

# SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. STERN

## **Le problème des enveloppes**

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1974-1975), exp. n° 25, p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=SAF\\_1974-1975\\_\\_A24\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975__A24_0)

© Séminaire analyse fonctionnelle (dit "Maurey-Schwartz")  
(École Polytechnique), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE  
CENTRE DE MATHÉMATIQUES  
*17, rue Descartes*  
*75230 Paris Cedex 05*

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 4 - 1 9 7 5

LE PROBLEME DES ENVELOPPES

par J. STERN

Exposé n<sup>o</sup> XXV

28 Mai 1975



Pour la définition de la notion de finie représentabilité et ses rapports avec les ultrapuissances d'espaces de Banach, on renvoie aux exposés VII-VIII. La densité d'un espace de Banach est le plus petit cardinal  $\mathcal{K}$  tel qu'il existe un sous-ensemble dense de cardinal  $\mathcal{K}$ .

Définition 1 : On dit qu'un espace de Banach  $F$  est une enveloppe de  $E$  si

- 1)  $F$  est finiment représentable dans  $E$
- 2) Tout espace de Banach  $X$  finiment représentable dans  $E$  et dont la densité ne dépasse pas celle de  $F$  s'injecte isométriquement dans  $F$ .

Dans [2], Lindenstrauss et Ryczynski ont posé le problème suivant :

- un espace de Banach séparable admet-il en général une enveloppe séparable? On donne ici une preuve du résultat suivant ([3]).

Théorème 2 : Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un espace de Banach  $1 + \varepsilon$ -isomorphe à  $\ell^2$  et qui n'admet pas d'enveloppe séparable.

Avant de donner la démonstration de ce théorème, on va introduire une notion issue de la logique.

### § 1. POINTS DEFINISSABLES DANS LES ESPACES DE BANACH

Définition 3 : Soit  $E$  un espace de Banach,  $x$  un point de  $E$ ; on dit que  $x$  est définissable si pour toute ultrapuissance  $E^I/\mathcal{U}$  et pour toute injection isométrique  $\varphi : E \rightarrow E^I/\mathcal{U}$ , on a

$$\varphi(x) = \pm j(x).$$

(où  $j$  représente l'injection canonique de  $E$  dans  $E^I/\mathcal{U}$ ).

Remarque 4 : Un tel point est en particulier un vecteur propre pour les isométries de  $E$ .

Dans toute la suite, on note  $(x, y)$  le produit scalaire de  $\ell^2$ ,  $|x| = (x, x)^{1/2}$  la norme et on considère la base canonique de  $\ell^2$ ,  $e_1, \dots, e_n, \dots$

Proposition 5 : Il existe une norme sur  $\ell^2$ , notée  $\|x\|$ , telle que

$$1) (1-\varepsilon)\|x\| \leq |x| \leq \|x\|$$

2) Pour tout entier  $n$ ,  $e_n$  est définissable dans l'espace  $\ell^2$  muni de la norme  $\|x\|$ .

Soit  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite strictement décroissante de nombres positifs, on suppose  $\delta_0$  assez petit (on précisera plus loin).

Si  $\delta$  est un nombre réel positif et  $e$  un point de  $\ell^2$  de norme 1 on note

-  $H(e, \delta)$  l'hyperplan d'équation  $(x, e) = 1 - \delta$

-  $F(e, \delta)$  l'intersection de cet hyperplan avec la boule unité  $B$  de  $\ell^2$ ; on appelle facette un ensemble de la forme  $F(e, \delta)$ .

La norme cherchée est celle qui admet pour boule unité l'ensemble des points  $x$  de la boule unité  $B$  de  $\ell^2$  limités par les hyperplans  $H(\pm e_n, \delta_n)$ , c'est-à-dire tels que  $|(x, e_n)| \leq 1 - \delta_n$ .

On note  $E$  l'espace  $\ell^2$  muni de la nouvelle norme. Autrement dit, si on considère la réunion  $R$  des facettes  $F(\pm e_n, \delta_n)$  (qu'on peut supposer deux à deux disjointes en prenant  $\delta_0$  assez petit) et de la sphère unité  $S$  de  $\ell^2$ , on a  $\|x\| \leq 1$  si et seulement si  $\{\lambda : \lambda x \in R\} \cap ]-1, 1[ = \emptyset$ .

