SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. BEAUZAMY

Propriétés géométriques des espaces d'interpolation

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. nº 14, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A13_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 4 - 1 9 7 5

PROPRIETES GEOMETRIQUES DES ESPACES D'INTERPOLATION

par B. **BEAUZAMY**

Exposé n° XIV

26 Février 1975

Il est apparu au travers de certains résultats que les espaces d'interpolation de Lions-Peetre constituaient un cadre privilégié pour la résolution de questions concernant la géométrie d'espaces intermédaires ; par exemple, réflexivité, uniforme convexité, etc... Nous allons exposer ces résultats en montrant leurs applications.

Nous renvoyons à [5] pour les propriétés de base des espaces d'interpolation. Néanmoins, comme la démonstration de plusieurs des propriétés que nous allons établir repose sur l'utilisation de normes équivalentes, nous allons faire quelques rappels utiles pour notre objet.

§ 1. NORMES EQUIVALENTES DANS LES ESPACES D'INTERPOLATION

Soient A_o, A_1 deux espaces de Banach contenus dans un même e.v.t.l.c.s. A. Pour tout $\theta \in]0,1[$ et tout $p \in [1,\infty]$, les quatre normes suivantes sont équivalentes et définissent l'espace d'interpolation $A = (A_o, A_1)_{\theta,p}$:

$$\|u\|_{S_1} = \inf_{a=\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,dt} \max(\|e^{\xi_o t} u(t)\|_{L^p(A_o)}, \|e^{\xi_1 t} u(t)\|_{L^p(A_1)})$$

$$\|u\|_{S_2} = \inf_{u_o(t)+u_1(t)=u \text{ p.p}} \max(\|e^{\xi_o t} u_o(t)\|_{L^p(A_o)}, \|e^{\xi_1 t} u_1(t)\|_{L^p(A_1)})$$

$$\|u\|_{s_1} = \inf_{u=\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n} \max(\|e^{\xi_o n} u(n)\|_{\ell^p(A_o)}, \|e^{\xi_1 n} u(n)\|_{\ell^p(A_1)})$$

$$\|u\|_{s_2} = \inf_{u_o(n)+u_1(n)=u\ \forall n} \max(\|e^{\xi_o n} u_o(n)\|_{\ell^p(A_o)}, \|e^{\xi_1 n} u_1(n)\|_{\ell^p(A_1)})$$

où ξ_o, ξ_1 sont deux nombres réels tels que $\dfrac{\xi_o}{\xi_o - \xi_1} = \theta$.

Les normes S_1 et S_2 admettent une autre formulation, particulièrement commode :

$$(1)\begin{cases} \|u\|_{S_1} = \inf\limits_{\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,dt=u} \|e^{\xi_o t} u(t)\|^{1-\theta}_{L^p(A_o)} \cdot \|e^{\xi_1 t} u(t)\|^{\theta}_{L^p(A_1)} \\ \|u\|_{S_2} = \inf\limits_{u_o(t)+u_1(t)=u,\,ppt} \|e^{\xi_o t} u_o(t)\|^{1-\theta}_{L^p(A_o)} \cdot \|e^{\xi_1 t} u_1(t)\|^{\theta}_{L^p(A_1)} \end{cases}$$

<u>Proposition 1</u> :

a) La norme de A est équivalente à la norme :

$$(2) \quad \|u\| = \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} \inf_{u_o+u_1=u} \max(\|e^{\xi_o n} u_o\|^p_{A_o}, \|e^{\xi_1 n} u_1\|^p_{A_1})\right]^{1/p}$$

Cette norme s'écrit encore

(2') $\|u\| = (\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} \|u\|^p_n)^{1/p}$ où $\|u\|_n$ est la jauge du convexe $e^{-\xi_o n} B_o + e^{-\xi_1 n} B_1$

(B_o et B_1 sont les boules unité de A_o et A_1 respectivement).

b) S'il existe une injection continue $i : A_o \to A_1$ (on écrira $A_o \subset A_1$) et si $i(B_o)$ est faiblement compact dans A_1, on peut, pour chaque $u \in A$ et pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, trouver $u_o \in A_o$, $u_1 \in A_1$ avec

$$u_o + u_1 = u \ , \quad \text{et}$$

$$(3) \quad \max(\|e^{\xi_o n} u_o\|_{A_o}, \|e^{\xi_1 n} u_1\|_{A_1}) = \inf_{\tilde{u}_o+\tilde{u}_1=u} \max(\|e^{\xi_o n} \tilde{u}_o\|_{A_o}, \|e^{\xi_1 n} \tilde{u}_1\|_{A_1})$$

(nous dirons que u_o, u_1 forment une représentation de u).

