SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. BEAUZAMY

Points minimaux dans les espaces de Banach

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 18, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A17_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y   S C H W A R T Z   1 9 7 4 - 1 9 7 5

POINTS MINIMAUX DANS LES ESPACES DE BANACH

par B. BEAUZAMY

Exposé N^{o} XVIII　　　　　　　　　　9 Avril 1975

La notion de "point minimal par rapport à un ensemble" nous a initialement été suggérée par P. Enflo. Une première étude de cette notion a conduit à la publication de [1] ; d'autres résultats ont ensuite été obtenus en collaboration avec B. Maurey et feront l'objet d'un article ultérieur. Les deux exposés que nous allons maintenant développer contiennent, pour l'essentiel, les résultats de ces deux sources.

I. Définition et premières propriétés.

Soit E un espace de Banach, et soit M un sous ensemble de E. Nous dirons qu'un point x de E est minimal par rapport à M si la condition

$$\|y - m\| \leq \|x - m\| \qquad \forall\, m \in M$$

implique $y = x$.

Nous noterons min M l'ensemble des points minimaux de M. Il est clair que $M \subset \min M$, et même que $\overline{M} \subset \min M$, mais cette inclusion est stricte en général : on vérifie en effet aisément que dans ℓ^1 l'origine est minimale par rapport à l'ensemble des trois premiers vecteurs de la base canonique.

Il est clair également que si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\min \lambda M = \lambda \min M$, et que si $M_1 \subset M_2$, $\min M_1 \subset \min M_2$. Remarquons également que si M_1 est dense dans M_2, $\min M_1 = \min M_2$. En effet, soit x un point qui n'est pas minimal par rapport à M_1. On peut alors, par définition, trouver $y \neq x$ avec $\|y - m\| \leq \|x - m\|$, pour tout m de M_1 et donc aussi pour tout m de M_2, et donc x n'est pas minimal par rapport à M_2.

Un résultat très simple qui se révèlera utile est le suivant :

<u>Proposition 1</u> : Si M est borné, il en est de même de min M.

<u>Démonstration</u> : Plus précisément, nous allons démontrer que si M est contenu dans une boule de rayon a, min M est contenu dans une boule de même centre et de rayon 2a. Il suffit de supposer la boule centrée en O.

Soit x_o un point de E avec $||x_o|| = a$. Pour $m \in M$, posons $f_m(t) = ||tx_o - m||$. C'est une fonction convexe de t qui vérifie

$$f_m(0) \leq a \quad , \quad f_m(2) \geq a$$

et donc, $\forall\, t > 2$, $f_m(2) \leq f_m(t)$ et

$$||2x_o - m|| \leq ||tx_o - m|| \qquad \forall\, m \in M$$

ce qui prouve qu'un point de norme supérieure à 2a ne peut être minimal.

Nous allons maintenant établir un premier résultat de projection sur les points minimaux :

<u>Proposition 2</u> : Supposons que E soit strictement convexe et 1-complémenté dans E". Soit M un sous-ensemble de E. Pour tout point z de E, on peut trouver un point z', minimal par rapport à M, et vérifiant

$$||z' - m|| \leq ||z - m|| \qquad \forall\, m \in M$$

(Rappelons que E est strictement convexe si, lorsque x et y ne sont pas colinéaires, $||x+y|| < ||x|| + ||y||$. E est dit 1-complémenté dans E" s'il existe une projection linéaire de E" sur E, de norme 1 ; c'est le cas en particulier si E est réflexif ou si E est un dual.)

<u>Démonstration</u> : Pour chaque point z de E, considérons la fonction

$$f_z(m) = ||z - m||^2 \qquad m \in M$$

et munissons l'ensemble de ces fonctions de l'ordre usuel : $f_{z_1} \leq f_{z_2}$ si $f_{z_1}(m) \leq f_{z_2}(m) \quad \forall\, m \in M$.

Muni de cet ordre, l'ensemble de ces fonctions est inductif : si f_{z_i} est une famille totalement ordonnée :

$$||z_j - m|| \leq ||z_i - m|| \qquad j > i \quad , \forall\, m \in M$$

et les points (z_i) forment donc un ensemble borné de E ; il en résulte qu'il existe un point adhérent z" aux (z_i) pour la topologie $\sigma(E'',E')$. Puisque la norme de E" est semi-continue inférieurement pour cette topologie, on a

$$||z'' - m|| \leq \liminf ||z_i - m||$$

Si P désigne la projection de E" sur E, on a :

$$||Pz''- m|| \leq ||z'' - m|| \leq ||z_i - m|| \qquad \forall\, i \;, \forall\, m \in M$$

et $f_{Pz''}$ est donc le minorant cherché.

