

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. MAUREY

Projections dans L^1 , d'après L. Dor

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 21, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975__A20_0>

© Séminaire analyse fonctionnelle (dit "Maurey-Schwartz")
(École Polytechnique), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 4 - 1 9 7 5

PROJECTIONS DANS L^1 , D'APRES L. DOR

par B. MAUREY

Exposé N° XXI

30 Avril 1975

Nous allons démontrer le théorème suivant, dû à L. Dor [1] :

Théorème : Il existe une constante $C > 1$ possédant la propriété suivante : soient (Ω, μ) un espace mesuré quelconque, et F un sous-espace fermé de $L^1(\Omega, \mu)$. S'il existe un espace mesuré (X, ν) tel que F soit isomorphe à $L^1(X, \nu)$, avec $d(F, L^1(X, \nu)) < C$, il existe une projection linéaire continue P de $L^1(\Omega, \mu)$ sur F .

Dor montre que $C \geq \sqrt{2}$, dans le cas complexe, et $C \geq 8/5$ dans le cas réel. Nous nous contenterons de montrer que $C \geq 4/3$, et nous renvoyons à l'article de Dor pour les estimations plus précises.

Nous noterons simplement L^1 l'espace $L^1([0, 1], dt)$.

La construction de projections dans L^1 utilise le plus souvent des variantes du lemme évident suivant :

Lemme 1 : Soient (f_1, \dots, f_n) des fonctions à supports disjoints dans L^1 (c'est-à-dire que l'ensemble $\{|f_i| > 0\} \cap \{|f_j| > 0\}$ est négligeable pour $i \neq j$). Il existe une projection linéaire de norme 1 de L^1 sur l'espace $[f_1, \dots, f_n]$ engendré par les (f_i) .

Le cas des fonctions à supports disjoints est trop restrictif pour beaucoup d'applications.

Soit $\delta \in]0, 1[$. Nous dirons que des éléments (f_1, \dots, f_n) de L^1 ont des supports disjoints à δ près s'il existe des ensembles mesurables disjoints A_1, \dots, A_n tels que :

$$\int_{A_i} |f_i(t)| dt \geq (1-\delta) \int_0^1 |f_i(t)| dt$$

Dans le cas $0 < \delta < \frac{1}{2}$, on peut encore trouver une projection de L^1 sur $[f_1, \dots, f_n]$:

Lemme 2 : (cf. par exemple [3]) Soient δ tel que $0 < \delta < \frac{1}{2}$, et (f_1, \dots, f_n) des éléments de L^1 à supports disjoints à δ -près. Il existe une projection linéaire Q de L^1 sur $[f_1, \dots, f_n]$ telle que $\|Q\| \leq (1 - 2\delta)^{-1}$.

Démonstration : Soient A_1, \dots, A_n des ensembles disjoints tels que

$$\int_{A_i} |f_i(t)| dt \geq (1-\delta) \int_0^1 |f_i(t)| dt .$$

Nous pouvons supposer que $\int_0^1 |f_i(t)| dt = 1$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$.
Posons

$$f_i^* = \chi_{A_i} f_i \quad , \quad \tilde{f}_i = \|f_i^*\|^{-1} f_i^*$$

Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ des scalaires. Nous aurons

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\Sigma \alpha_i f_i(t)| dt &\geq \int_0^1 |\Sigma \alpha_i f_i^*(t)| dt - \int_0^1 |\Sigma \alpha_i (f_i - f_i^*)(t)| dt \\ &\geq \Sigma |\alpha_i| \|f_i^*\| - \sup_i \|f_i - f_i^*\| \Sigma |\alpha_i| \\ &\geq (1-2\delta) \Sigma |\alpha_i| \end{aligned}$$

Choisissons pour chaque i une fonction h_i à support dans A_i , telle que :

$$|h_i| \leq 1 \quad \text{et} \quad \|f_i^*\| = \int_{A_i} |f_i(t)| dt = \langle f_i, h_i \rangle$$

