Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

P. Assouad

**Espaces $p$-lisses. Réarrangements**

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1974-1975), exp. nº 16, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A15_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
*17, rue Descartes*
*75230 Paris Cedex 05*

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 4 - 1 9 7 5

# ESPACES p-LISSES

# REARRANGEMENTS

par P. ASSOUAD

Exposé N° XVI

12 Mars 1975

Notations. Soient E un espace de Banach réflexif, $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace de probabilité, $n\in\mathbb{N}$, $Y_1,\dots,Y_n$ une suite finie de v.a. intégrables à valeurs dans E. Si A est une partie de $\{1,\dots,n\}$, on pose $X(A) = \sum_{j\in A} Y_j$ et $\nu(A) = \text{Card } A$

et on note $\mathcal{A}(A)$ une tribu rendant mesurables les v.a. $X(B)$ $\forall\, B\supset A$.

Définitions : 1) $Y_1,\dots,Y_n$ sont dites échangeables (resp. écartables) si pour tout $r\leq n$ et pour toute injection (resp. injection croissante) $i\to j_i$ de $\{1,\dots,r\}$ dans $\{1,\dots,n\}$ les v.a. $(Y_1,\dots,Y_r)$ et $(Y_{j_1},\dots,Y_{j_r})$ ont même loi.

2) $(Y_1,\dots,Y_n)$ appartient à D (relativement à la famille décroissante de tribus $A\to\mathcal{A}(A)$) si pour tout couple d'intervalles non vides $(A,B)$, $A\subset B$ on a $E(\frac{X(A)}{\nu(A)}\mid \mathcal{A}(B)) = \frac{X(B)}{\nu(B)}$.

Exemples : a) Soit $y_1,\dots,y_n$ des éléments de E. Soit $(\Omega,\mathcal{A},P)$ l'ensemble des permutations de $\{1,\dots,n\}$ muni de la loi uniforme. On pose $Y_j(\omega) = y_{\omega(j)}$. Alors $Y_1,\dots,Y_n$ sont échangeables.

b) Soit $Y_1,\dots,Y_n$ échangeables. Soit $Y'_j = Y_j - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

Alors $Y'_1,\dots,Y'_n$ sont échangeables.

c) Soit $Y_1,\dots,Y_n$ écartables (resp. échangeables) avec $\sum_{j=1}^{n} Y_j = 0$.

Soit $\mathcal{A}(A)$ la tribu engendrée par $(Y_j)_{j\notin A}$ (resp. des évènements symétriques en $(Y_j)_{j\in A}$).

Alors $(Y_1,\dots,Y_n)$ appartient à D (relativement aux $\mathcal{A}(A)$).

En effet, soit $A\subset B$ deux intervalles de $\{1,\dots,n\}$. Comme $(Y_1,\dots,Y_n)$ sont écartables (resp. échangeables), on a :

$$\forall\, i\in B,\ j\in B \qquad E(Y_i - Y_j \mid \mathcal{A}(B)) = 0$$

Par combinaison linéaire, on trouve $E(\frac{X(A)}{\nu(A)} - \frac{X(B)}{\nu(B)} \mid \mathcal{A}(B)) = 0$.

Enfin $\frac{X(B)}{\nu(B)} = -\frac{1}{\nu(B)}\sum_{j\notin B} Y_j$ est $\mathcal{A}(B)$ mesurable. Cela donne le résultat.

<u>Proposition 1</u> : Soit E un espace de Banach p-lisse, $(Y_1,\dots,Y_n)$ une suite finie de v.a. à valeurs dans E, $\Phi$ une fonction de Young à croissance modérée (c'est-à-dire $\exists\ r\ \frac{\Phi(x)}{x^r}$ ), $(a_1,\dots,a_n)$ des réels.

a) On suppose que $Y_1,\dots,Y_n$ sont échangeables et que $\sum_{j=1}^{n} Y_j = 0$. On a alors :

$$\text{(i)}\quad E\Phi\,(\sup_{i=1,\dots,n} \|\sum_{j=1}^{i} Y_j\|) \le C_5 E\Phi\,((\sum_{j=1}^{n} \|Y_j\|^p)^{1/p})$$

b) On suppose que $Y_1,\dots,Y_n$ sont échangeables et $\Phi$ est convexe (resp. $(Y_1,\dots,Y_n)$ appartient à D et $\Phi(x) = x^p$) et que $\sum_{j=1}^{n} Y_j = 0$.
On a alors :

$$\text{(ii)}\quad E\Phi(\sup_{i=1,\dots,n} \|\sum_{j=1}^{i} a_j Y_j\|) \le c_6 E[\Phi((\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \|Y_j\|^p)^{\frac{1}{p}} + \Phi(\frac{1}{n}(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{j=1}^{n} \|Y_j\|^p)^{\frac{1}{p}})]$$

(où $c_5$, $c_6$ ne dépendent que de E, p et $\Phi$).

