

# SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. MAUREY

G. PISIER

**(Annexe n° 1) Remarques sur l'exposé d'Assouad (n° XVI)**

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1974-1975), p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=SAF\\_1974-1975\\_\\_A26\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975__A26_0)

© Séminaire analyse fonctionnelle (dit "Maurey-Schwartz")  
(École Polytechnique), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
CENTRE DE MATHÉMATIQUES  
17, rue Descartes  
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 4 - 1 9 7 5

REMARQUES SUR L'EXPOSE D'ASSOUAD  
(n° XVI)

par B MAUREY et G. PISIER



Le but des remarques ci-dessous est de montrer que les résultats d'Assouad (exp. XVI) s'étendent à une classe d'espaces plus générale que celle des espaces p-lisses : les espaces de type p-Rademacher (cf. [1] exposé III pour la définition et les commentaires usuels). D'après un contre-exemple de R. C. James [2], on sait que cette classe est strictement plus générale.

Nous conservons les notations de l'exposé d'Assouad. Nous allons montrer que les expressions

$$\mathbf{E} \sup_{1 \leq i \leq n} \|X_i\|^p \quad \text{et} \quad \sup_{1 \leq i \leq n} \mathbf{E} \|X_i\|^p$$

(avec  $X_i = \sum_{j=1}^i Y_j$ ,  $Y_j$ -écartables et de somme nulle) sont équivalentes - pour chaque p, indépendamment de n - à l'expression

$$\int \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j(t) Y_j \right\|^p dt$$

où  $(\varepsilon_j)$  désigne la suite des variables de Rademacher (ou de Bernoulli) sur  $([0,1], dt)$ . Nous poserons dans la suite

$$\xi_j = \frac{1 + \varepsilon_j}{2} .$$

Le premier lemme est trivial.

Lemme 1 : Soit Q la probabilité équirépartie sur  $\{0,1\}^n$  et pour chaque  $k=1,2,\dots,n$  soit  $Q_k$  la probabilité équirépartie sur l'ensemble  $\{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \{0,1\}^n \mid \sum_{i=1}^n \xi_i = k\}$ . On a

$$(1) \quad Q = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{2^n} Q_k \quad (\text{formule du binôme!})$$

Lemme 2 : Soit  $c > 0$ , alors

$$(2) \quad \sum_{k: \left|k - \frac{n}{2}\right| \leq c} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \geq 1 - \frac{n}{4c^2} .$$

Démonstration : Par l'inégalité de Bienaymé-Chebichev et puisque

$$\sum_{i=1}^n \xi_i(t) - n/2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t)/2 \quad :$$

$$\frac{n}{4} = \int \left| \sum_{i=1}^n \xi_i(t) - \frac{n}{2} \right|^2 dt \geq c^2 Q \{ \left| \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{n}{2} \right| > c \} \quad ,$$

d'où

$$Q \{ \left| \sum_{i=1}^n \xi_i - \frac{n}{2} \right| \leq c \} \geq 1 - \frac{n}{4c^2} \quad ,$$

ce qui s'écrit encore en utilisant (1)

$$\sum_{k: \left| k - \frac{n}{2} \right| \leq c} \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \geq 1 - \frac{n}{4c^2} \quad .$$

Lemme 3 : Soit  $(Y_1, \dots, Y_n)$  des variables écartables à valeurs dans un espace de Banach, on a :

$$(3) \int \mathbf{E} \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j(t) Y_j \right\|^p dt \geq \left(\frac{3}{4}\right) \inf_{k: \left| k - \frac{n}{2} \right| \leq \sqrt{n}} \mathbf{E} \left\| \sum_{j=1}^k Y_j \right\|^p \quad .$$

Démonstration : D'après (1) le premier membre de l'inégalité précédente vaut

$$\sum_{k=1}^n \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \int \mathbf{E} \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j Y_j \right\|^p dQ_k(\xi) \quad .$$

Posons toujours  $X_k = \sum_{j=1}^k Y_j$ . Pour chaque  $(\xi_j)$  dans  $\{0,1\}^n$ , tel que  $\sum_{j=1}^n \xi_j = k$  on a :  $\mathbf{E} \|X_k\|^p = \mathbf{E} \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j Y_j \right\|^p$ , puisque les  $Y_j$  sont écartables ;

d'où :

$$\int \mathbf{E} \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j(t) Y_j \right\|^p dt = \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \mathbf{E} \|X_k\|^p \geq \left(\frac{3}{4}\right) \inf_{k: \left| k - \frac{n}{2} \right| \leq \sqrt{n}} \mathbf{E} \|X_k\|^p \quad .$$

La dernière inégalité résulte de (2) (avec  $c = \sqrt{n}$ ).