D'après l'axiome de Zorn, il existe donc des éléments minimaux : si z est donné, on peut trouver z' tel que $f_{z'}$ soit minimale pour l'ordre et vérifie $f_{z'} \leq f_z$. On a donc $||z' - m|| \leq ||z - m|| \quad \forall\, m \in M$.

Pour montrer que z' est minimal par rapport à M, nous utiliserons le lemme suivant, dont la démonstration est immédiate :

Lemme : Si E est strictement convexe et si a et b sont deux points distincts,

$$||\frac{a+b}{2}||^2 < \frac{1}{2}\left(||a||^2 + ||b||^2 \right)$$

Supposons que z' ne soit pas minimal : on pourrait alors trouver z_1, $z_1 \neq z'$, avec

$$||z_1 - m|| \leq ||z' - m|| \qquad \forall\, m \in M$$

Comme $f_{z'}$ est minimale pour l'ordre, on a nécessairement

$$||z_1 - m|| = ||z' - m|| \qquad \forall\, m \in M$$

et donc :

$$||\frac{z_1 + z'}{2} - m||^2 < \frac{1}{2}\left(||z_1 - m||^2 + ||z'-m||^2 \right) = ||z' - m||^2$$

ce qui contredit le fait que $f_{z'}$ était minimale pour l'ordre, et prouve notre proposition.

Remarque : L'hypothèse "E strictement convexe" est rendue nécessaire par le fait que nous n'admettons un point pour minimal que s'il n'existe pas d'autres points situés à la même distance que lui de tous les points de M. On pourrait adopter une autre définition, en disant que x est minimal large si f_x est minimale pour l'ordre ; ces deux définitions coïncident si E est strictement convexe, mais celle que nous avons choisie se révèlera plus commode par la suite. La proposition suivante fera mieux comprendre à quoi correspond l'hypothèse de stricte convexité :

Proposition 3 : E est strictement convexe si et seulement si, pour tout couple (m_1,m_2) de points de E, les points du segment $[m_1,m_2]$ sont minimaux pour l'ensemble $M = \{m_1,m_2\}$

Démonstration : Si E est strictement convexe, il est évident qu'un déplacement d'un point d'un segment hors de ce segment augmente la somme des distances aux extrémités, et donc l'une de ces distances.

Inversement, supposons que pour tout couple (m_1,m_2) les points du segment $[m_1,m_2]$ soient minimaux pour $M = \{m_1,m_2\}$. Soient a,b deux vecteurs non colinéaires, et choisissons $m_1 = 0$, $m_2 = a+b$. Si $\|a\|$ ou $\|b\|$ est supérieur à $\|a+b\|$, on a $\|a+b\| < \|a\| + \|b\|$. Supposons donc $\|a\|$ et $\|b\|$ inférieurs à $\|a+b\|$. Soit x le point du segment $[m_1,m_2]$ de norme $\|a\|$; x est minimal, et, puisque $\|x\| = \|a\|$, on a $\|b\| > \|a+b-x\|$. Donc $\|a\| + \|b\| > \|a+b\|$, et E est strictement convexe.

Si E n'est pas strictement convexe, il peut se faire que l'ensemble des points minimaux d'un couple de points soit réduit à ces points : c'est le cas, dans ℓ_2^∞ , des deux points (1,0) et (-1,0).

Pour un ensemble de trois points, les points minimaux ne sont pas contenus en général dans l'enveloppe convexe des trois points, même si E est uniformément convexe. En effet, dans ℓ_3^p $(1 < p < \infty)$, l'ensemble des points minimaux par rapport aux trois vecteurs de la base canonique est la portion de surface d'équation

$$\begin{vmatrix} -(1-x)^{p-1} & y^{p-1} & z^{p-1} \\ x^{p-1} & -(1-y)^{p-1} & z^{p-1} \\ x^{p-1} & y^{p-1} & -(1-x)^{p-1} \end{vmatrix} = 0$$

limitée par les segments joignant les trois points.

Nous donnerons plus tard quelques exemples de calcul explicite des points minimaux dans des cas particuliers. Nous allons maintenant passer à la détermination des points minimaux des ensembles compacts.

