférieure des nombres r pour lesquels il existe sur B une norme équivalente dont le module de convexité $\varepsilon \to \delta(\varepsilon)$ vérifie $\varliminf_{\varepsilon\to 0} \delta(\varepsilon)/\varepsilon^r > 0$; alors nécessairement : $\mathcal{K}(B) \geq q$.

B) RAPPELS SUR L'INTERPOLATION [3] [4] :

Soit $\theta \in [0,1]$, p_o, p_1 deux éléments de $[1,\infty]$. Si f est une fonction mesurable à valeurs dans un Banach A, on note $\|f\|_{L^p_*(A)}$ l'intégrale $(\int_o^\infty \|f(t)\|^p \frac{dt}{t})^{1/p}$ et on désigne par $L^p_*(A)$ l'espace des f tels que $\|f\|_{L^p_*(A)} < \infty$.

Soient A_o, A_1 deux espaces de Banach plongés dans un même espace de fonctions A. On désigne par $(A_o,A_1)_{\theta,p_o,p_1}$ l'espace des $a \in A$ pour lesquels il existe une fonction mesurable $t \to u(t)$ sur $]0,\infty[$ à valeurs dans $A_o \cap A_1$ telle que (au sens de $A_o + A_1$) :

$$a = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t} \ , \ t^{-\theta}u(t) \in L_*^{p_0}(A_0) \ , t^{1-\theta}u(t) \in L_*^{p_1}(A_1).$$

On munit cet espace de la norme

$$a \to \|a\|_{\theta,p_0,p_1} = \inf\{\|t^{-\theta}u(t)\|_{L_*^{p_0}(A_0)} \vee \|t^{1-\theta}u(t)\|_{L_*^{p_1}(A_1)}\}$$

où l'infimum porte sur les représentations de a de la forme

$$a = \int_0^\infty u(t)\,\frac{dt}{t} \quad \text{dans } A_0 + A_1 \ .$$

Nous aurond besoin essentiellement de deux propriétés de l'interpolation ; la troisième est citée pour clarifier.

<u>Propriété n° 1</u> : Si un opérateur T est borné de A_0 dans B_0 d'une part et de A_1 dans B_1 d'autre part, alors T est borné de $[A_0,A_1]_{\theta,p_0,p_1}$ dans $[B_0,B_1]_{\theta,p_0,p}$. Si l'on désigne par $\|T\|_0$, $\|T\|_1$, et $\|T\|_{\theta,p_0,p_1}$ les normes correspondantes, on a :

$$\|T\|_{\theta,p_0,p_1} \leq \|T\|_0^{1-\theta}\|T\|_1^{\theta} \ .$$

Cette propriété est une conséquence facile de la définition.

<u>Propriété n° 2</u> : Soit (Ω,μ) un espace mesuré. $[L_\mu^{p_0}(A_0),\ L_\mu^{p_1}(A_1)]_{\theta,p_0,p_1}$ s'identifie à l'espace $L_\mu^p([A_0,A_1]_{\theta,p_0,p_1})$ avec $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{p_1}$.

Cette propriété est démontrée dans [3] ch. VII théoreme 1.1. Bien entendu le résultat signifie que les normes correspondantes sont équivalentes, avec des constantes ne dépendant ni de A_0 ni de A_1 .

<u>Propriété n° 3</u> : L'espace $[A_0,A_1]_{\theta,p_0,p_1}$ ne dépend en fait que de θ et de p déterminé par $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. (i.e : les divers espaces sont en fait identiques et leurs normes sont équivalentes).

Ce résultat est démontré dans [4] § 3. th.1.

<u>Notations</u> : Pour simplifier, nous notons (Ω, P) l'espace $\{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la probabilité uniforme ; nous noterons $\mathcal{A}_o$ la tribu triviale et $\forall\, n \geq 1$, $\mathcal{A}_n$ la tribu engendrée par les n premières coordonnées $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ sur Ω. On considère sur $\Omega \times \mathbb{N}$ la "tribu des prévisibles" notée $\mathcal{P}$ et définie comme suit : par définition une partie $A = \sum_{n \geq 0} A_n \times \{n\}$ de $\Omega \times \mathbb{N}$ est dans $\mathcal{P}$ si : $A_o \in \mathcal{A}_o$ et $\forall\, n \geq 1$, $A_n \in \mathcal{A}_{n-1}$. On notera m la mesure produit de P par la mesure de comptage sur $(\Omega \times \mathbb{N}, \mathcal{P})$.

