Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

J. Farahat

Exemples d'espaces b-convexes non réflexifs, d'après James et Lindenstrauss

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. nº 20, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A19_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHEMATIQUES

17, rue Descartes

75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y   S C H W A R T Z   1 9 7 4 - 1 9 7 5

EXEMPLES D'ESPACES B-CONVEXES NON REFLEXIFS D'APRES JAMES ET LINDENSTRAUSS

par J. FARAHAT

Exposé N^{o} XX

23 Avril 1975

Dans [1] pour chaque $\rho \in]1 ; \infty[$ est construit un espace $J\rho$ qui est non réflexif et uniformément non octahédral, c'est-à-dire, en appelant $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes :

$$\forall\, x_1 ; x_2 ; x_3 \in J_\rho \qquad \int \Big\| \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i x_i \Big\| \, dP(\varepsilon) \leq \lambda_1(\rho) \sup_{1 \leq i \leq 3} \|x_i\|$$

avec $\forall\, \rho \in]1 ; \infty[\qquad \lambda_1(\rho) < 3$

Pour des raisons diverses il est intéressant de considérer au lieu de (x_1, x_2, x_3) des suites finies $(x_1 ; \dots ; x_k)$ dans $J\rho$ et d'obtenir des informations sur $\int \| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \| \, dP(\varepsilon)$. Nous reproduisons pour cela la méthode de [2].

1) Définition de $[\![\ ]\!]$.

Nous dirons qu'un élément $x = (x(n)) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ (identifié à l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ à support fini) est une somme de "bosses" si x est un multiple d'une fonction indicatrice d'un sous-ensemble de $\mathbb{N}$.
Le nombre de bosses $p(x)$ dans x est défini comme la moitié de la variation de la fonction indicatrice :

$$p(x) = \frac{1}{2 \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n)|} \ \Sigma \ |x(0)| + |x(1) - x(0)| + \dots + |x(n+1) - x(n)| + \dots$$

si $\sup |x(n)| \neq 0$.

L'altitude $h(x)$ de x est définie par $h(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n)|$ si $\sup |x(n)| \neq 0$.

(Pour des raisons de commodité , on considèrera $x = (0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ comme somme d'un nombre nul de bosses d'altitude quelconque). Nous définissons maintenant sur $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ la fonctionnelle $[\![\ ]\!]$ par :

$$[\![x]\!]^\rho = \inf\Big(\sum_{j=1}^{m} p(x_j) \Big[\Big(\sum_{\ell=j}^{m} h(x_\ell) \Big)^\rho - \Big(\sum_{\ell=j+1}^{m} h(x_\ell) \Big)^\rho \Big] \Big)^{1/\rho}$$

où l'infimum porte sur les suites $x_1, \ldots, x_m$ vérifiant :

$$x = \sum_{\ell=1}^{m} x_\ell$$

et chaque x_ℓ est une somme de $p(x_\ell)$ bosses d'altitude $h(x_\ell)$.

<u>Lemme 1</u> : 1°) $[\![x]\!] \geq \sup_{i \in \mathbb{N}} |x(i)|$

2°) $[\![\lambda x]\!] = |\lambda| \, [\![x]\!]$

3°) $[\![U^n]\!] = 1$ où U^n est la fonction indicatrice de $\{1,2,\ldots,n\}$

En effet, en remarquant que la fonction : $h \to (a+h)^\rho - (b+h)^\rho$ avec $a \geq b \geq 0$ et $h \geq 0$ est croissante, on voit que l'expression de $[\![x]\!]^\rho$ ne peut que diminuer si l'on retire de la représentation $x = \sum_{j=1}^{n} x_j$ tous les termes vérifiant $p(x_j) = 0$.

On peut donc supposer que $p(x_j) \geq 1$ pour tout j.
En remplaçant $p(x_j)$ par 1, on obtient :

$$[\![x]\!] \geq \sum_{\ell=1}^{m} h(x_\ell) \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\ell=1}^{m} |x_\ell(n)| \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \Big| \sum_{\ell=1}^{m} x_\ell(n) \Big| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n)|$$

d'où 1°) est vérifié.