II. Points minimaux des ensembles compacts.

Nous supposerons dans tout ce paragraphe l'ensemble M compact. Le théorème essentiel est le suivant :

Théorème 1 : Soit M un compact de E. Si x est minimal pour M, il existe une probabilité μ portée par M telle que l'application

$$\varphi_\mu(z) = \int_M \|z - m\|^2 \, d\mu(m)$$

atteigne son minimum au point x.

La démonstration utilisera un lemme :

Lemme : Soit A un sous-ensemble de $\mathcal{C}(M)$ possédant la propriété suivante :

$(\mathcal{P})$ Pour toute suite finie α_i de scalaires positifs de somme 1, pour toute suite finie (g_i) d'éléments de A, on peut trouver un élément g de A avec $g \leq \Sigma\, \alpha_i g_i$.

Alors, si f est un élément de A minimal pour l'ordre induit par $\mathcal{C}(M)$ (c'est-à-dire si $f' \leq f \Rightarrow f' = f$), il existe une probabilité μ portée par M telle que

$$\mu(f) = \inf_{g \in A} \mu(g)$$

<u>Démonstration du lemme</u> : Soit f une fonction de A minimale pour l'ordre. Posons $X = \text{conv}\,\{A - f\}$. D'après $(\mathcal{P})$, pour tout élément de X, $\Sigma\alpha_i g_i - f$, on peut trouver g dans A tel que $\Sigma\alpha_i g_i - f \geq g - f$. Mais $g - f$ a un maximum positif ou nul. L'ensemble X est donc disjoint du cône ouvert des fonctions dont le maximum est strictement négatif. On peut donc trouver une probabilité μ telle que $\mu(g - f) \geq 0 \;\forall g \in A$, ce qui prouve le lemme.

Démontrons maintenant le théorème : prenons pour A l'ensemble des fonctions $f_x(m) = \|x - m\|^2$, $x \in E$. La propriété $(\mathcal{P})$ est satisfaite, car $\Sigma\,\alpha_i\,\|x_i - m\|^2 \geq \|\Sigma\,\alpha_i x_i - m\|^2$, $\forall\, m \in M$.
D'autre part, il est évident que si x est minimal, f_x est minimale pour l'ordre. Il existe donc, d'après le lemme, une probabilité μ telle que $\forall\, y \in E$,

$$\int_M \|y - m\|^2\, d\mu(m) \;\geq\; \int_M \|x - m\|^2\, d\mu(m)$$

ce qui prouve le théorème.

Nous plaçant toujours dans le cas où M est compact, nous allons étudier la réciproque :

<u>Théorème 2</u> : Si E est réflexif ou si E' est séparable et E 1-complémenté dans E", pour toute probabilité μ portée par M, l'application φ_μ atteint son minimum. Si de plus E est strictement convexe, ce minimum est atteint en un point unique et ce point est minimal.

<u>Démonstration</u> : Il est clair que si E est réflexif, φ_μ est inf-compacte pour $\sigma(E,E')$ (c'est-à-dire que les ensembles $\{\varphi_\mu \leq \lambda\}$ sont $\sigma(E,E')$ compacts, pour tout $\lambda \geq 0$) et donc φ_μ atteint son minimum.
Si E' est séparable, φ_μ, définie sur E", est s.c.i. pour $\sigma(E",E')$. En effet, les boules de E" sont métrisables pour $\sigma(E",E')$; il suffit donc de montrer que si $x_n \to x$ pour $\sigma(E",E')$, $\liminf \varphi_\mu(x_n) \geq \varphi_\mu(x)$. Mais ceci résulte du

fait que la norme est s.c.i. pour $\sigma(E'',E')$ et du lemme de Fatou. Donc φ_μ atteint son minimum en un point x'' de E''. Si P est la projection de E'' sur E, il est clair que $\varphi_\mu(Px'') \leq \varphi_\mu(x'')$ et donc $\varphi_\mu(Px'') = \varphi_\mu(x'')$.

Supposons le minimum de φ_μ atteint en deux points distincts x_1 et x_2 de E. Alors, $\forall\, z \in E$

$$\int \|x_1 - m\|^2 \, d\mu(m) = \int \|x_2 - m\|^2 \, d\mu(m) \leq \int \|z - m\|^2 \, d\mu(m)$$

et d'après un lemme déjà utilisé :

$$\left\|\frac{x_1+x_2}{2} - m\right\|^2 < \frac{1}{2}\left(\|x_1 - m\|^2 + \|x_2 - m\|^2 \right)$$

d'où en intégrant :

$$\varphi_\mu\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \varphi_\mu(x_1) = \varphi_\mu(x_2) ,$$

ce qui prouve l'unicité du minimum.