Si B est un espace de Banach de type p-Rademacher, on note $R_p(B)$ la norme de l'opérateur $(x_n) \to \sum \varepsilon_n x_n$ de $\ell^p(B)$ dans $L^p(\Omega, P; B)$.

Si B est un espace de Banach p-lisse, alors ([6], et dans un cadre plus général exposé XV, prop. 2) l'opérateur de $L^p(\Omega \times \mathbb{N}, m; B)$ dans $L^p(\Omega, P; B)$ défini par :

$$\Phi \to \Phi(.,0) + \sum_{n \geq 1} \varepsilon_n(.)\, \Phi(.,n) \tag{6}$$

est borné. On note $S_p(B)$ sa norme. Dans [6] théorème 3.1, on montre que B est p-lisse si et seulement si $S_p(B) < \infty$. Les propriétés de l'interpolation ont pour conséquences : (voir l'exposé n° XIV)

<u>Lemme 4</u> : Soient A_o et A_1 deux espaces de Banach.

a) Si A_i $(i = 0,1)$ est de type p_i-Rademacher alors, si $0 < \theta < 1$ et $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_o} + \frac{\theta}{p_1}$, $[A_o, A_1]_{\theta,p}$ est de type p-Rademacher et

$$R_p([A_o, A_1]_{\theta, p_o, p_1}) \leq R_{p_o}(A_o)^{1-\theta} R_{p_1}(A_1)^{\theta} .$$

b) Si A_i $(p_i = 0.1)$ est p_i-lisse, alors si θ et p sont comme en a), $[A_o, A_1]_{\theta,p}$ est p-lisse et

$$S_p([A_o, A_1]_{\theta, p_o, p_1}) \leq S_{p_o}(A_o)^{1-\theta} S_{p_1}(A_1)^{\theta} .$$

c) On suppose que A_i $(i = 0,1)$ est q_i-lisse avec $q_o \leq p_o, q_1 \leq p_1$. Si

$0 < \theta < 1$ et $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_o} + \frac{\theta}{p_1}$ alors $[A_o, A_1]_{\theta,p_o,p_1}$ est λ-lisse avec $\frac{1}{\lambda} = \frac{1-\theta}{q_o} + \frac{\theta}{q_1}$; on a aussi :

$$S_\lambda([A_o,A_1]_{\theta,p_o,p_1}) \leq \psi(S_{q_o}(A_o),\ S_{q_1}(A_1))$$

où $\psi : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ est une fonction dépendant seulement des paramètres .

Remarque 1 : Il faut noter que si $p_o > 1$ et si $0 < \theta < 1$ alors $p > 1$ même si $p_1 = 1$. Par conséquent, il suffit que l'un des espaces A_o, A_1 soit B-convexe (resp. super-réflexif) pour que $[A_o,A_1]_{\theta,p}$, $0 < \theta < 1$, le soit aussi.

Démonstration : Les points a) et b) sont des conséquences immédiates des propriétés n° 1 et n° 2 ci-dessus, appliquées à l'opérateur intervenant dans la définition de $R_p(B)$ ou $S_p(B)$. Pour c) la situation est un peu moins simple : on note $L^p(\ell^q)(P;B)$ l'espace de Banach des éléments Φ de $L^o(\Omega \times \mathbb{N}, P;B)$ tels que $\{\mathbb{E}(\sum_{n\geq 0} \|\Phi(.,n)\|^q)^{p/q}\}^{1/p}$ est fini et on choisit bien entendu cette dernière expression comme norme dans cet espace. On constate aisément que $L^p(\ell^q)(P;B)$ s'identifie à un sous-espace de $L^p(\Omega,\mathcal{A}_\infty,P;\ell^q(B))$ sur lequel il existe une projection de norme 1 ; cette dernière s'écrit immédiatement avec les espérances conditionnelles relatives aux $\mathcal{A}_n$.

Par conséquent, on voit immédiatement (propriétés n°1 et 2) que $\Lambda = [L^{p_o}(\ell^{q_o})(P;A_o),\ L^{p_1}(\ell^{q_1})(P;A_1)]_{\theta,p_o,p_1}$ s'identifie à un sous-espace complémenté de $\mathcal{L} = L^p(\Omega,\mathcal{A}_\infty,P\ ;[\ell^{q_o}(A_o),\ell^{q_1}(A_1)]_{\theta,p_o,p_1})$. Mais on sait* que :

$$[\ell^{q_o}(A_o),\ell^{q_1}(A_1)]_{\theta,p_o,p_1} \supset \ell^\lambda([A_o,A_1]_{\theta,p_o,p_1})$$

dès que $\lambda \leq p$.