Par suite, puisque  $\frac{x}{|x|} \in R$  on a  $|x| \leq \|x\|$  et puisque pour tout point d'une facette  $F(\pm e_n, \delta_n)$   $|x| \geq 1 - \delta_0$  on a  $|x| \geq (1 - \delta_0)\|x\|$ . Donc si on suppose  $\delta_0 \leq \varepsilon$  il vient :

Lemme 6 :  $E$  est  $(1 - \varepsilon)^{-1}$ -isomorphe à  $\ell^2$ .

Soit maintenant  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre sur un ensemble  $I$ . On note  $\mathbb{N}^*$  le quotient de  $\mathbb{N}^I$  par la relation  $\sim$  :

$$\lambda \sim \lambda' \Leftrightarrow \{i : \lambda(i) = \lambda'(i)\} \in \mathcal{U}.$$

Si  $\lambda \in \mathbb{N}^*$   $e_\lambda$  est l'élément  $(e_{\lambda(i)})_{i \in I}$  de  $\ell^2 I / \mathcal{U}$ .

Lemme 7 : La boule unité de l'espace  $E^I / \mathcal{U}$  est l'ensemble des points de la boule unité de  $\ell^2 I / \mathcal{U}$  limités par les hyperplans  $H(\pm e_\lambda, \delta_\lambda)$   $\lambda \in \mathbb{N}^*$  où

$$\delta_\lambda = \lim_{\mathcal{U}} \delta_{\lambda(i)} .$$

Il est clair que la norme de  $E^I/\mathcal{U}$  est définie par

$$\|x\| \leq 1 \quad \text{si et seulement si}$$

$$\{\lambda : \lambda x \in R^I/\mathcal{U}\} \cap ]-1, 1[ = \emptyset .$$

Or  $R^I/\mathcal{U}$  est la réunion de la sphère  $S^I/\mathcal{U}$  (qui est la sphère unité de  $\ell^2 I/\mathcal{U}$  et des facettes  $F(\pm e_\lambda, \delta)$ . En effet si  $x_i \in R$  et  $x_i \notin S$ , il existe un indice  $\lambda(i)$  et un réel  $\varepsilon(i) = \pm 1$  tels que  $x_i \in F(\varepsilon(i) e_{\lambda(i)}, \delta_{\lambda(i)})$ . Par suite si  $\{i : \varepsilon_i = \varepsilon\} \in \mathcal{U}$  on a

$$x \in F(\varepsilon e_\lambda, \delta_\lambda)$$

Finalement la boule unité de  $E^I/\mathcal{U}$  est bien l'espace limité par la sphère  $S^I/\mathcal{U}$  et les hyperplans  $F(\pm e_\lambda, \delta_\lambda)$ .

Lemme 8 : Soit  $P$  un plan de  $E^I/\mathcal{U}$  ; alors l'intersection de la sphère unité de  $E^I/\mathcal{U}$  et de  $P$  se compose d'arcs de cercle et de segments de droite. Il y a au plus 4 segments et une infinité de points n'appartiennent à aucun des quatre segments.

Preuve : Soient  $x$  et  $x'$  deux vecteurs de  $P$ . On note  $\theta(x, x')$  l'angle de  $x$ ,  $x'$ , défini puisque  $P$  est muni d'une structure euclidienne. On remarque qu'il existe une fonction  $\beta(\delta_0)$  tendant vers 0 avec  $\delta_0$  telle que si  $x$  et  $x'$  appartiennent à des facettes distinctes de la sphère unité de  $E^I/\mathcal{U}$

$$\theta(x, x') \geq \frac{\pi}{2} - \beta(\delta_0)$$

Si donc  $\delta_0$  est assez petit un plan ne rencontre que quatre facettes au plus. La sphère unité de  $E^I/\mathcal{U} \cap P$  se compose alors des intersections de  $P$  avec des facettes qui sont des segments de droite et de points de la sphère unité de  $\ell^2 I/\mathcal{U} \cap P$  (qui forment au plus quatre arcs de cercle).