Soit enfin x le point où φ_μ atteint son minimum. S'il n'était pas minimal, on pourrait trouver un autre point y, avec $\|y - m\| \leq \|x - m\| \ \forall\, m \in M$, et donc $\varphi_\mu(y) = \varphi_\mu(x)$, et le minimum ne serait pas unique.

Dans le cas où les hypothèses du théorème 2 sont satisfaites, nous notons $x(\mu)$ le point où φ_μ prend son minimum. Nous allons maintenant étudier la continuité de l'application $\mu \to x(\mu)$. Nous nous bornerons pour simplifier au cas où E est réflexif et strictement convexe.

<u>Proposition 1</u> :

Si E est réflexif et strictement convexe, l'application $\mu \to x(\mu)$ est continue de l'ensemble des probabilités portées par M (muni de la topologie de la convergence étroite) dans E muni de $\sigma(E,E')$.

La démonstration utilise un lemme :

<u>Lemme</u> : Soit (μ_n) une suite de probabilités convergeant étroitement vers une probabilité μ_o. Si $x_n = x(\mu_n)$ converge faiblement vers un point x_o, on a $x_o = x(\mu_o)$.

<u>Démonstration du lemme</u> : Il suffit de montrer que pour tout point z de E,

$$\int \|z - m\|^2 \, d\mu_o(m) \geq \int \|x_o - m\|^2 \, d\mu_o(m)$$

On sait que :

$$\begin{aligned} \int \|z - m\|^2 \, d\mu_o(m) &= \lim_{n \to \infty} \int \|z - m\|^2 \, d\mu_n(m) \\ &\geq \liminf_{n \to \infty} \int \|x_n - m\|^2 \, d\mu_n(m) \end{aligned}$$

Mais la norme est semi-continue inférieurement pour $\sigma(E,E')$, et par conséquent :

$$\liminf \|x_n - m\|^2 \geq \|x_o - m\|^2$$

Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier $N(m)$ tel que dès que $n > N(m)$, on ait

$$\|x_n - m\|^2 > \|x_o - m\|^2 - \varepsilon$$

ou

$$\|x_o - m\|^2 - \|x_n - m\|^2 < \varepsilon$$

L'ensemble des m tels que $\|x_o - m\|^2 - \|x_o - m\|^2 < \varepsilon$ est ouvert ; puisque M est compact, on peut trouver un entier N tel que dès que $n > N$, on ait, pour tout point m de M :

$$\|x_n - m\|^2 > \|x_o - m\|^2 - \varepsilon$$

Il en résulte que si $n > N$

$$\int \|x_n - m\|^2 \, d\mu_n(m) \geq \int \|x_o - m\|^2 \, d\mu_n(m) - \varepsilon$$

et donc

$$\liminf_{n\to\infty} \int \|x_n - m\|^2 \, d\mu_n(m) \geq \liminf_{n\to\infty} \int \|x_o - m\|^2 \, d\mu_n(m) - \varepsilon$$

$$\geq \int \|x_o - m\|^2 \, d\mu_o(m) - \varepsilon$$

Et puisque ces inégalités sont vraies pour tout $\varepsilon > 0$, le lemme est établi.

Montrons maintenant la proposition. On sait que l'ensemble des probabilités sur M est un compact métrisable pour la topologie étroite. Soit (μ_n) une suite de probabilités convergeant vers μ_o, et soit $x_n = x(\mu_n)$. Puisque M est borné, min M est borné (proposition I.1), et puisque E est réflexif, d'après le théorème de Smullian, il existe une sous-suite (x_{n_k}) des (x_n) qui converge faiblement vers un point x_o, et $x_o = x(\mu_o)$ d'après le lemme . On se restreint maintenant à l'espace engendré par la suite (x_n) : il est séparable et réflexif, donc les boules sont métrisables pour la topologie faible, et par conséquent, la suite (x_n), qui, d'après le lemme, ne peut avoir d'autre point d'accumulation, est convergente.

<u>Corollaire</u> : Si E est réflexif et strictement convexe, et si M est compact, min M est faiblement compact (et donc fermé).

Nous allons voir maintenant que si E est uniformément convexe, ce résultat peut être amélioré.

<u>Théorème 3</u> : Si E est uniformément convexe et M compact, min M est compact.