2°) et 3°) sont triviaux.

2) <u>Définition de $J\rho$</u>.

La norme sur $J\rho$ est définie par :

$$\|x\| = \inf \Big\{ \sum_{k=1}^{n} [\![x^k]\!] \; : \; x = \sum_{k=1}^{m} x^k \Big\} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$$

(voir par exemple [3] pour vérifier que c'est une norme) et J_ρ est défini comme étant le complété de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ pour cette norme.

Clairement la norme de $J\rho$ vérifie :

1°) $\|x\| \geq \sup_{i \in \mathbb{N}} |x(i)|$

2°) $\|U^n\| = 1$

et il résulte de [4] que l'espace $J\rho$ n'est pas réflexif.

Lemme 2 : Il existe une constante $K\rho$ telle que :

$\forall\ x_1, \dots, x_k$ dans $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ tels que $[\![x_i]\!] = 1$ pour $i = 1, \dots, k$

$$\int \| \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i \| \, dP(\varepsilon) \leq K\rho \, k^{1/2 + 1/2\rho} \, (\log k)^{1/2\rho'}$$

(où $1/\rho + 1/\rho' = 1$)

Pour alléger les notations nous laisserons au lecteur le soin de vérifier à l'aide d'arguments d'approximations convenables que l'on peut supposer les altitudes $h(x_j^i)$ des vecteurs x_j^i rationnelles et que la valeur

$$[\![x_i]\!]^\rho = \sum_{j=1}^{m} p(x_i^j) \left[\left(\sum_{\ell=j}^{m} h(x_i^\ell) \right)^\rho - \left(\sum_{\ell=j+1}^{m} h(x_i^\ell) \right)^\rho \right]$$

est effectivement atteinte pour cette représentation.

Alors en remarquant que l'expression de $[\![x_i]\!]^\rho$

$$[\![x_i]\!]^\rho = \sum_{j=1}^{m} p(x_i^j) \left[\left(\sum_{\ell=j}^{m} h(x_i^\ell) \right)^\rho - \left(\sum_{\ell=j+1}^{m} h(x_i^\ell) \right)^\rho \right]$$

où $x_i = \sum_{j=1}^{m} x_i^j$ ne change pas de valeur si l'on remplace le vecteur $x_i^{j_o}$ par λ fois le vecteur $\dfrac{x_i^{j_o}}{\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{N}$; c'est-à-dire si l'on remplace la représentation $x_i = \sum_{j=1}^{m} x_i^j$ par la représentation

$$x_i = \sum_{j=1}^{m+\lambda-1} x_i'^j \qquad \text{où} \qquad x_i'^j = x_i^j \quad \text{si } j < j_o$$

$$x_i'^j = x_i^{j-\lambda+1} \quad \text{si } j \geq j_o+\lambda$$

$$x_i'^j = \frac{x_i^{j_o}}{\lambda} \quad \text{si } j \leq j_o < j_o+\lambda$$

on voit que l'on peut supposer que dans la représentation $x_i = \sum_{j=1}^{m_i} x_i^j$ on a

$$\forall\, i,i' \quad \forall\, j,j' \qquad h(x_i^j) = h(x_{i'}^{j'}) = \frac{1}{N}$$