Lemme 9 : Soit  $\varphi$  une injection de  $E$  dans  $E^I/\mathcal{U}$  ; alors  $\varphi$  est une injection isométrique de  $\ell^2$  dans  $\ell^2 I/\mathcal{U}$ .

D'après ce qui précède, la norme  $\ell^2 \mathbb{I} / \mathcal{U} \cap P$  est définie dans n'importe quel plan  $P$  de  $E^{\mathbb{I}} / \mathcal{U}$  par la propriété suivante : c'est l'unique norme hilbertienne sur  $P$  dont la sphère unité a une infinité de points en commun avec la sphère unité de  $P \cap E^{\mathbb{I}} / \mathcal{U}$  (les autres normes hilbertiennes sur  $P$  ont pour sphère unité des ellipses rencontrant la sphère unité de  $P$  en un nombre fini de points). Le lemme est conséquence de cette remarque.

Lemme 10 : Soit  $\varphi$  une injection isométrique de  $E$  dans  $E^{\mathbb{I}} / \mathcal{U}$ . Alors  $\varphi(e_n) = \pm j(e_n)$  (où  $j$  est l'injection canonique de  $E$  dans  $E^{\mathbb{I}} / \mathcal{U}$ ).

Preuve : D'après le lemme 7, la sphère unité de  $E^{\mathbb{I}} / \mathcal{U}$  est formée des facettes  $F(\pm e_\lambda, \delta_\lambda)$  ;  $\lambda \in \mathbb{N}^*$  et de points de la sphère unité de  $\ell^2$ . Or puisque la suite  $\delta_n$  est strictement décroissante, pour tout élément  $\lambda$  de  $\mathbb{N}^*$  on a

- soit il existe  $n$  tel que  $\lim_{\lambda(i)} \delta_{\lambda(i)} = \delta_n$
- soit  $\lim_{\mathcal{U}} \delta_{\lambda(i)} = \inf_n \delta_n$ .

Par conséquent, pour chaque  $n$ , il n'y a que deux facettes de diamètre (euclidien)  $2\sqrt{2\delta_n - \delta_n^2}$ . Si la conclusion du lemme est fautive on note  $k$  le premier entier tel que

$$\varphi(e_k) \neq j(e_k) \quad \text{et} \quad \varphi(e_k) \neq -j(e_k).$$

Puisque  $\varphi(e_k)$  est le centre d'un segment de longueur euclidienne  $2\sqrt{2\delta_n - \delta_n^2}$  qui est inclus dans la sphère unité,  $e_k$  appartient à l'une des facettes  $F(\pm j(e_i), \delta_i)$  pour  $i < n$ . Mais ceci contredit le fait que les distances  $\|j(e_i) \pm j(e_n)\|$ ,  $i < n$ , diffèrent peu de  $\sqrt{2}$ .

## § 2. ESPACES $1 + \varepsilon$ -ISOMORPHES A $\ell^2$ ET QUI N'ADMETTENT PAS D'ENVELOPPE SEPARABLE.

Soit  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une énumération sans répétition de l'ensemble des nombres rationnels. On se donne comme précédemment une suite  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $\delta_0$  assez petit. On suppose de plus  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \delta > 0$ .

On munit  $\ell^2$  d'une nouvelle norme dont la boule unité est l'espace limité par

- la sphère unité de  $\ell^2$
- les hyperplans  $H(\pm e_n, \delta_n)$
- ceux des hyperplans  $H(\frac{\pm e_n \pm e_m}{\sqrt{2}}, \delta)$  qui sont tels que l'on ait
  - $n < m$  et  $q_n < q_m$  ou bien
  - $m < n$  et  $q_m < q_n$ .

On note  $E$  l'espace  $\ell^2$  muni de cette nouvelle norme .

Lemme 1 :  $E$  est  $(1 - \varepsilon)^{-1}$ -isomorphe à  $\ell^2$  et pour tout entier  $n$ , le point  $e_n$  est définissable dans  $E$ .

La preuve est la même que plus haut à cela près que les sphères unité des espaces  $P \cap E^I / \mathcal{U}$  peuvent comporter cette fois huit segments.

