

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

P. ASSOUAD

Espaces p -lisses et q -convexes. Inégalités de Burkholder

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 15, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975__A14_0>

© Séminaire analyse fonctionnelle (dit "Maurey-Schwartz")
(École Polytechnique), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 4 - 1 9 7 5

ESPACES p -LISSES ET q -CONVEXES

INEGALITES DE BURKHOLDER

par P. ASSOUAD

Exposé N^o XV

5 Mars 1975

Notations. Soient E un espace de Banach réflexif, (Ω, \mathcal{O}, P) un espace de probabilité, $(\mathcal{O}_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite croissante de sous tribus de \mathcal{O} , $p \in]1, 2]$, $q \in [2, \infty[$, $\varepsilon > 0$. Soit $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite adaptée (aux \mathcal{O}_i) de v.a. intégrables à valeurs dans E . On pose $\Delta X_{i+1} = X_{i+1} - X_i$, $dX_i = E(\Delta X_{i+1} \mid \mathcal{O}_i)$.

Définitions. 1) E est p -lisse si on a :

$$(1) \quad \exists K < \infty \quad \forall x, y \in E \quad \frac{1}{2}(\|x+y\|^p + \|x-y\|^p) \leq \|x\|^p + K \|y\|^p$$

2) E est q -convexe si on a :

$$(2) \quad \exists k > 0 \quad \forall x, y \in E \quad \frac{1}{2}(\|x+y\|^q + \|x-y\|^q) \geq \|x\|^q + k \|y\|^q$$

3) $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ est dans $d(\varepsilon, -)$ si on a :

$$\forall i \in \mathbf{N} \quad \|\varepsilon X_i - dX_i\| \geq \|\varepsilon X_i\|$$

4) $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ est dans $d(\varepsilon, +)$ si on a :

$$\forall i \in \mathbf{N} \quad \|(1+\varepsilon)X_i + dX_i\| \geq \|(1+\varepsilon)X_i\|$$

Exemples : a) Une martingale est dans $d(\varepsilon, -)$ et $d(\varepsilon, +)$ pour tout ε . Une surmartingale positive (resp. Sousmartingale positive) est dans $d(\varepsilon, -)$ (resp. $d(\varepsilon, +)$) pour tout ε .

b) Plus généralement soit $(M_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une martingale à valeurs dans E , $(A_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite prévisible de v.a. réelles ($A_i \in \mathcal{O}_{i-1} \quad \forall i \in \mathbf{N}$, $\mathcal{O}_{-1} = \mathcal{O}_0$) et $X_i = A_i M_i$. Alors $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ est dans $d(\varepsilon, -)$ (resp. $d(\varepsilon, +)$) si et seulement si $(A_i)_{i \in \mathbf{N}}$ est dans $d(\varepsilon, -)$ (resp. $d(\varepsilon, +)$). C'est le cas en particulier si $(A_i)_{i \in \mathbf{N}}$ est positive décroissante (resp. positive croissante).

c) Enfin soit $(y_j)_{j \in \mathbf{N}}$ une suite monotone (au sens des espaces de Banach) d'éléments de E , $(t_j)_{j \in \mathbf{N}}$ une suite de réels et

$$X_i = \sum_{j=1}^i t_j y_j \quad (\text{v.a. certaine}). \text{ Alors } (X_i)_{i \in \mathbf{N}} \text{ est dans } d(\varepsilon, -) \text{ et } d(\varepsilon, +)$$

pour tout ε .

Proposition 1 : Soit E un espace de Banach p-lisse (resp. q-convexe), $\varepsilon > 0$ et $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite adaptée dev. a. à valeurs dans E. On suppose que $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est dans $d(\varepsilon, -)$ (resp. $d(\varepsilon, +)$). Alors il existe $K_\varepsilon < \infty$ (resp. $k_\varepsilon > 0$) ne dépendant que de ε et de E tel qu'on ait :

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad E(\|X_{i+1}\|^p \mid \mathcal{G}_i) \leq \|X_i\|^p + K_\varepsilon E(\|\Delta X_{i+1}\|^p \mid \mathcal{G}_i)$$

$$(\text{resp. } \forall i \in \mathbb{N} \quad E(\|X_{i+1}\|^q \mid \mathcal{G}_i) \geq \|X_i\|^q + k_\varepsilon E(\|\Delta X_{i+1}\|^q \mid \mathcal{G}_i))$$