<u>Démonstration</u> : 0) Soit $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}(\{i+1,\dots,n\})$ si $(Y_1,\dots,Y_n)$ appartient à D (relativement aux $\mathcal{O}(A)$). Si $Y_1,\dots,Y_n$ sont échangeables on a choisi les tribus $\mathcal{O}(A)$ comme dans l'exemple c), c'est-à-dire $\mathcal{O}_i$ est la tribu engendrée par les évènements symétriques en $Y_{i+1},\dots,Y_n$.

Soit $X_i = (Y_1+\dots+Y_i) = (n-i)\ E\ (Y_n|\mathcal{O}_i)$. Comme $i \to (n-i)$ est décroissant $(X_i)_{i=0,\dots,n-1}$ est dans $d(\varepsilon,-)$ pour tout $\varepsilon$ et on a :

$$X_o = 0 \qquad \Delta X_i = -Y_i \qquad \forall\ i \in \{1,\dots,n-1\}$$

Soit $m \in \{1,\dots,n\}$ tel que $m \ge \frac{n}{3}$ $\quad n-m \ge \frac{n}{3}$

(cela est possible en écartant $n = 1$ ou $2$ où la Proposition est évidente).

Soit $V_i = E(\sum_{j=1}^{m} a_j Y_j \mid \mathcal{O}_i)$ $(V_i)_{i=0,\dots,n-1}$ est une martingale

$$V_o = 0 \qquad V_i = \sum_{j=1}^{i} a_j Y_j + \frac{a_{i+1}+\dots+a_m}{n-i} X_i$$

$$\Delta V_i = (a_i - \frac{1}{n-i+1} \sum_{j=i}^{m} a_j) Y_i - (\frac{a_i}{n-i} - \frac{1}{(n-i)(n-i+1)} \sum_{j=i}^{m} a_j) X_i$$

Enfin on pose $b = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |a_j|$ .

1) On suppose que $Y_1,\dots,Y_n$ sont échangeables et que $\sum_{j=1}^{n} Y_j = 0$. On a alors (i). En effet, on a :

$(X_i)_{i=0,\dots,n-1}$ est dans $d(\varepsilon,-)$ pour tout $\varepsilon$, $X_o = 0$

et $\qquad ||\Delta X_i|| \leq (\sum_{j=1}^{n} ||Y_j||^p)^{1/p} \qquad \forall\ i = 1,\dots,n-1$ .

Or $(\sum_{j=1}^{n} ||Y_j||^p)^{1/p}$ est symétrique en $Y_1,\dots,Y_n$ donc est $\mathcal{O}_o$-mesurable. Le résultat provient donc de la Proposition 2a de l'exposé précédent.

2) On se place dans les hypothèses de c). On a alors :

$$\text{(i')} \qquad E(\sup_{i=1,\dots,m} ||\sum_{j=1}^{i} Y_j||^p) \leq c_5' E(\sum_{j=1}^{n} ||Y_j||^p)$$

En effet, on a :

$$\frac{n}{3} ||E(Y_n \mid \mathcal{O}_i)|| \leq ||X_i|| \leq n ||E(Y_n \mid \mathcal{O}_i)|| \qquad \forall\ i \in \{0,\dots,m\}$$

Donc

$$\begin{aligned} E(\sup_{i=0,\dots,m} ||X_i||^p) &\leq n^p E(\sup_{i=0,\dots,m} ||E(Y_n \mid \mathcal{O}_i)||^p) \\ &\leq (\frac{p}{p-1})^p n^p E(||E(Y_n \mid \mathcal{O}_m)||^p) \quad \text{(inégalité de Doob)} \\ &\leq (\frac{3p}{p-1})^p E||X_m||^p \end{aligned}$$

Comme $(X_i)_{i=0,\dots,n-1}$ est dans $d(\varepsilon,-)$ pour tout $\varepsilon$, le résultat provient de la Proposition 1 de l'exposé précédent.