Lemme 2 : Pour chaque nombre irrationnel  $\xi$ , il existe un ultrafiltre  $\mathcal{U}_\xi$  sur  $\mathbf{N}$  et un élément  $(a_\xi)$  de  $E^{\mathbf{N}} / \mathcal{U}_\xi$  tel que

- $\|a_\xi \pm e_m\| = \sqrt{2}(1 - \delta)^{-1}$  si  $q_m < \xi$
- $\|a_\xi \pm e_m\| = \sqrt{2}$  si  $q_m > \xi$

Preuve : Soit  $\mathcal{U}_\xi$  un ultrafiltre sur  $\mathbf{N}$  tel que  $\lim_{\xi} q_n = \xi$  . Dans l'espace  $E^{\mathbf{N}} / \mathcal{U}_\xi$  on pose  $a_\xi = (e_n)_{n \in \mathbf{N}}$  . On a

$$\|a_\xi \pm e_m\| = \lim_{\mathcal{U}_\xi} \|e_n \pm e_m\| .$$

On suppose d'abord  $\xi > q_m$  alors

$$\{n : m < n \text{ et } q_m < q_n\} \in \mathcal{U}_\xi \text{ donc}$$

$$\{n : \|e_n \pm e_m\| = \sqrt{2}(1 - \delta)^{-1}\} \in \mathcal{U} .$$

soit

$$\|a_\xi \pm e_m\| = \sqrt{2}(1 - \delta)^{-1}$$



Si au contraire  $\xi < q_m$  alors  $\{n : m < n \text{ et } q_m > q_n\} \in \mathcal{U}$  et par suite

$$\|a_{\xi} + e_m\| = \sqrt{2}.$$

Il reste à voir que  $E$  n'a pas d'enveloppe séparable.

Soit  $X$  une enveloppe de  $E$ . On note  $\psi$  une injection isométrique de  $X$  dans une ultrapuissance  $E^I/\mathcal{U}$ . Si  $E_{\xi}$  est le sous-espace de  $E^I/\mathcal{U}_{\xi}$  engendré par  $E$  et  $a_{\xi}$ . Il existe une injection isométrique de  $E_{\xi}$  dans  $X$  soit  $\psi_{\xi}$ . On pose  $\varphi_{\xi} = \psi \circ \psi_{\xi}$  et

$$b_{\xi} = \varphi_{\xi}(a_{\xi}).$$

D'après le lemme 1

$$\varphi_{\xi}(e_m) = j(e_m)$$

Donc dans  $\psi(X)$

$$\|b_{\xi} + j(e_m)\| = \sqrt{2}(1 - \delta)^{-1} \quad \text{si } q_m < \xi$$

$$\|b_{\xi} + j(e_m)\| = \sqrt{2} \quad \text{si } \xi < q_m$$

Dans ces conditions, si  $\xi < q_m < \xi'$  on a

$$\|b_{\xi} - b_{\xi'}\| \geq \|b_{\xi'} - j(e_m)\| - \|b_{\xi} - j(e_m)\| \geq \sqrt{2}((1 - \delta)^{-1} - 1)$$

On a une famille  $(b_{\xi})_{\xi \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}}$  d'éléments dont les distances mutuelles sont au moins égales à un réel  $\alpha > 0$ . Donc  $X$  n'est pas séparable.

Il peut cependant exister une enveloppe qui a la puissance du continu. Plus généralement, le théorème suivant est la conséquence d'un résultat de Keisler sur les modèles  $\aleph_1$ -saturés (cf. [1]).

**Théorème 3** : On suppose l'hypothèse du continu vraie ; alors tout espace de Banach séparable et de dimension infinie admet une enveloppe de densité  $\aleph_1$ .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. C. Chang et H. J. Keisler : Model theory, North Holland, 1973.
- [2] J. Lindenstrauss et A. Pełczyński : Absolutely summing operators in  $L_p$ -spaces and their applications, *Studia Math.* 29 (1968) 275-326.
- [3] J. Stern : Le problème des enveloppes d'espaces de Banach, *Note aux C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 280 (1975), p. 797 - 799.
-