Démonstration : 0) Comme le résultat ne fait jouer que deux indices on peut se contenter de prendre $i = 0, i+1 = 1$. De plus soit $A \in \mathcal{G}_0$ si (X_0, X_1) est dans $d(\varepsilon, -)$ (resp. $d(\varepsilon, +)$) il en est de même de (X_{0A}, X_{1A}) . Il suffit donc de montrer qu'on a :

$$E(\|X_1\|^p) \leq E(\|X_0\|^p + K_\varepsilon \|\Delta X_1\|^p)$$

$$(\text{resp. } E(\|X_1\|^q) \geq E(\|X_0\|^q + k_\varepsilon \|\Delta X_1\|^q))$$

On note τ_ε une v.a. telle que $P(\tau_\varepsilon = 1) = \frac{1}{1+\varepsilon} \quad P(\tau_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}) = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

1) Soit E p-lisse et (X_0, X_1) dans $d(\varepsilon, -)$

a) Soit (X'_0, X'_1) dans $d(1, -)$, on intègre (1) avec $x = X'_0, y = \Delta X'_1$.

On obtient

$$\frac{1}{2} E(\|X'_1\|^p + \|X'_0 - \Delta X'_1\|^p) \leq E(\|X'_0\|^p + K \|\Delta X'_1\|^p)$$

Or

$$E(\|X'_0 - \Delta X'_1\|^p) \geq E(\|X'_0 - dX'_0\|^p) \geq E(\|X'_0\|^p)$$

Donc

$$(1') \quad E(\|X'_1\|^p) \leq E(\|X'_0\|^p + 2K \|\Delta X'_1\|^p).$$

b) Soit x, y des éléments de E. On applique (1') à la martingale $X'_0 = x, X'_1 = x + \tau_\varepsilon y$. On obtient

$$(1'') \quad \frac{1}{1+\varepsilon} \|x+y\|^p + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \|x - \frac{y}{\varepsilon}\|^p \leq \|x\|^p + 2K \|\tau_\varepsilon\|_p^p \|y\|^p$$

On intègre (1'') avec $x = X_0$, $y = \Delta X_1$. On obtient

$$E\left(\frac{1}{1+\varepsilon} \|X_1\|^p + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \left\|X_0 - \frac{\Delta X_1}{\varepsilon}\right\|^p\right) \leq E\left(\|X_0\|^p + 2K \|\tau_\varepsilon\|_p^p \|\Delta X_1\|^p\right)$$

Or

$$E\left(\left\|X_0 - \frac{\Delta X_1}{\varepsilon}\right\|^p\right) \geq E\left(\left\|X_0 - \frac{dX_0}{\varepsilon}\right\|^p\right) \geq E\left(\|X_0\|^p\right)$$

Donc

$$E\left(\|X_1\|^p\right) \leq E\left(\|X_0\|^p + 2K(1+\varepsilon) \|\tau_\varepsilon\|_p^p \|\Delta X_1\|^p\right)$$

2) Soit E q -convexe et (X_0, X_1) dans $d(\varepsilon, +)$

a) Soit (X'_0, X'_1) dans $d(1, +)$

On intègre (2) avec $x = X'_0 + \frac{\Delta X'_1}{2}$, $y = \frac{\Delta X'_1}{2}$. On obtient

$$\frac{1}{2} E\left(\|X'_1\|^q + \|X'_0\|^q\right) \geq E\left(\left\|X'_0 + \frac{\Delta X'_1}{2}\right\|^q + k2^{-q} \|\Delta X'_1\|^q\right)$$

Or

$$E\left(\left\|X'_0 + \frac{\Delta X'_1}{2}\right\|^q\right) \geq E\left(\left\|X'_0 + \frac{dX'_0}{2}\right\|^q\right) \geq E\left(\|X'_0\|^q\right)$$

Donc

$$(2') \quad E\left(\|X'_1\|^q\right) \geq E\left(\|X'_0\|^q + 2^{1-q} k \|\Delta X'_1\|^q\right)$$

b) Soit x, y des éléments de E . On applique (2') à la martingale $X'_0 = x$, $X'_1 = x + \tau_\varepsilon y$. On obtient

$$(2'') \quad \frac{1}{1+\varepsilon} \|x+y\|^q + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \left\|x - \frac{y}{\varepsilon}\right\|^q \geq \|x\|^q + 2^{1-q} k \|\tau_\varepsilon\|_q^q \|y\|^q$$

On intègre (2'') avec $x = X_0 + \frac{\Delta X_1}{1+\varepsilon}$, $y = \frac{\varepsilon \Delta X_1}{1+\varepsilon}$. On obtient

$$E\left(\frac{1}{1+\varepsilon} \|X_1\|^q + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \|X_0\|^q\right) \geq E\left(\left\|X_0 + \frac{\Delta X_1}{1+\varepsilon}\right\|^q + 2^{1-q} k \left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^q \|\tau_\varepsilon\|_q^q \|\Delta X_1\|^q\right)$$