Définissons un opérateur linéaire P de L^1 dans lui-même par :

$$Px = \Sigma \langle x, h_i \rangle \tilde{f}_i$$

On aura :

$$\begin{aligned} \|Px\| &= \Sigma |\langle x, h_i \rangle| \\ &= \sup_{|\varepsilon_i|=1} \langle x, \Sigma \varepsilon_i h_i \rangle \leq \|x\| \end{aligned}$$

Posons $F = [f_1, \dots, f_n]$ et définissons un opérateur linéaire U de F dans L^1 de la façon suivante :

$$\text{Si } x = \sum \alpha_i f_i, \quad Ux = \sum \alpha_i f_i^*$$

On a :

$$\|Ux\| \geq (1-\delta) \sum |\alpha_i| \geq (1-\delta) \|x\|$$

On a d'autre part, si $x = \sum \alpha_i f_i$:

$$\begin{aligned} \|Px - Ux\| &= \left\| \sum \langle x, h_i \rangle \tilde{f}_i - \sum \alpha_i \|f_i^*\| \tilde{f}_i \right\| \\ &= \left\| \sum \langle x - \alpha_i f_i, h_i \rangle \tilde{f}_i \right\| \\ &= \sum |\langle x - \alpha_i f_i, h_i \rangle| \\ &= \sum_i \varepsilon_i \left| \langle \sum_{j \neq i} \alpha_j f_j, h_i \rangle \right| \end{aligned}$$

pour un choix convenable de scalaires (ε_i) de module 1

$$\bullet \quad = \sum_j \alpha_j \left| \langle f_j, \sum_{i \neq j} \varepsilon_i h_i \rangle \right| \leq \delta \sum |\alpha_i| \leq \frac{\delta}{1-\delta} \|Ux\|$$

On a donc pour $x \in F$:

$$\|Px\| \geq \|Ux\| - \|Px - Ux\| \geq \frac{1-2\delta}{1-\delta} \|Ux\| \geq (1-2\delta) \|x\|$$

Ceci prouve que la restriction $P|_F$ de P à F est inversible, avec

$\|P|_F^{-1}\| \leq (1-2\delta)^{-1}$. Pour trouver la projection Q voulue, il suffit de poser :

$$Q = P|_F^{-1} \circ P$$

et on a bien $\|Q\| \leq (1-2\delta)^{-1}$

Le lemme suivant est fondamental pour la démonstration. Il caractérise les familles de fonctions à supports disjoints à δ près :

Lemme 3 : Soient $(f_1, \dots, f_n) \in L^1$ avec $\int |f_i(t)| dt = 1$, et $0 < \delta < 1$.

Pour que les fonctions (f_1, \dots, f_n) soient à supports disjoints à δ -près, il

faut et il suffit que :

$$(*) \quad \forall (\alpha_i) \quad \int_0^1 \max_i |\alpha_i f_i(t)| dt \geq (1-\delta) \sum |\alpha_i|$$

Démonstration : Il est évident que des fonctions à supports disjoints à δ près vérifient la propriété (*). Pour démontrer la réciproque, on peut tout d'abord remarquer que seuls les modules $|f_i|$ interviennent. On peut donc supposer $f_i \geq 0$ pour tout i , et les scalaires réels. Considérons dans $L^1(\mathcal{L}_n^\infty)$ l'ensemble :

$$C = \{ (\alpha_1 f_1, \dots, \alpha_n f_n) ; \alpha_i \geq 0, \sum \alpha_i = 1 \}$$

Cet ensemble est convexe, et l'hypothèse (*) signifie exactement que C est disjoint de la boule ouverte de rayon $(1-\delta)$ de $L^1(\mathcal{L}_n^\infty)$.

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe un élément $g = (g_1, \dots, g_n) \in L^\infty(\mathcal{L}_n^1)$ tel que :

$$\|g\| \leq 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum |g_i(t)| \leq 1 \quad \text{p.p.}$$

et $\langle g, f \rangle \geq 1-\delta$ pour tout $f \in C$, ce qui implique (et équivaut à) :

$$(1) \quad \int g_i(t) f_i(t) dt \geq 1-\delta, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Il est clair que l'on peut supposer $g_i \geq 0$. On peut aussi supposer que $\sum g_i(t) = 1$ p.p. (Sinon, on peut augmenter l'une des g_i , ce qui ne fait qu'améliorer (1)).