Si l'on remarque de plus que la valeur de l'expression $[\![x_i]\!]^\rho$ ne change pas si l'on ajoute dans la représentation $x_i = \sum_{j=1}^{m_i} x_i^j$ le vecteur nul un certain nombre de fois au début, c'est-à-dire si l'on remplace la représentation $x_i = \sum_{j=1}^{m_i} x_i^j$ par la représentation

$$x_i = \sum_{j=1}^{m_i+s} x_i'^j \qquad \text{où} \qquad x_i'^1 = \dots = x_i'^s = \vec{0}$$

$$x_i'^j = x_i^{j-s} \quad \text{pour } j > s \ ;$$

en le comptabilisant dans le calcul de $[\![x_i]\!]^\rho$ comme un vecteur comportant 0 bosse d'altitude 1/N , on voit que l'on peut supposer :

$$1 = [\![x_i]\!]^\rho = \frac{1}{N^\rho} \sum_{j=1}^{m} p(x_i^j)\ [(m-j+1)^\rho - (m-j)^\rho]$$

où $x_i = \sum_{j=1}^{m} x_i^j$; x_i^j est somme de $p(x_i^j)$ bosses d'altitude 1/N, et m ne dépend pas de i.

Posons $U_j = (m-j+1)^\rho - (m-j)^\rho$ et $\Phi_j^\varepsilon = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i^j$.

Nous avons donc $\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i^j = \sum_{j=1}^{m} \Phi_j^\varepsilon$.

Fixons j.

On peut découper $\mathbb{N}$ en $m_j \leq 2(\sum_{i=j}^{k} p(x_i^j))$ intervalles disjoints de façon que $x_i^j(n)$, $i \in \{1 ; \dots ; k\}$; soit constant quand n décrit l'un de ces intervalles et soit nul quand n n'est dans aucun de ces intervalles.

En effet, chaque $x_i^j(n)$, $i \in \{1,\dots,k\}$ change de valeur exactement $2p(x_i^j)$ fois.

Soient $I_{1,j},\dots,I_{mj,j}$ de tels intervalles.

On voit facilement que Φ_j^ε est étagée sur $\{I_{(1,j)},\dots,I_{(mj,j)}\}$ et prend des valeurs comprises entre $-\frac{k}{N}$ et $\frac{k}{N}$, et est nul en dehors de $\bigcup_{\ell=1}^{m_j} I_{\ell,j}$.

On va réécrire Φ_j^ε. On pose

$$\Phi_{j\alpha}^\varepsilon = \frac{1}{N}\, 1_{\{N\Phi_j^\varepsilon \geq \alpha\}} \qquad \text{si } \alpha \in \{1,\dots,k\}$$

$$\Phi_{j\alpha}^\varepsilon = -\frac{1}{N}\, 1_{\{N\Phi_j^\varepsilon \leq \alpha\}} \qquad \text{si } \alpha \in \{-1,\dots,-k\}$$

On a

$$\Phi_j^\varepsilon = \sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha\neq 0}}^{\alpha=+k} \Phi_{j\alpha}^\varepsilon$$

<u>Lemme 3</u> :

$$\sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha\neq 0}}^{\alpha=+k} E\, p(\Phi_{j\alpha}^\varepsilon) \leq \sum_{i=1}^{k} p(x_i^j)$$

En effet,

$$\operatorname{var} \sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha\neq 0}}^{\alpha=+k} \Phi_{j\alpha}^\varepsilon = \operatorname{var} \sum_{\alpha=1}^{k} \Phi_{j\alpha}^\varepsilon + \operatorname{var} \sum_{\alpha=-1}^{\alpha=-k} \Phi_{j\alpha}^\varepsilon$$

(car $\operatorname{var} f = \operatorname{var} f^+ + \operatorname{var} f^-$).

De plus, il suffit de remarquer que si

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \Phi_{j\alpha}^\varepsilon(n) = \frac{p}{N} \qquad p \in \{0,\dots,k\}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \Phi^{\varepsilon}_{j\alpha}(n+1) = \frac{q}{N} \qquad q \in \{0, \dots, k\}$$

on a

$$\Phi^{\varepsilon}_{j\alpha}(n) = \frac{1}{N} \qquad \text{pour } 0 < \alpha \leq p$$

$$\Phi^{\varepsilon}_{j\alpha}(n) = 0 \qquad \text{pour } \alpha > p$$

$$\Phi^{\varepsilon}_{j\alpha}(n+1) = \frac{1}{N} \qquad \text{pour } 0 < \alpha \leq q$$