Or

$$E\left(\left\|X_0 + \frac{\Delta X_1}{1+\varepsilon}\right\|^q\right) \geq E\left(\left\|X_0 + \frac{dX_0}{1+\varepsilon}\right\|^q\right) \geq E\left(\left\|X_0\right\|^q\right)$$

Donc

$$E\left(\left\|X_1\right\|^q\right) \geq E\left(\left\|X_0\right\|^q + (2+2\varepsilon)^{1-q} \varepsilon^q k \left\|\tau_\varepsilon\right\|_q^q \left\|\Delta X_1\right\|^q\right)$$

Corollaire : Soit E un espace de Banach p-lisse (resp. q-convexe), $\varepsilon > 0$ et $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite adaptée de v.a. à valeurs dans E. On suppose que $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ est dans $d(\varepsilon, -)$ (resp. $d(\varepsilon, +)$). On note alors

$$S_p X_i = \left(\left\|X_0\right\|^p + K_\varepsilon \sum_{j=1}^i \left\|\Delta X_j\right\|^p \right)^{1/p}$$

(resp. $S_q X_i = \left(\left\|X_0\right\|^q + k_\varepsilon \sum_{j=1}^i \left\|\Delta X_j\right\|^q \right)^{1/q}$)

Alors $(S_p X_i)^p - \left\|X_i\right\|^p$ (resp. $\left\|X_i\right\|^q - (S_q X_i)^q$) est une sous martingale nulle pour $i = 0$.

Remarque : Supposons $\left\|\Delta X_{i+1}\right\| \leq W_i \quad \forall i \in \mathbf{N}$ où $(W_i)_{i \in \mathbf{N}}$ est une suite adaptée de v.a. positives. Gardant les notations du corollaire, on a pour tout $i \in \mathbf{N}$:

$$(S_p X_{i+1})^p \leq (S_p X_i)^p + K_\varepsilon W_i^p \quad (\text{resp. } (S_q X_{i+1})^q \leq (S_q X_i)^q + k_\varepsilon W_i^q)$$

$$\left\|X_{i+1}\right\|^p \leq 2^{p-1} (\left\|X_i\right\|^p + W_i^p) \quad (\text{resp. } \left\|X_{i+1}\right\|^q \leq 2^{q-1} (\left\|X_i\right\|^q + W_i^q))$$

Le lemme suivant adapte à un cas plus général une idée de [1] :

Lemme : Soit $(A_i)_{i \in \mathbf{N}}$, $(B_i)_{i \in \mathbf{N}}$, $(V_i)_{i \in \mathbf{N}}$ des suites adaptées de v.a. réelles, $a \in \mathbf{R}$ et Φ une fonction de Young (c'est-à-dire $[0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ continue, croissante, nulle en 0).

On suppose qu'on a : $A_i \geq 0, B_i \geq 0, V_i \geq 0 \quad \forall i \in \mathbf{N}$

$(B_i - A_i)_{i \in \mathbf{N}}$ est une sous martingale

$$A_0 \leq a B_0$$

$$A_{i+1} \leq a(A_i + V_i), \quad B_{i+1} \leq a(B_i + V_i) \quad \forall i \in \mathbf{N}$$

$$\exists r \quad \frac{\Phi(x)}{x^r} \searrow$$

On pose $A^* = \sup_i A_i$, $B^* = \sup_i B_i$, $V^* = \sup_i V_i$.

On a alors

$$E \Phi(A^*) \leq c [E \Phi(V^*) + \Phi(B^*)]$$

(où c ne dépend que de a et r).

Démonstration : On pose $\mu = \inf \{i \mid A_i > 1\}$, $\nu = \inf \{i \mid A_i > \beta\}$

$$\sigma = \inf \{i \mid B_i \vee V_i > \delta\} \text{ avec } \beta > 1 \text{ et } 0 < \delta < \frac{\beta}{\alpha} - 1$$

1) On a $A_{\nu \wedge \sigma} - A_{\mu \wedge \sigma} > \beta - a(\delta+1)$ sur $\{\nu < \infty, \sigma = \infty\}$

en effet, on a $A_{\nu \wedge \sigma} = A_\nu > \beta$.

Par ailleurs $A_{\mu \wedge \sigma} = A_\mu \leq a(A_{\mu-1} + V_{\mu-1}) \leq a(\delta+1)$ si $\mu > 0$

$$= A_0 \leq a B_0 \leq a\delta \text{ si } \mu = 0$$

2) On a $B_{\nu \wedge \sigma} - B_{\mu \wedge \sigma} \leq 2a\delta 1_{\{\mu < \infty\}}$

en effet, $B_{\nu \wedge \sigma} - B_{\mu \wedge \sigma} \leq a(B_{(\nu \wedge \sigma)-1} + V_{(\nu \wedge \sigma)-1}) \leq 2a\delta$ si $\nu \wedge \sigma > 0$.