♦ On utilise en fait seulement le fait que pour chaque  $k = 1, 2, \dots, n$  la loi de  $\sum_{\alpha=1}^k Y_{j_\alpha}$  ne dépend pas du  $k$ -uplet  $\{j_1, \dots, j_k\}$  considéré dans  $\{1, \dots, n\}$ .

Lemme 4 : Soit  $(Y_j)_{1 \leq j \leq n}$  écartables (ou seulement vérifiant  $\alpha$ ) sur les intervalles) et de somme nulle. Posant  $X_i = \sum_{j=1}^i Y_j$ , on peut écrire si  $1 \leq k < n$  :

$$(\mathbf{E} \sup_{1 \leq i \leq n} \|X_i\|^p)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} \frac{n^2}{k(n-k)} (\mathbf{E} \|X_k\|^p)^{1/p}$$

Donc si  $n > 4$  :

$$(4) \quad (\mathbf{E} \sup_{1 \leq i \leq n} \|X_i\|^p)^{1/p} \leq K_p \inf_{k: |k - \frac{n}{2}| \leq \sqrt{n}} (\mathbf{E} \|X_k\|^p)^{1/p}$$

avec  $K_p = 4p' / (1 - 2/\sqrt{5})^2$ .

Démonstration : Rappelons la propriété  $\alpha$ ) sur les intervalles :

$$\alpha) \quad \mathbf{E}(\sum_{j \in A} Y_j \mid \mathcal{Q}(B)) = \frac{\text{card } A}{\text{card } B} \sum_{j \in B} Y_j$$

pour tout  $A \subset B$  où  $A, B$  sont des intervalles d'entiers et  $\mathcal{Q}(A)$  est la tribu engendrée par  $(Y_j)_{j \notin A}$ .

Le choix de  $A = \{k+1, \dots, n\}$  et  $B = \{i+1, \dots, n\}$  nous donne, en tenant compte de  $\sum_{j=1}^n Y_j = 0$  :

$$(5) \quad \forall i \leq k \quad \mathbf{E}(X_k \mid \mathcal{Q}_i) = \frac{n-k}{n-i} X_i$$

avec  $\mathcal{Q}_i = \tau(Y_1, \dots, Y_i)$ .

Le choix de  $A = \{1, \dots, k\}$  et  $B = \{1, \dots, i\}$  nous donne

$$(6) \quad \forall i \geq k \quad \mathbf{E}(X_k \mid \mathcal{Q}'_i) = \frac{k}{i} X_i$$

avec  $\mathcal{Q}'_i = \tau(Y_{i+1}, \dots, Y_n)$ .

On déduit de (5) et (6) :

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \|X_i\| \leq \max\left\{ \sup_{i \leq k} \frac{n-i}{n-k} \|\mathbf{E}^{Q_i} X_k\|, \sup_{i \geq k} \frac{i}{k} \|\mathbf{E}^{Q'_i} X_k\| \right\}$$

soit

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \|X_i\| \leq \max \left\{ \frac{n}{n-k} \sup_{i \leq k} \mathbf{E}^{Q_i} \|X_k\|, \frac{n}{k} \sup_i \mathbf{E}^{Q'_i} \|X_k\| \right\} .$$

L'inégalité de Doob nous donne alors :

$$\left( \mathbf{E} \sup_{1 \leq i \leq n} \|X_i\|^p \right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1} \left( \mathbf{E} \|X_k\|^p \right)^{1/p} \left[ \frac{n}{n-k} + \frac{n}{k} \right]$$

ce qui est la première inégalité de l'énoncé. La seconde en résulte car si  $n > 4$  et  $\left| k - \frac{n}{2} \right| \leq \sqrt{n}$

$$\frac{n^2}{k(n-k)} \leq \frac{n^2}{\left(\frac{n}{2} - \sqrt{n}\right)^2} \leq \frac{4}{\left(1 - 2/\sqrt{5}\right)^2} .$$

Remarque 1 : 1) La formule (1) donne immédiatement que pour des variables écartables  $(Y_j)_{j \leq n}$  de somme nulle

$$\int \mathbf{E} \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j(t) Y_j \right\|^p dt = \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n}{k}}{2^n} \mathbf{E} \|X_k\|^p$$

(7)

$$\leq \sup_{1 \leq k \leq n} \mathbf{E} \|X_k\|^p .$$

Il faut donc remarquer que l'on a prouvé (dans le cas écartable de somme nulle) l'équivalence des quatre expressions intervenant dans les inégalités (3), (4) et (7) .