$$\Phi^{\varepsilon}_{j\alpha}(n+1) = 0 \qquad \text{pour } \alpha > q$$

d'où

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \left|\Phi^{\varepsilon}_{j\alpha}(n) - \Phi^{\varepsilon}_{j\alpha}(n+1)\right| = \left|\sum_{\alpha=1}^{k} \Phi^{\varepsilon}_{j\alpha}(n) - \sum_{\alpha=1}^{k} \Phi^{\varepsilon}_{j\alpha}(n+1)\right| = \frac{|p-q|}{N}$$

ce qui nous donne

$$\sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha\neq 0}}^{\alpha=+k} \operatorname{var} \Phi^{\varepsilon}_{j\alpha} = \operatorname{var} \sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha\neq 0}}^{\alpha=+k} \Phi^{\varepsilon}_{j\alpha}$$

On obtient donc

$$\sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha\neq 0}}^{\alpha=+k} p(\Phi^{\varepsilon}_{j\alpha}) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha\neq 0}}^{\alpha=+k} \operatorname{var} \Phi^{\varepsilon}_{j\alpha}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{var} \sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha\neq 0}}^{\alpha=+k} \Phi^{\varepsilon}_{j\alpha}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{var} \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x^j_i$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \operatorname{var} x^j_i$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} p(x^j_i)$$

D'où le résultat annoncé : $\displaystyle\sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha\neq 0}}^{\alpha=+k} E\, p(\Phi^{\varepsilon}_{j\alpha}) \leq \sum_{i=1}^{k} p(x^j_i)$

<u>Lemme 4</u> : Soit $k' \in \{1,\dots,k\}$, si $\alpha > k'$ ou $\alpha < -k'$, on a :

$$\int p\,(\Phi^{\varepsilon}_{j\alpha})\, dP(\varepsilon) \;\leq\; (4 \sum_{i=1}^{k} p(x_i^j))\, e^{-k'/k}$$

En effet, soit $n_\ell \in I_{\ell,j}$.

On se convaincra sans peine que l'on a

$$p(\Phi^{\varepsilon}_{j\alpha}) \;\leq\; 2 \sum_{\ell=1}^{m_j} 1 \left\{ \Sigma\, \varepsilon_i\, x_i^j(n_\ell) \;\geq\; \frac{\alpha}{N} \right\}$$

D'où

$$E\; p(\Phi^{\varepsilon}_{j\alpha}) \;\leq\; 2 \sum_{\ell=1}^{m_j} P\,(\Sigma\; \varepsilon_i x_i^j(n_\ell) \;\geq\; \frac{\alpha}{N}\,)$$

Mais l'on a

$$P(\,\Sigma\; \varepsilon_i x_i^j(n_\ell) \geq \frac{\alpha}{N}) = P(e^{\lambda[\Sigma\varepsilon_i x_i^j(n_\ell)]} \geq e^{\frac{\lambda\alpha}{N}})$$

$$\leq \frac{E\, e^{2\lambda[\Sigma\varepsilon_i x_j^i(n_\ell)]}}{e^{\frac{2\lambda\alpha}{N}}} \quad \text{(d'après Bienaymé-Tchebyschev)}$$

$$\leq \prod_{i=1}^{k} \frac{\mathrm{ch}\; 2\lambda x_j^i(n_\ell)}{e^{\frac{2\lambda\alpha}{N}}}$$

et comme l'on a

$$\frac{e^U + e^{-U}}{2} \leq e^{U^2/2} \qquad \leq \prod_{i=1}^{k} e^{2\lambda^2 x_j^i(n_\ell)^2 \;-\; \frac{2\lambda\alpha}{N}}$$

et il suffit maintenant de minimiser cette expression en λ et de remarquer que $N \sum_{i=1}^{k} x_i^j(n_\ell)^2 \leq k$ pour obtenir

$$E\; P(\Phi^{\varepsilon}_{j\alpha}) \;\leq\; 2 \sum_{1}^{m_j} e^{-\alpha^2/k} \;\leq\; [4 \sum_{i=1}^{k} p(x_i^j)]\; e^{-k'^2/k}$$

Conséquences des estimations des lemmes 3 et 4.