Par ailleurs, comme $\beta > 1$ entraîne $\mu \leq \nu$, on a $B_{\nu \wedge \sigma} = B_{\mu \wedge \sigma}$ dès que $\nu \wedge \sigma = 0$ ou $\mu = \infty$.

3) On en déduit successivement :

$$P(\nu < \infty, \sigma = \infty) \leq P(A_{\nu \wedge \sigma} - A_{\mu \wedge \sigma} > \beta - a(\delta+1))$$

$$\leq \frac{1}{\beta - a(\delta+1)} E(A_{\nu \wedge \sigma} - A_{\mu \wedge \sigma})$$

$$\leq \frac{1}{\beta - a(\delta+1)} E(B_{\nu \wedge \sigma} - B_{\mu \wedge \sigma})$$

(car $(B_i - A_i)_{i \in \mathbf{N}}$ est une sous martingale et $\nu \wedge \sigma \geq \mu \wedge \sigma$)

$$\leq \frac{2a\delta}{\beta - a(\delta+1)} P(\mu < \infty)$$

4) On trouve donc

$$\begin{aligned} P(A^* > \beta) &\leq P(B^* \vee V^* > \delta) + P(\psi < \infty, \sigma = \infty) \\ &\leq P(B^* \vee V^* > \delta) + \frac{2a\delta}{\beta - a(\delta+1)} P(A^* > 1) \end{aligned}$$

On écrit cette inégalité pour $\frac{A}{\lambda}$, $\frac{B}{\lambda}$, $\frac{V}{\lambda}$ et on intègre par rapport à $d\phi(\lambda)$.

On obtient :

$$E\phi\left(\frac{A^*}{\beta}\right) \leq E\phi\left(\frac{B^* \vee V^*}{\delta}\right) + \frac{2a\delta}{\beta - a(\delta+1)} E\phi(A^*)$$

Or $\frac{\phi(x)}{x^r} \searrow \Rightarrow \phi\left(\frac{x}{\beta}\right) \geq \frac{1}{\beta^r} \phi(x) \quad (\text{car } \beta > 1)$

Le résultat est démontré si on a choisi δ assez petit pour que :

$$\frac{2a\delta}{\beta - a(\delta+1)} < \frac{1}{\beta^r}$$

Proposition 2 : Soit E un espace de Banach p-lisse (resp. q-convexe) $\varepsilon > 0$, $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite adaptée de v.a. à valeurs dans E, $(W_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une suite adaptée de v.a. positives et ϕ une fonction de Young à croissance modérée (c'est-à-dire $\exists r \frac{\phi(x)}{x^r} \searrow$).

On pose $X^* = \sup_i \|X_i\|$, $W^* = \sup_i W_i$, $S_p X = \sup_i S_p X_i$ (resp. $S_q X = \sup_i S_q X_i$).

a) Si on a $\|\Delta X_{i+1}\| \leq W_i \quad \forall i \in \mathbf{N}$ et si $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ est dans $d(\varepsilon, -)$ (resp. $d(\varepsilon, +)$), alors on a :

$$E\phi(X^*) \leq c_1 E[\phi(W^*) + \phi(S_p X)]$$

(resp. $E\phi(S_q X) \leq c_2 E[\phi(W^*) + \phi(X^*)]$)

b) Si $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ est une martingale et si ϕ est convexe, alors on a :

$$E\phi(X^*) \leq c_3 E\phi(S_p X)$$

(resp. $E\phi(S_q X) \leq c_2 E\phi(X^*)$)

Les constantes c_1, c_2, c_3, c_4 ne dépendant que de E, r et p (resp. q).

Démonstration : a) C'est une simple application du lemme avec

$$A_i = \|X_i\|^p, \quad B_i = (S_p X_i)^p, \quad V_i = W_i^p$$

$$(\text{resp. } A_i = (S_q X_i)^q, \quad B_i = \|X_i\|^q, \quad V_i = W_i^q)$$

b) La décomposition de Davis de la martingale $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ permet de ramener b) à a) et au lemme de convexité de Burkholder-Davis-gundy. On renvoie à [1] et [2].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D.L. Burkholder : Annals of Probability 1973 vol. 1 n° 1 19-42.
 [2] Adriano M. Garsia : Annals of Probability 1973 vol. 1 n° 1 171-174.
-