La norme dans Λ est donc majorée - à une constante près - par la norme dans l'espace $\mathcal{E} = L^p(\Omega,P\ ;\ell^\lambda([A_o,A_1]_{\theta,p_o,p_1})]$.

---

* par une variante facile de la deuxième partie de la démonstration de [3], chapitre VII, th.1.1 en se servant des inclusions $L^{p_i}(\ell^{q_i}(A_i)) \supset \ell^{q_i}(L^{p_i}(A_i))$.

Nous en venons au fait : d'après les résultats de [6] ou de l'exposé XV, l'opérateur défini par (6) est borné de

$$L^{p_i}(\ell^{q_i})(\Omega,\mathcal{P};A_i) \quad \text{dans} \quad L^{p_i}(\Omega,P;A_i) \quad ;$$

par interpolation (propriété $n^o 1$), il est borné de Λ dans (propriété 2) $\mathfrak{J} = L^p(\Omega,P;[A_o,A_1]_{\theta,p_o,p_1})$. D'après la remarque précédente, il est à fortiori borné de $\mathcal{E}$ dans $\mathfrak{J}$. Or, d'après [6] remarque 3.3 et théorème 3.1, cela assure que $[A_o,A_1]_{\theta,p_o,p_1}$ est λ-lisse.

L'existence de la fonction ψ de l'énoncé est implicite dans la démonstration ci-dessus.

C) LE RESULTAT

Nous allons utiliser les lemmes précédents dans le cas suivant : $q_o = 1$, $q_1 = 2$, $p_o = \rho$ et $p_1 = 2$, avec $\rho < 2$. D'après l'exposé XX, corollaire 6, on peut trouver (en application du lemme 1) une norme, notée $\| \ \|_{\rho,2^n}$ sur $\mathbb{R}^{2^n}$ telle que $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}^{2^n}$:

$$(7) \qquad \|\alpha\|_{S,2^n} \leq \|\alpha\|_{\rho,2^n} \leq 2\,\|\alpha\|_{1,2^n}$$

$$(8) \qquad R_\rho(J(\rho,2^n)) \leq R_\rho$$

où l'on a noté $J(\rho,2^n)$ l'espace $\mathbb{R}^{2^n}$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\rho,2^n}$ et R_ρ est une constante indépendante de n.

Dans [1] (voir aussi [7] exp. XXIV page 3) Kwapień et Pełczynski ont démontré que -si j_n désigne l'injection de $\ell^1_{2^n}$ dans $(\mathbb{R}^{2^n}, \| \ \|_{S,2^n})$, on a : $\pi_2(j_n) \leq K\,n$ où K est une constante indépendante de n. Par conséquent, par le théorème de factorisation de Pietsch, il existe une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^{2^n}$ telle que l'espace euclidien correspondant - noté E_{2^n} - vérifie :

(9) $$\|\alpha\|_{S,2^n} \leq \|\alpha\|_{\mathbf{E}_{2^n}} \leq K\, n\, \|\alpha\|_{1,2^n} .$$

On peut alors considérer sur $\mathbb{R}^{2^n}$ la norme - notée $K^{\theta}_{\rho,2^n}$ - de l'espace interpolé $[J(\rho,2^n),\mathbf{E}_{2^n}]_{\theta,p_o,p_1}$ noté lui aussi $K^{\theta}_{\rho,2^n}$.

Par la propriété n° 1, on a en combinant (7) et (9) :

(10) $$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}^{2^n}\ \|\alpha\|_{S,2^n} \leq K^{\theta}_{\rho,2^n}(\alpha) \leq 2^{1-\theta}(Kn)^{\theta}\|\alpha\|_{1,2^n} .$$

Par le lemme 4 c) :

(11) $$S_{\lambda}(K^{\theta}_{\rho},2^n) \leq \psi(1,1) \text{ avec } \frac{1}{\lambda} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} .$$

Il résulte de (8) et du lemme 4.a) :

(12) $$R_p(K^{\theta}_{\rho,2^n}) \leq (R_{\rho})^{1-\theta} \quad \text{avec } \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{\rho} + \frac{\theta}{2} .$$