<u>Démonstration</u> : Rappelons que si E est uniformément convexe, on peut trouver une fonction $\delta(\varepsilon)$, $\delta > 0$ si $\varepsilon > 0$, telle que :

$\forall\, x,y \in E$, la condition $\|x-y\| \geq \varepsilon \sup(\|x\|, \|y\|)$ implique

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \leq \frac{1}{2}(1-\delta(\varepsilon))\,(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

(pour cette caractérisation de l'uniforme convexité, nous renvoyons par exemple à [2] p.~~357~~).

Pour simplifier les calculs, nous supposerons M inclus dans la boule unité.

<u>Lemme</u> : Si μ est une probabilité portée par M, et si $x = x(\mu)$, on a, pour tout point z de norme inférieure à 2 :

$$\varphi_\mu(z) \geq \varphi_\mu(x) + \left\|\frac{x-z}{2}\right\|^2 \delta\left(\frac{\|x-z\|}{3}\right)$$

<u>Démonstration du lemme</u> : Posons $\varepsilon = \dfrac{\|z-x\|}{\sup\limits_m(\|z-m\|, \|x-m\|)}$. On a :

$$\|z-m\| \leq 3 \quad , \quad \|x-m\| \leq 3 \qquad \text{(proposition I.1)}$$

et donc
$$\varepsilon \geq \frac{\|z-x\|}{3} .$$

Par ailleurs,
$$\frac{1}{2}\left(\|z-m\|^2 + \|x-m\|^2\right) \geq \left\|\frac{z-x}{2}\right\|^2$$

et donc
$$\left\|\frac{z+x}{2} - m\right\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\|z-m\|^2 + \|x-m\|^2\right) - \frac{1}{2}\,\delta\left(\frac{\|z-x\|}{3}\right)\left\|\frac{z-x}{2}\right\|^2$$

On en déduit :

$$\frac{1}{2}\int \|z-m\|^2\, d\mu(m) + \frac{1}{2}\int \|x-m\|^2\, d\mu(m) \geq \int \left\|\frac{z+x}{2} - m\right\|^2 d\mu(m) + \frac{1}{2}\left\|\frac{z-x}{2}\right\|^2 \delta\left(\frac{\|z-x\|}{3}\right)$$

Mais on sait que
$$\int \left\|\frac{z+x}{2} - m\right\|^2 d\mu(m) \geq \int \|x-m\|^2\, d\mu(m)$$

Il en résulte que

$$\int \|z-m\|^2\, d\mu(m) \geq \int \|x-m\|^2\, d\mu(m) + \left\|\frac{z-x}{2}\right\|^2 \delta\left(\frac{\|z-x\|}{3}\right)$$

ce qui prouve le lemme.

Démontrons maintenant le théorème. Munissons l'ensemble $\{f_x(m) = \|x - m\|^2, x \in E\}$ de la topologie de la convergence uniforme sur M. L'application $x \to f_x$ est continue. Par ailleurs, si on la restreint à min M, on déduit du lemme :

$$\sup_{m \in M} \left| \|x - m\|^2 - \|z - m\|^2 \right| \geq \|x - z\|^2 \ \delta\left(\frac{\|x - z\|}{3}\right)$$

ce qui prouve que l'application inverse est continue ; on a ainsi obtenu un homéomorphisme de l'ensemble des points minimaux de M sur l'ensemble des fonctions f_x, $x \in \min M$. Comme ce dernier ensemble est relativement compact, il en est de même du premier, qui est donc compact au vu du résultat précédent.

Une autre application du lemme que nous venons d'établir sera la suivante :

<u>Proposition 2</u> : Soit E un espace de Banach uniformément convexe et soit M un compact de E. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $|.|$ une nouvelle norme strictement convexe sur E, satisfaisant à

$$(1-\varepsilon) \|z\| \leq |z| \leq (1+\varepsilon) \|z\| \qquad \forall z \in E$$

Pour chaque probabilité μ sur M, considérons l'application

$$\psi_\mu(z) = \int_M |z - m|^2 \, d\mu(m)$$

et notons $x'(\mu)$ le point où elle prend son minimum.
On a alors :

$$\delta\left(\frac{\|x - z\|}{3}\right) \|x(\mu) - x'(\mu)\|^2 \leq \frac{16\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2} \Phi(M)^2$$

(où $\Phi(M)$ est le diamètre de la plus petite boule centrée en 0 contenant M).