Posons maintenant :

$$K = \{ g = (g_1, \dots, g_n) \in L^\infty(\mathcal{L}_n^1) ; g_i \geq 0, \sum g_i = 1 \text{ p.p.}$$

$$\text{et } \int g_i(t) f_i(t) dt \geq 1-\delta, \quad i = 1, 2, \dots, n \}$$

L'ensemble K est non vide d'après le raisonnement précédent. On voit de plus qu'il est convexe et compact pour $\sigma(L^\infty(\mathcal{L}_n^1), L^1(\mathcal{L}_n^\infty))$.

Nous allons montrer que :

Sous-lemme : Si $g = (g_1, \dots, g_n)$ est un point extrémal de K , il existe des ensembles mesurables disjoints A_1, \dots, A_n tels que $g_i = \chi_{A_i}$.

Notons $P(A)$ la mesure d'une partie A de $[0,1]$. Nous devons montrer que $P\{g_i \in \{0,1\}\} = 1$ pour tout i . Sinon :

$$\exists i, \quad P(0 < g_i < 1) > 0$$

Notons que puisque $\sum g_i = 1$, on a :

$$(0 < g_i < 1) \subset \bigcup_{j \neq i} (0 < g_j < 1)$$

Par conséquent :

$$\exists j \neq i \quad P(0 < g_i \text{ et } g_j < 1) > 0$$

On en déduit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$P(\varepsilon \leq g_i \text{ et } g_j \leq 1 - \varepsilon) > 0$$

Posons $X = (\varepsilon \leq g_i \text{ et } g_j \leq 1 - \varepsilon)$. La mesure de Lebesgue étant diffuse, on peut trouver une fonction mesurable bornée k telle que :

- 1) $k \neq 0$, $|k| \leq 1$, et $k = 0$ sur X^c
- 2) $\langle k, f_i \rangle = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$

(Si une telle k n'existait pas, les $(\chi_X f_i)$ seraient totales dans $L^1(X)$, ce qui est impossible).

Considérons :

$$g^* = (g_1, g_2, \dots, g_i + \varepsilon k, \dots, g_j - \varepsilon k, \dots, g_n)$$

$$g^{**} = (g_1, g_2, \dots, g_i - \varepsilon k, \dots, g_j + \varepsilon k, \dots, g_n)$$

On voit facilement que $g^*, g^{**} \in K$, et $g = \frac{1}{2}(g^* + g^{**})$, ce qui démontre le

sous-lemme. Le lemme 3 en résulte immédiatement : l'ensemble K étant convexe compact non vide possède des points extrémaux.

Le point crucial de la démonstration de Dor est de prouver le théorème lorsque $L^1(\Omega, \mu) = L^1$ et $L^1(X, \nu) = \ell_n^1$. Il suffit pour cela de montrer que si (f_1, \dots, f_n) sont des éléments de L^1 tels que $d(\ell_n^1, [f_1, \dots, f_n]) < C$, ces éléments sont à supports disjoints à δ -près pour un $\delta \in]0, 1/2[$. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 4 : Soit $\varepsilon \in]0, 1/2[$ et soient $(f_1, \dots, f_n) \in L^1$ tels que $\int |f_i(t)| dt = 1$ pour tout i et

$$\forall (\alpha_i) \quad \int |\sum \alpha_i f_i(t)| \geq (1-\varepsilon) \sum |\alpha_i|$$

On a alors :

$$\forall (\alpha_i) \quad \int \max_i |\alpha_i f_i(t)| dt \geq (1-2\varepsilon) \sum |\alpha_i|$$

Démonstration : Soient $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ des variables de Bernoulli indépendantes.