On pose $\Phi_\alpha^\varepsilon = \sum_{j=1}^{m} \Phi_{j\alpha}^\varepsilon$, on a

$$\|\Phi_\alpha^\varepsilon\|^\rho \leq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{m} p(\Phi_{j\alpha}^\varepsilon)\ U_j$$

D'où

$$\sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha\neq 0}}^{\alpha=+k} E\,\|\Phi_\alpha^\varepsilon\|^\rho \leq \frac{1}{N} \sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha\neq 0}}^{\alpha=+k} \sum_{j=1}^{m} E\,p\,(\Phi_{j\alpha}^\varepsilon)\ U_j$$

$$\leq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha\neq 0}}^{\alpha=+k} E\,p\,(\Phi_{j\alpha}^\varepsilon)\Big)\ U_j$$

$$\leq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{i=1}^{k} p(x_i^j)\Big)\ U_j$$

$$\leq k$$

Si $\alpha > k'$ ou $\alpha < -k'$, on a

$$E\,\|\Phi_\alpha^\varepsilon\| \leq \Big(\int \|\Phi_\alpha^\varepsilon\|^\rho\ dP(\varepsilon)\Big)^{1/\rho}$$

$$\leq \Big[\sum_{j=1}^{m} \Big(\int p(\Phi_{j\alpha}^\varepsilon)\ dP(\varepsilon)\Big) \frac{U_j}{N} \Big]^{1/\rho}$$

$$\leq 4^{1/p}\ \ell^{-k'^2/k\rho} \Big(\sum_{j=1}^{m} \Big[\sum_{i=1}^{k} p(x_j^i)\Big] \frac{U_j}{N} \Big)^{1/\rho}$$

$$\leq 4^{1/\rho}\ \ell^{-k'^2/k\rho}\ k^{1/\rho}$$

et

$$\sum_{|\alpha|\geq k'} E\,\|\Phi_\alpha^\varepsilon\| \leq 2\times 4^{1/p}\ \ell^{-k'^2/k\rho}\ k^{1+\frac{1}{\rho}}$$

De ceci nous obtenons :

$$\sum_{\alpha=-k}^{\alpha=+k} \|\Phi_\alpha^\varepsilon\| = \sum_{|\alpha|<k'} \|\Phi_\alpha^\varepsilon\| + \sum_{|\alpha|>k'} \|\Phi_\alpha^\varepsilon\|$$

$$\leq k'^{1/\rho'} \left(\sum_{|\alpha|<k'} \|\Phi_\alpha^\varepsilon\|^\rho \right)^{1/\rho} + \sum_{|\alpha|>k'} \|\Phi_\alpha^\varepsilon\|$$

(d'après Hölder)

D'où

$$\sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha\neq 0}}^{\alpha=+k} E\|\Phi_\alpha^\varepsilon\| \leq k'^{1/\rho'} E\left(\sum_{\alpha=-k}^{\alpha=+k} \|\Phi_\alpha^\varepsilon\|^\rho \right)^{1/\rho} + 2\times 4^{1/\rho}\, k^{1+\frac{1}{\rho}}\, e^{-k'^2/k\rho}$$

$$\leq k'^{1/\rho'} \left(\sum_{\alpha=-k}^{\alpha=+k} E\|\Phi_\alpha^\varepsilon\|^\rho \right)^{1/\rho} + 2\times 4^{1/\rho}\, k^{1+\frac{1}{\rho}}\, e^{-k'^2/k\rho}$$

$$\leq k^{1/\rho}\, k'^{1/\rho'} + 2\times 4^{1/\rho}\, k^{1+\frac{1}{\rho}}\, e^{-k'^2/k\rho}$$

le choix de $k' = (\rho(1+\frac{1}{\rho})\, k \log k)^{1/2}$ nous donne

$$\sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha\neq 0}}^{\alpha=+k} E\|\Phi_\alpha^\varepsilon\| \leq K_\rho\, k^{1/2+1/2\rho}\, (\log k)^{1/2\rho'}$$

K_ρ étant une constante qui ne dépend que de ρ.