c) Si en outre A_o est dense dans A_1, tous les couples (u_o, u_1) satisfaisant (3) vérifient en outre :

$$(4) \qquad \|e^{\xi_o n} u_o\|_{A_o} = \|e^{\xi_1 n} u_1\|_{A_1} .$$

Démonstration

a) On choisit :

$$\|u\|_{s_2} = \inf_{u_o(n)+u_1(n)=u\ \forall n} \max \left(\|e^{\xi_o n} u_o(n)\|_{\ell^p(A_o)}, \|e^{\xi_1 n} u_1(n)\|_{\ell^p(A_1)}\right)$$

Cette norme est évidemment équivalente à la norme :

$$\|u\|_1 = \inf_{u_o(n)+u_1(n)=u\ \forall n} \left(\|e^{\xi_o n} u_o(n)\|^p_{\ell^p(A_o)} + \|e^{\xi_1 n} u_1(n)\|^p_{\ell^p(A_1)}\right)^{1/p}$$

$$= \left[\inf_{u_o(n)+u_1(n)=u\ \forall n} \sum_{-\infty}^{+\infty} \|e^{\xi_o n} u_o\|^p_{A_o} + \|e^{\xi_1 n} u_1(n)\|^p_{A_1}\right]^{1/p}$$

L'infimum étant pris sur tous les termes de la suite, on a :

$$\|u\|_1 = \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} \inf_{u_o+u_1=u} \|e^{\xi_o n} u_o\|^p_{A_o} + \|e^{\xi_1 n} u_1\|^p_{A_1}\right]^{1/p}$$

qui est évidemment équivalente à celle annoncée dans la proposition. Il est évident par ailleurs que cette norme s'écrit $\|u\| = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \|u\|^p_n\right)^{1/p}$, où $\|u\|_n$ est la jauge de $\mathcal{U}_n = e^{-\xi_o n} B_o + e^{-\xi_1 n} B_1$.

Remarquons qu'avec cette nouvelle définition, on ne conserve plus le bénéfice des formules (1). Les paragraphes b) et c) permettent de pallier cet inconvénient .

b) Nous supposons maintenant $A_o \subset A_1$, l'injection étant de norme 1. Nous supposons en outre B_o faiblement compact dans A_1.

Pour chaque n, la jauge de $\mathcal{U}_n = e^{-\xi_o n} B_o + e^{-\xi_1 n} B_1$ est une norme équivalente à la norme de A_1. En effet

$$e^{-\xi_1 n} B_1 \subset e^{-\xi_o n} B_o + e^{-\xi_1 n} B_1 \subset (e^{-\xi_o n} + e^{-\xi_1 n}) B_1 .$$

Pour chaque n, l'ensemble $\mathcal{U}_n$ est fermé dans A_1 : en effet, $e^{-\xi_o n} B_o$ est faiblement compact , $e^{-\xi_1 n} B_1$ est fermé, et donc la somme est faiblement fermée, donc fermée.

On sait que

$$\|u\|_n = \inf\{\lambda,\ \lambda\,\mathcal{U}_n \ni u\}$$

Soit $\alpha = \inf\{\lambda,\ \lambda\,\mathcal{U}_n \ni u\}$; montrons que $\alpha\,\mathcal{U}_n \ni u$. Soit $\lambda_m \geq \alpha$ une suite convergeant vers α, telle que $u \in \lambda_m \mathcal{U}_n$. On a donc $\frac{u}{\lambda_m} \to \frac{u}{\alpha}$, et puisque $\mathcal{U}_n$ est fermé, $\frac{u}{\alpha} \in \mathcal{U}_n$, et donc $u \in \alpha\,\mathcal{U}_n$.

Puisque $\frac{u}{\alpha} \in \mathcal{U}_n$, on peut trouver $a_o \in e^{-\xi_o n} B_o$, $a_1 \in e^{-\xi_1 n} B_1$, avec $\frac{u}{\alpha} = a_o + a_1$. Si l'on pose $u_o = \alpha a_o$, $u_1 = \alpha a_1$, on a $\|e^{-\xi_o n} u_o\|_{A_o} \leq \alpha$, $\|e^{-\xi_1 n} u_1\|_{A_o} \leq \alpha$, ce qui prouve le point b).

c) Nous supposons maintenant en outre A_o dense dans A_1. Nous voulons montrer que si u_o et u_1 vérifient

$$u_o + u_1 = u, \quad \max(\|e^{\xi_o n} u_o\|_{A_o}, \|e^{\xi_1 n} u_1\|_{A_1}) = \inf_{\tilde{u}_o + \tilde{u}_1 = u} \max\,(\|e^{\xi_o n}\tilde{u}_o\|_{A_o}, \|e^{\xi_1 n}\tilde{u}_1\|_{A_1})$$

alors $\|e^{\xi_o n} u_o\|_{A_o} = \|e^{\xi_1 n} u_1\|_{A_1}$.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Deux cas peuvent se produire :

α) $\|e^{\xi_o n} u_o\|_{A_o} > \|e^{\xi_1 n} u_1\|_{A_1} + \delta$, $\delta > 0$.