On a :

$$\begin{aligned} \forall (\alpha_i) \quad (1-\varepsilon) \sum |\alpha_i| &= (1-\varepsilon) \int \sum |\alpha_i \varepsilon_i(s)| ds \\ &\leq \int |\sum \alpha_i \varepsilon_i(s) f_i(t)| dt ds \\ &\leq \int dt \left(\int |\sum \alpha_i \varepsilon_i(s) f_i(t)|^2 ds \right)^{1/2} \\ &= \int (\sum |\alpha_i f_i(t)|^2)^{1/2} dt \end{aligned}$$

Si (x_i) est une suite de scalaires, on a :

$$(\sum |x_i|^2)^{1/2} \leq (\max_i |x_i| \cdot \sum |x_i|)^{1/2} \leq \frac{1}{2} (\max_i |x_i| + \sum |x_i|)$$

On aura donc :

$$(1-\varepsilon) \sum |\alpha_i| \leq \frac{1}{2} \left[\int \sum |\alpha_i f_i(t)| dt + \int \max_i |\alpha_i f_i(t)| dt \right],$$

d'où

$$\int \max_i |\alpha_i f_i(t)| dt \geq (1-2\varepsilon) \sum |\alpha_i|,$$

et le lemme est démontré.

Remarque : C'est dans ce lemme que nous ne suivons pas les calculs plus précis de Dor. La démonstration ci-dessus est fondée sur une inégalité du type :

$$(**) \quad \int |\sum \alpha_i \varepsilon_i(s)| ds \leq \theta \max_i |\alpha_i| + (1-\theta) \sum |\alpha_i|, \quad 0 < \theta < 1,$$

qui conduit à

$$\int \max |\alpha_i f_i(t)| dt \geq (1 - \frac{\varepsilon}{\theta}) \sum |\alpha_i|$$

Il faut donc chercher le plus grand θ possible tel que l'inégalité (**)
soit satisfaite. Pour cette partie nous renvoyons le lecteur à l'article de
Dor, qui fournit $\theta \geq (1+1/\sqrt{2})^{-1}$ dans le cas complexe, et $\theta = 3/4$ dans le
cas réel.

Passons maintenant à la démonstration du théorème. Elle se fera
en plusieurs étapes :

A - Soit $F \subset L^1$ avec $d(F, \ell_n^1) = \lambda < \frac{4}{3}$. On peut alors trouver dans F n élé-
ments (f_1, \dots, f_n) tels que $\int |f_i(t)| dt = 1$ et :

$$\forall (\alpha_i) \quad \int |\sum \alpha_i f_i(t)| dt \geq \frac{1}{\lambda} \sum |\alpha_i|$$

D'après les lemmes 3 et 4, les fonctions (f_i) ont des supports
disjoints à δ près, avec :

$$\delta = 2(1 - \frac{1}{\lambda}) < \frac{1}{2}$$

D'après le lemme 2, on peut trouver une projection linéaire P
de L^1 sur F , de norme $\leq C(\lambda) = (1-4(1-1/\lambda))^{-1}$.

B - Supposons que $L^1(\Omega, \mu) = \ell_m^1$, et que $F \subset \ell_m^1$ et tel que $d(F, \ell_n^1) = \lambda < \frac{4}{3}$.
On peut plonger isométriquement ℓ_m^1 dans L^1 . D'après A, il existe une pro-
jection de L^1 sur F , donc a fortiori de ℓ_m^1 sur F , de norme $\leq C(\lambda)$.

C - Soit (Ω, μ) un espace mesuré quelconque, et $F \subset L^1(\Omega, \mu)$, avec $d(F, \ell_n^1) = \lambda < 4/3$.