Comme nous avons

$$\|\Sigma\, \varepsilon_i x_i\| = \Big\| \sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha\neq 0}}^{\alpha=+k} \Phi_\alpha^\varepsilon \Big\| \leq \sum_{\substack{\alpha=-k \\ \alpha\neq 0}}^{\alpha=+k} \|\Phi_\alpha^\varepsilon\|$$

le lemme 2 est démontré.

Soient maintenant $x_1,\dots,x_k \in J\rho$, $\|x_1\| = \dots = \|x_k\|$.

On choisit des représentations telles que

$$\|x_i\| = \sum_{k=1}^{p_i} [\![x_i^k]\!] - \varepsilon$$

Ensuite on les remplace par des représentations $x_i = \sum_{k=1}^{s} x_i^k + \overline{x_i}$ de telle façon que $\|\overline{x_i}\| \leq \varepsilon \quad \forall\, i$

$$\|x_i\| \geq \sum_{k=1}^{s} [\![x_i^k]\!] - \varepsilon$$

et $[\![x_i^k]\!] = [\![x_{i'}^{k'}]\!] \quad \forall\, i,i' \in \{1,\dots,k\} \qquad \forall\, k,k' \in \{1,\dots,s\}$

On en déduit

$$E\Big\|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i\Big\| \leq \sum_{\ell=1}^{s} E\Big\|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i^{\ell}\Big\| + 3\varepsilon$$

et d'après le lemme 2

$$E\Big\|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i\Big\| \leq \sum_{\ell=1}^{s} K_\rho\, k^{1/2+1/2\rho}\,(\log k)^{1/2\rho'} \sup [\![x_i^j]\!] + 3\varepsilon$$

$$E\Big\|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i\Big\| \leq K_\rho\, k^{1/2+1/2\rho}(\log k)^{1/2\rho'} \sum_{1}^{s} [\![x_i^k]\!] + 3\varepsilon$$

$$\leq K_\rho\, k^{1/2+1/2\rho}(\log k)^{1/2\rho'} \sup(\|x_i\| - \varepsilon) + 3\varepsilon$$

D'où le théorème 5 :

<u>Théorème 5</u> : Il existe une constante K_ρ tel que $\forall\, x_1,\dots,x_k \in J\rho$

$$\int \Big\|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i\Big\|\, dP(\varepsilon) \leq K_\rho\, k^{1/2+1/2\rho}\,(\log k)^{1/2\rho'} \sup \|x_i\|$$

<u>Corollaire 6</u> : J_ρ est de type p pour tout p tel que $\frac{1}{p} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2\rho}$.

En effet avec les notations de [5] on voit que μ_k tend vers 0 plus vite que $k^{-1/q'}$ quelque soit q tel que $1/q > 1/2 + 1/2\rho$, et on en déduit (lemme 4, en fait d'après la démonstration du lemme 2) que l'espace est de type p pour tout $p < q$.

on peut dire aussi cf [5] :

<u>Corollaire 7</u> : $J\rho$ est B convexe pour tout $\rho \in]1,\infty[$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.C. James and J. Lindenstrauss : The octahedral problem for Banach spaces (to appear)

[2] W. Davis and J. Lindenstrauss : to appear.

[3] B. Beauzamy : Exposés n° XIII et XIV du Séminaire Maurey-Schwartz 1973-1974.

[4] R.C. James : Weak compactness and reflexivity. Israel Journal of Math. 2 (1964), théo.3 p.109.

[5] G. Pisier : Exposé n° VII, Séminaire Maurey-Schwartz 1973-1974.