3) On suppose $Y_1,\dots,Y_n$ échangeables, $\Phi$ convexe (resp. $(Y_1,\dots,Y_n)$ appartient à D, $\Phi(x) = x^p$). On suppose de plus $\sum_{j=1}^{n} Y_j = 0$.

On a alors :

$$\text{(ii)'} \qquad E\Phi\Big(\sup_{i=1,\dots,m} \Big\|\sum_{j=1}^{i} a_j\, Y_j\Big\|\Big) \leq c_6'\, E\Big[\Phi\Big(\Big(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \|Y_j\|^p\Big)^{1/p}\Big)$$

$$+ \Phi\Big(\frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{j=1}^{n} \|Y_j\|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big)\Big]$$

On a en effet

$$\Big\|\sum_{j=1}^{i} a_j Y_j\Big\| \leq \|V_i\| + 3b\,\|X_i\| \qquad \forall\, i \in \{0,\dots,m\}$$

et

$$\|\Delta V_i\| \leq |a_i|\,\|Y_i\| + 3b\,\|Y_i\| + \frac{3}{n}\,|a_i|\,\|X_i\| + \frac{9b}{n}\,\|X_i\| \qquad \forall\, i \in \{1,\dots,m\}$$

Notons $A \prec B$ si $A \leq cB$ où c ne dépend que de E, p et $\Phi$.
Comme $\dfrac{\Phi(x)}{x^r}$ décroît, on a $\Phi(x+y) \prec \Phi(x) + \Phi(y) \quad \forall\, x,y$ .

On a

$$E\Phi\Big(\sup_{i=1,\dots,m} \Big\|\sum_{j=1}^{i} a_j Y_j\Big\|\Big) \prec E\Big[\Phi\Big(\sup_{i=1,\dots,m} V_i\Big) + \Phi\Big(b \sup_{i=1,\dots,n} \|X_i\|\Big)\Big]$$

L'application de (i) (resp. (i')) donne donc :

$$E\Phi\Big(b \sup_{i=1,\dots,n} \|X_i\|\Big) \prec E\Phi\Big(b\Big(\sum_{j=1}^{n} \|Y_j\|^p\Big)^{1/p}\Big)$$

Par ailleurs, la Proposition 2b de l'exposé précédent entraîne qu'on a :

$$E\Phi\Big(\sup_{i=1,\dots,m} V_i\Big) \prec E\Phi\Big(\Big(\sum_{j=1}^{m} \|\Delta V_j\|^p\Big)^{1/p}\Big)$$

$$\prec E\Big[\Phi\Big(\Big(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \|Y_j\|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big) + \Phi\Big(b\Big(\sum_{j=1}^{n} \|Y_j\|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big) + \Phi\Big(\frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \sup_{i=1,\dots,n} \|X_i\|\Big)$$

$$+ \Phi\Big(\frac{b}{n}\, n^{1/p} \sup_{i=1,\dots,n} \|X_i\|\Big)\Big]$$

Appliquant encore (i) (resp. (i')) et remarquant qu'on a :

$$\frac{b}{n}\, n^{1/p} \leq b \leq \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \right)^{1/p}$$

on en déduit (ii)'

4) A partir de (ii)' on obtient (ii) en remarquant que

$$\sup_{i=1,\dots,n} \left\| \sum_{j=1}^{i} a_j Y_j \right\| \leq \sup_{i=1,\dots,m} \left\| \sum_{j=1}^{i} a_j Y_j \right\| + 2 \sup_{i=m+1,\dots,n} \left\| \sum_{j=i}^{n} a_j Y_j \right\|$$

(l'espérance du second terme s'évalue en retournant le temps)

Le corollaire 1 étend un résultat de Garsia [1] valable pour des v.a. échangeables réelles et p=2.

<u>Corollaire 1</u> : Soit E un espace de Banach p-lisse, $Y_1,\dots,Y_n$ des v.a. échangeables à valeurs dans E avec $\sum_{j=1}^{n} Y_j = 0$, $a_1,\dots,a_n$ des réels. Alors on a :

$$\text{(iv)} \quad E\left( \sup_{i=1,\dots,n} \left\| \sum_{j=1}^{i} a_j Y_j \right\|^p \right) \leq c_7\, E\left( \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \right) \left( \sum_{j=1}^{n} \|Y_j\|^p \right) \right)$$

(où $c_7$ ne dépend que de E et de p).