2) Exemple d'application : Soit  $x_1, x_2, \dots, x_n$  un  $n$ -uplet dans un espace de Banach tel que  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ . Notons  $(\Omega, P)$  l'ensemble des permutations

de  $\{1, \dots, n\}$  muni de la probabilité uniforme et posons  $Y_j(\omega) = x_{\omega(j)}$  pour tout  $j = 1, 2, \dots, n$  et toute permutation  $\omega$  de  $\Omega$ . Il existe pour tout  $p, q$  tels que  $1 < p < q < \infty$  une constante universelle  $K_{p,q}$  telle que

$$(8) \quad \left( \int \sup_{k \leq n} \left\| \sum_{j=1}^k x_{\omega(j)} \right\|^q dP(\omega) \right)^{1/q} \leq K_{p,q} \left( \int \sup_{k \leq n} \left\| \sum_{j=1}^k x_{\omega(j)} \right\|^p dP(\omega) \right)^{1/p}$$

En effet, les  $(Y_j)_{j \leq n}$  sont échangeables et d'après la remarque ci-dessus le second membre est équivalent à  $\left( \int dP(\omega) \int \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j(t) x_{\omega(j)} \right\|^p dt \right)^{1/p}$  qui est

lui-même égal à  $(\int \|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j(t) x_j\|^p dt)^{1/p}$ . L'inégalité (8) se réduit donc à une inégalité de Kahane (formulée par exemple dans [1] exp. III, page 1bis).

3) Théorème 1 : Soient  $X$  un espace de Banach de type  $p$ -Rademacher, et  $(x_n)$  une suite dans  $X$  telle que

$$a) \sum \|x_n\|^p < \infty$$

b) La suite des sommes partielles  $S_n = \sum_{i=1}^n x_i$  a une sous suite

convergente. Dans ces conditions il existe une permutation  $(x_{\omega(n)})$  de la suite  $(x_n)$  de telle sorte que la série  $\sum_n x_{\omega(n)}$  soit convergente.

La démonstration se réduit à celle d'Assouad une fois connue la remarque 2) ci-dessus. Notons que pour le "type  $\rho$ -Rademacher", il y a un énoncé analogue : nous dirons qu'un espace de Banach  $X$  est de type  $\rho$ -Rademacher - où  $\rho$  est une fonction d'Orlicz - si pour tout  $p > 0$  il existe une constante  $C_p^X$  telle que :

$$(9) \quad (\int \|\sum \varepsilon_n(t) x_n\|^p dt)^{1/p} \leq C_p^X \|(\|x_n\|)_n\|_\rho$$

pour toute suite finie  $(x_n)$  dans  $X$ , où l'on a posé :

$$\|(\|x_n\|)_n\|_\rho = \inf \{ c > 0 \mid \sum \rho(\frac{\|x_n\|}{c}) \leq 1 \} .$$

Théorème 2 : Soient  $(Y_j)_{j \leq n}$  des variables aléatoires écartables de somme nulle à valeurs dans un espace de Banach  $X$  de type  $\rho$ -Rademacher. Pour tout  $p > 1$ , on a :

$$(\mathbf{E} \sup_{i \leq n} \|X_i\|^p)^{1/p} \leq [\frac{1}{2} \cdot (\frac{4}{3})^{1/p} K_p] C_p^X (\mathbf{E} \{ \|(\|Y_j\|)_j\|_\rho^p \})^{1/p} .$$

Preuve : Combiner (4) (3) et (9).

4) Il est clair qu'en utilisant l'inégalité de Doob de "type faible", on obtient par une modification de la démonstration du lemme 4 :  
si  $1 \leq k \leq n$

$$\sup_{c>0} c \mathbf{P} \{ \sup_{1 \leq i \leq n} \|X_i\| > c \} \leq \frac{n^2}{k(n-k)} \mathbf{E} \|X_k\| .$$



donc  $\sup_{c>0} c \mathbb{P} \left\{ \sup_{1 \leq i \leq n} \|X_i\| > c \right\} \leq 4/(1 - 2/\sqrt{5})^2 \inf_{k: |k - \frac{n}{2}| \leq \sqrt{n}} \mathbb{E} \|X_k\|$

si  $n > 4$  ; à la condition que les  $Y_j$  soient de somme nulle et vérifient  $\alpha)$  sur les intervalles. Nous n'écrivons pas les généralisations évidentes au cas des espaces d'Orlicz.