D'après un raisonnement standard (celui qui prouve que L^1 est un espace \mathcal{L}^1), on peut trouver pour tout $\alpha > 0$ un sous-espace \tilde{F} de $L^1(\Omega, \mu)$, tel que \tilde{F} soit contenu dans un sous-espace G engendré par un nombre fini de fonctions à supports disjoints et tel qu'il existe un opérateur U de $L^1(\Omega, \mu)$ dans lui-même, avec :

$$\|U\| \leq 1 + \alpha$$

$$U(\tilde{F}) = F$$

et $U|_{\tilde{F}}$ est inversible, avec $\|U|_{\tilde{F}}^{-1}\| \leq 1 + \alpha$

(cf. par exemple [2], exposés XXIV et XXV)

L'espace G est alors isométrique à un ℓ_m^1 et il existe une projection Q de norme 1 de $L^1(\Omega, \mu)$ sur G d'après le lemme 1. On a $\tilde{F} \subset \ell_m^1$ et $d(\tilde{F}, \ell_n^1) \leq (1 + \alpha)\lambda$, donc il existe une projection \tilde{P} de G sur \tilde{F} , de norme $\leq C((1 + \alpha)\lambda)$.

L'opérateur $P = U \circ \tilde{P} \circ Q \circ U|_{\tilde{F}}^{-1}$ est alors une projection de $L^1(\Omega, \mu)$ sur F , telle que $\|P\| \leq (1 + \alpha)^2 C((1 + \alpha)\lambda)$. Ceci étant possible pour tout $\alpha > 0$ tel que $(1 + \alpha)\lambda < 4/3$, on en déduit par compacité une projection de norme $\leq C(\lambda)$.

D - Supposons maintenant que (Ω, μ) et (X, ν) sont deux espaces mesurés quelconques, et que $F \subset L^1(\Omega, \mu)$ est tel que $d(F, L^1(X, \nu)) = \lambda < 4/3$. Soit T un isomorphisme de $L^1(X, \nu)$ sur F , tel que

$$\|T\| \|T^{-1}\| \leq \lambda + \varepsilon < 4/3$$

On peut considérer $L^1(X, \nu)$ comme l'adhérence $\overline{\bigcup_{i \in I} G_i}$ d'une famille filtrante croissante de sous-espaces de dimension finie isomorphes à des $\ell_{m_i}^1$.

On a alors $F = \overline{\bigcup_{i \in I} F_i}$, avec $d(F_i, \ell_{m_i}^1) \leq \lambda + \varepsilon$.

D'après C, il existe une projection Q_i de $L^1(\Omega, \mu)$ sur F_i , de norme $\leq C(\lambda + \varepsilon)$.

Soit \mathcal{U} un ultrafiltre tendant vers l'infini sur I, et posons pour $x \in L^1(\Omega, \mu)$:

$$Rx = \lim_{\mathcal{U}} Q_i(x)$$

la limite étant prise dans $\sigma(F'', F')$. Si $x \in \bigcup_{i \in I} F_i$, on a $Rx = x$, et R étant

continue, on a $Rx = x$ sur F. Pour finir, on sait qu'il existe une projection de norme 1 de $(L^1(X, \nu))''$ sur $L^1(X, \nu)$. Il existe donc une projection S de norme $\leq \lambda + \varepsilon$ de F'' sur F, et on prendra finalement :

$$P = S \circ R$$

ce qui achève la démonstration.

Questions : On ne connaît pas d'exemple de sous-espace de L^1 isomorphe à ℓ^1 ou L^1 , qui ne soit pas complété. Il est donc possible que $C = +\infty$ dans le théorème.

Au contraire pour $1 < p < 4/3$ on sait d'après [4] qu'il existe des sous-espaces de L^p isomorphes à ℓ^p et non-complétés. Par contre, dans ce cas on ne sait pas s'il existe une constante $C > 1$ telle que si $F \subset L^p$, $d(F, \ell^p) < C$ implique que F est complété. Cela est néanmoins connu dans le cas isométrique : un sous-espace de L^p , isométrique à ℓ^p ou L^p , est complété.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. Dor : On projections in L^1 , à paraître.
- [2] Séminaire Maurey-Schwartz 1973-1974.
- [3] H.P. Rosenthal : On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach space theory, *Studia Math.* 37 (1970) 13-36.
- [4] H.P. Rosenthal : On the subspaces of L^p ($p > 2$) spanned by sequences of independent random variables, *Israel J. Math.* 8 (1970) 273-303.