<u>Démonstration</u> : Soit $\Omega'$ l'espace des permutations de $\{1,\dots,n\}$. On a

$$E\left( \sup_{i=1,\dots,n} \left\| \sum_{j=1}^{i} a_j Y_j \right\|^p \right) = \frac{1}{n!} \sum_{\omega' \in \Omega'} E\left( \sup_{i=1,\dots,n} \left\| \sum_{j=1}^{i} a_j Y_{\omega'(j)} \right\|^p \right)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\omega' \in \Omega'} E\left( \sup_{i=1,\dots,n} \left\| \sum_{j=1}^{i} a_{\omega'^{-1}(j)} Y_j \right\|^p \right)$$

$$\leq c_6\, E\Big[ \frac{1}{n!} \Big( \sum_{\omega' \in \Omega'} \sum_{j=1}^{n} |a_{\omega'^{-1}(j)}|^p \|Y_j\|^p \Big)$$

$$+ \frac{1}{n^p} \Big( \sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \Big) \Big( \sum_{j=1}^{n} \|Y_j\|^p \Big) \Big]$$

Or $$\frac{1}{n!}\sum_{\omega'\in\Omega'}\sum_{j=1}^{n}|a_{\omega'^{-1}(j)}|^p\,\|Y_j\|^p = \frac{1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^p\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}\|Y_j\|^p\Big)$$

Cela donne le résultat.

<u>Corollaire 2</u> : Soit E un espace de Banach p-lisse, $y_1,\dots,y_n$ des éléments de E avec $\sum_{j=1}^{n} y_j = 0$. On suppose qu'il existe des constantes $A,B\in\,]0,\infty[$ telles que :

$$\forall\,\omega \text{ permutation de } \{1,\dots,n\} \qquad \forall\, a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$$

$$A\,\Big\|\sum_{j=1}^{n} a_j y_j\Big\| \le \Big\|\sum_{j=1}^{n} a_j\, y_{\omega(j)}\Big\| \le B\,\Big\|\sum_{j=1}^{n} a_j y_j\Big\|$$

On a alors :

$$\forall\, a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R} \qquad \Big\|\sum_{j=1}^{n} a_j y_j\Big\| \le K\big(\Sigma\,|a_j|^p\big)^{1/p}\,\|y_1\|$$

(où K ne dépend que de E,p,A,B)

<u>Démonstration</u> : On applique le corollaire 1 aux v.a. de l'exemple a).

La proposition 2 relie ce qui précède avec la notion de type p-Rademacher.

<u>Proposition 2</u> : Soit E un espace de Banach, soit $p\in\,]1,2]$.
On suppose qu'il existe $K<\infty$ tel que pour toute v.a. $Y_1,\dots,Y_n$ échangeables à valeurs dans E et de somme nulle, on ait :

$$\sup_{i=1,\dots,n} E\,\Big\|\sum_{j=1}^{i} Y_j\Big\|^p \le K\, E\sum_{j=1}^{n}\|Y_j\|^p$$

Alors E est de type p-Rademacher.

<u>Démonstration</u> : Soit $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ des v.a. de Bernouilli (ou de Rademacher) indépendantes et $y_1,\dots,y_n$ des éléments de E avec $\sum_{j=1}^{n} y_j = 0$.

On a

$$E\|\Sigma y_j\sigma_j\|^p = \frac{1}{2^n} \sum_{A\subset\{1,\dots,n\}} \|\sum_{j\in A} y_j - \sum_{j\notin A} y_j\|^p$$

$$= 2^p \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{A\subset\{1,\dots,n\}} \|\sum_{j\in A} y_j\|^p$$

$$= 2^p \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} E\|\sum_{j=1}^{i} Y_j\|^p$$

où les v.a. $Y_j$ sont construites comme dans l'exemple a).

On a donc :

$$E\|\Sigma y_j\ \sigma_j\|^p \leq 2^p K \sum_{j=1}^{n} \|y_j\|^p$$

Pour se débarasser de la restriction $\sum_{j=1}^{n} y_j = 0$, on applique l'inégalité obtenue à la suite $y_1,\dots,y_n,-y_1,\dots,-y_n$, ce qui donne le type p pour des variables $\sigma-\sigma'$ ($\sigma,\sigma'$ Bernouilli indépendantes) et donc (cf. [2]) le type p-Rademacher.

---------------

## BIBLIOGRAPHIE

[1] Garsia : Topics in almost everywhere convergence (Chicago) 86-97

[2] Pisier G. : Séminaire Maurey-Schwartz 1973-1974, exposé N° 3.

---------------