Si l'on forme l'espace K^{θ}_{ρ} en posant $K^{\theta}_{\rho} = \ell^2(\{K^{\theta}_{\rho,2^n}\}_{n\geq 1})$, on a :

i) D'après (11), K^{θ}_{ρ} est λ-lisse, donc super-réflexif puisque $\lambda > 1$ à condition que $0 < \theta < 1$.

ii) D'après (12), K^{θ}_{ρ} est de type p-Rademacher.

iii) (10) nous permet d'appliquer le lemme 2 et d'obtenir $\forall\, n \geq 1$ une martingale X^n_n sur (Ω_n,P_n) à valeurs dans K^{θ}_{ρ} et telle que $\forall\, \omega \in \Omega_n$

$$\|X^n_k(\omega) - X^n_{k-1}(\omega)\|_{K^{\theta}_{\rho}} \leq 1$$

$$\|X^n_n(\omega)\| \geq 2^{\theta-1} K^{-\theta}.\, n^{1-\theta}/3 \ ;$$

cette propriété de K^{θ}_{ρ} nous assure d'après le lemme 3 que $\pi(K^{\theta}_{\rho}) \leq \frac{1}{1-\theta}$.
On a donc démontré le théorème :

<u>Théorème</u> : Soit $0 < \theta < 1$ et $1 < \rho < 2$. Il existe un espace de Banach K^{θ}_{ρ} qui est :

i) super-réflexif

ii) de type p-Rademacher avec $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{\rho} + \frac{\theta}{2}$.

iii) tel que $\pi(K_\rho^\theta) \le \frac{1}{1-\theta}$.

Par conséquent :

$$1 < \pi(K_\rho^\theta) \le \frac{1}{1-\theta} < p \le p(K_\rho^\theta)$$

dès que (13) $0 < \theta < (1 - 1/\rho)(3/2 - 1/\rho)^{-1}$.

Remarques : 1) Le théorème précédent est à rapprocher des résultats (en sens inverse) de Figiel dans l'exposé **XXIV** où il montre que $\pi(E) = p(E)$ pour tout espace E à structure locale inconditionnelle. Nous conjecturons que K_ρ^θ n'est pas finiment représentable dans un treillis de Banach super-réflexif, dès que θ vérifie (13).

2) Si un espace de Banach E satisfait la "propriété d'inconditionnalité des différences de martingales" introduite dans l'exposé II. remarque 4, alors on voit facilement que $R_p(E)$ est fini si et seulement si $S_p(E)$ l'est aussi. Par conséquent un tel espace vérifie également $\pi(E) = p(E)$. Le théorème ci-dessus montre que, pourvu que θ vérifie (13), K_ρ^θ est super-réflexif mais n'a pas la propriété d'inconditionnalité des différences de martingales.

3) On ne sait pas s'il existe des espaces non réflexifs de type 2-Rademacher ; notons que s'il en existe, la construction qui précède montre qu'il existe aussi des espaces super-réflexifs de type 2 qui ne sont pas 2-lisses (il suffit de prendre $\rho = 2$!).

4) Les lemmes 2^* et 3^* permettent de montrer que :

$$\frac{1}{\theta} \le \mathcal{K}(K_\rho^\theta) \le \frac{2}{\theta} .$$

5) Le dual $(K_\rho^\theta)^*$ est super-réflexif, de cotype p' $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$ mais $\mathcal{K}(K_\rho^{\theta^*}) > p'$ dès que θ vérifie (13).

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Kwapień et A. Pełczynski : The main triangle projection in matrix spaces and its applications. Studia Math. 34 (1970) 43-67.

[2] R. C. James : Some self dual properties of normed linear spaces. Annals of Math. Studies 69 (1972) p.159-175.

[3] J. L. Lions et J. Peetre : Sur une classe d'espaces d'interpolation. Publications mathématiques I. H. E. S. (1964) n° 19, p.5-68.

[4] J. Peetre : Sur le nombre de paramètres dans la définition de certains espaces d'interpolation. Ricerche Mat. 12 (1963) 248-261.

[5] G. Pisier : B-convexity, super-réflexivity and the three space problem. Proceedings of a conference on "Random series, convex sets and the geometry of Banach spaces". Aarhus, Octobre 1974.

[6] G. Pisier : Martingales with values in uniformly convex spaces. Israel J. Math. à paraître.

[7] Séminaire Maurey-Schwartz 1972-73 .

[8] Séminaire Maurey-Schwartz 1973-74.