<u>Démonstration</u> : On sait, d'après le lemme, que

$$\varphi_\mu(z) \geq \varphi_\mu(x) + \frac{1}{4} \|x - z\|^2 \ \delta\left(\frac{\|x - z\|}{3}\right)$$

On a, $\forall$ $z \in E$

$$(1-\varepsilon)^2 \varphi_\mu(z) \leq \psi_\mu(z) \leq (1+\varepsilon)^2 \varphi_\mu(z)$$

et donc :

$$\psi_\mu(z) \geq (1-\varepsilon)^2 \varphi_\mu(z) \geq (1-\varepsilon)^2 \left[\varphi_\mu(x) + \frac{1}{4}\|x-z\|^2 \delta\left(\frac{\|x-z\|}{3}\right)\right]$$

On aura donc

$$\psi_\mu(z) \geq \psi_\mu(x)$$

dès que

$$(1-\varepsilon)^2 \left[\varphi_\mu(x) + \frac{1}{4}\|x-z\|^2 \delta\left(\frac{\|x-z\|}{3}\right)\right] \geq \psi_\mu(x)$$

et donc a fortiori dès que

$$(1-\varepsilon)^2 \left[\varphi_\mu(x) + \frac{1}{4}\|x-z\|^2 \delta\left(\frac{\|x-z\|}{3}\right)\right] \geq (1+\varepsilon)^2 \varphi_\mu(x)$$

ou

$$\frac{1}{4}\|x-z\|^2 \delta\left(\frac{\|x-z\|}{3}\right) \geq \left(\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2 - 1\right) \varphi_\mu(x)$$

Le minimum de ψ_μ sera donc atteint pour un point z avec

$$\|x-z\|^2 \delta\left(\frac{\|x-z\|}{3}\right) \leq \frac{16\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2} \varphi_\mu(x)$$

et puisqu'on a par ailleurs

$$\varphi_\mu(x) \leq \varphi_\mu(0) = \int \|m\|^2 \, d\mu(m) \leq \Phi(M)^2 ,$$

la proposition est démontrée.

Nous allons donner une autre application du théorème 3 :

<u>Proposition 3</u> : Dans un espace de Banach uniformément convexe E, soit K un compact et (T_n) une suite d'opérateurs de norme 1 de E dans lui-même. Si (T_n) converge vers l'identité sur K, (T_n) converge vers l'identité sur min K.

Démonstration : Si $x \in \min K$, il existe une probabilité μ sur K pour laquelle, $\forall z \in E$,

$$\int \|z - m\|^2 d\mu(m) \geq \int \|x - m\|^2 d\mu(m) + \frac{1}{2}\|x - z\|^2 \delta(\frac{\|x - z\|}{3})$$

On en déduit

$$\frac{1}{2}\|T_n x - x\| \delta(\frac{\|T_n x - x\|}{3}) \leq \int \|T_n x - m\|^2 d\mu(m) - \int \|x - m\|^2 d\mu(m)$$

Or on a
$$\|T_n x - m\| \leq \|T_n x - T_n m\| + \|T_n m - m\|$$
$$\leq \|x - m\| + \|T_n m - m\|$$

et donc
$$\|T_n x - m\|^2 \leq \|x - m\|^2 + \|T_n m - m\|^2 + 2\|x - m\| \|T_n m - m\|$$

d'où
$$\frac{1}{2}\|T_n x - x\| \delta(\frac{\|T_n x - x\|}{3}) \leq \int \|T_n m - m\|^2 d\mu(m) + 2\int \|x - m\| \|T_n m - m\| d\mu(m)$$
$$\leq \sup_m \|T_n m - m\|^2 + 4\Phi(K) \sup_m \|T_n m - m\|$$

et ces quantités tendent vers 0 lorsque $n \to \infty$, ce qui prouve la proposition.

Nous avons ainsi démontré quelques propriétés topologiques des points minimaux d'un ensemble compact. Les propriétés géométriques nous sont moins bien connues : par exemple, nous ne savons pas si min M est convexe lorsque M l'est (signalons cependant que l'on démontre facilement que si $x \in \min M$ et si $m \in M$, tous les points du segment $[x,m]$ appartiennent à min M). Nous allons voir qu'en réitérant l'opération "min", ces difficultés disparaissent et l'on obtient des propriétés géométriques assez remarquables.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Beauzamy : Points minimaux dans les espaces de Banach. Note C.R.A.S. t. 280 , 17 mars 1975 (p. 717-720)

[2] G. Köthe : Topological vector spaces. Springer Verlag.