Dans le cas échangeable, on a aussi :

**Théorème 3** : Soit  $X$  un espace de Banach de type  $p$ -Rademacher, et  $(Y_j)_{j \leq n}$  des variables échangeables de somme nulle à valeurs dans  $X$ , on a pour toute suite scalaire  $(a_j)_{j \leq n}$  :

$$(\mathbb{E} \sup_{i \leq n} \|\sum_1^i a_j Y_j\|^p) \leq K'_p \left( \frac{1}{n} \sum_1^n |a_j|^p \right) \sum_1^n \mathbb{E} \|Y_j\|^p$$

où  $K'_p$  est une constante ne dépendant que de  $p$  et  $X$ .

**Démonstration** : Soit  $k < n$  ; nous posons sous les hypothèses de l'énoncé :

$$\varphi_k(a_1, \dots, a_k) = (\mathbb{E} \|\sum_1^k a_j Y_j\|^p)^{1/p} \quad \text{et} \quad \varphi_k^* = (\mathbb{E} \sup_{i \leq k} \|\sum_1^i a_j Y_j\|^p)^{1/p}.$$

Soit  $(\varepsilon_j)_1^k$  une suite de nombres égaux à  $+1$  ou  $-1$ . Soit  $\sigma$  une permutation telle que dans la suite  $(\varepsilon_{\sigma(j)})_1^k$  les signes  $+$  soient rangés tous avant les signes  $-$ .

Avec les mêmes notations que pour (5), on a :

$$\forall i \leq k, \quad \sum_1^i a_j Y_j = \mathbb{E}(\sum_1^k a_j Y_j \mid \mathcal{G}_i) + \left( \frac{\sum_{i+1}^k a_j}{n-i} \right) X_i.$$

Donc par l'inégalité de Doob :

$$(10) \quad \varphi_k^*(a_1, \dots, a_k) \leq p' \varphi_k(a_1, \dots, a_k) + \frac{\sum_1^k |a_j|}{n-k} \varphi_k^*(1, \dots, 1).$$

Mais par échangeabilité  $\varphi_k(a_1, \dots, a_k) = \varphi_k(a_{\sigma_1}, \dots, a_{\sigma_k})$  et par l'inégalité triangulaire :  $\varphi_k(a_{\sigma_1}, \dots, a_{\sigma_k}) \leq 3 \varphi_k^*(\varepsilon_{\sigma_1} a_{\sigma_1}, \dots, \varepsilon_{\sigma_k} a_{\sigma_k})$  donc par (10) :

$$\varphi_k(a_1, \dots, a_k) \leq 3p' \varphi_k(\varepsilon_{\sigma_1} a_{\sigma_1}, \dots, \varepsilon_{\sigma_k} a_{\sigma_k}) + 3 \frac{\sum_1^k |a_j|}{n-k} \varphi_k^*(1, \dots, 1)$$

soit par échangeabilité  $\leq 3p' \varphi_k(\varepsilon_1 a_1, \dots, \varepsilon_k a_k) + 3 \frac{\sum_1^k |a_j|}{n-k} \varphi_k^*(1, \dots, 1).$

En reportant dans (10), on obtient finalement :

$$\varphi_k^*(a_1, \dots, a_k) \leq 3p'^2 \varphi_k(\varepsilon_1 a_1, \dots, \varepsilon_k a_k) + (3p' + 1) \frac{\sum_1^k |a_j|}{n-k} \varphi_k^*(1, \dots, 1).$$

En faisant la moyenne sur les choix de signes  $(\varepsilon_j)$ , on obtient (puisque X est de type p-Rademacher) :

$$\varphi_k^*(a_1, \dots, a_k) \leq B_p (\sum_1^k \mathbb{E} |a_j|^p \|Y_j\|^p)^{1/p} + (3p' + 1) \frac{\sum_1^k |a_j|}{n-k} \varphi_k^*(1, \dots, 1),$$

où  $B_p$  ne dépend que de X et de p.

Il est alors facile de conclure en choisissant  $k = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ , en utilisant le théorème 2 pour estimer  $\varphi_k^*(1, \dots, 1)$ , et en traitant l'intervalle  $[k+1, \dots, n]$  similairement.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] Séminaire Maurey-Schwartz 1973-74
- [2] R. C. James : A non reflexive Banach space which is uniformly non octahedral. Israel J. Math. 18 (1974) 145-155.