On va montrer que l'on peut diminuer le terme $\|e^{\xi_o n} u_o\|_{A_o}$ sans trop augmenter le terme $\|e^{\xi_1 n} u_1\|_{A_1}$, en remplaçant (u_o, u_1) par $(u_o - \lambda u_o,\ u_1 + \lambda u_o)$ $\lambda \in]0,1[$. On a

$$\|e^{\xi_1 n}(u_1 + \lambda u_o)\|_{A_1} \leq \|e^{\xi_1 n} u_1\|_{A_1} + \lambda\, e^{\xi_1 n} \|u_o\|_{A_1}$$

$$\leq \|e^{\xi_1 n} u_1\|_{A_1} + \delta/2$$

dès que $\lambda \leq \delta/2\, e^{\xi_1 n} \|u_o\|_{A_1} = \alpha$.

Par ailleurs

$$\|e^{\xi_o n}(u_o - \lambda u_o)\|_{A_o} = (1-\lambda)\|e^{\xi_o n} u_o\|_{A_o} < \|e^{\xi_o n} u_o\|_{A_o}$$

ceci prouve que (u_o,u_1) n'était pas la meilleure représentation possible et contredit (3) .

β) $\|e^{\xi_1 n} u_1\|_{A_1} > \|e^{\xi_o n} u_o\|_{A_o} + \delta$, $\delta > 0$.

on va faire le même raisonnement, mais comme $u_1 \notin A_o$, on utilisera la densité de A_o dans A_1.

Pour tout $a \in A_o$, on a :

$$\|e^{\xi_o n}(u_o+a)\|_{A_o} \le \|e^{\xi_o n} u_o\|_{A_o} + e^{\xi_o n}\|a\|_{A_o}$$
$$\le \|e^{\xi_o n} u_o\|_{A_o} + \delta/2$$

dès que

$$\|a\|_{A_o} \le e^{-\xi_o n}\delta/2 = \beta \ .$$

Notons K le sous-ensemble de A_1 constitué des a tels que $\|a\|_{A_o} \le \beta$.

Pour achever la démonstration, il nous suffit de montrer que l'on peut trouver $a \in K$ tel que

$$\|e^{\xi_1 n}(u_1-a)\|_{A_1} < \|e^{\xi_1 n} u_1\|_{A_1} \ .$$

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, et que l'on ait pour tout $a \in K$

$$\|u_1 - a\|_{A_1} \ge \|u_1\|_{A_1}$$

L'ensemble $M = \{u_1 - a, a \in K\} \subset A_1$ est alors disjoint de la boule ouverte, dans A_1, centrée à l'origine et de rayon $\|u_1\|_{A_1}$. On peut séparer M et cette boule par un hyperplan fermé ; u_1, appartenant à la boule fermée, appartient à cet hyperplan. Le demi-espace limité par cet hyperplan et contenant M est invariant par les homothéties de centre u_1 et de rapport positif, donc ce demi-espace contient aussi l'ensemble $\{u_1 - a, a \in A_o\}$, c'est à dire $u_1 + A_o$. Ceci contredit l'hypothèse de densité de A_o dans A_1, achève la démonstration du point c) et celle de la proposition.

Cette nouvelle norme va se révéler très commode pour l'étude de certaines propriétés des espaces d'interpolation ; la première de ces propriétés est la réflexivité.

§ 2. REFLEXIVITE

Théorème : Si $A_o \subset A_1$, les espaces $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ sont réflexifs, pour $0 < \theta < 1$, $1 < p < \infty$. si et seulement si l'injection $i : A_o \to A_1$ est faiblement compacte.

Démonstration : On prendra la norme donnée par la proposition 1.

$$\|u\| = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \|u\|_n^p \right)^{1/p}$$

L'idée de la démonstration est celle de Davis-Figiel-Johnson-Pełczinski dans [3].

On note $A_{1,n}$ l'espace A_1 muni de $\|.\|_n$; comme on l'a vu, cette norme est équivalente à la norme de A_1.

Notons $Z = (\sum_n A_{1,n})_P$ l'ensemble des suites (z_n), $n \in \mathbb{Z}$, avec $z_n \in A_{1,n}$ $\forall n$, normé par

$$\|(z_n)\| = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \|z_n\|^P \right)^{1/p}$$

Si j désigne l'injection de A dans A_1, on définit $\varphi : A \to Z$ par

$$\varphi(y) = (\ldots,jy,jy,\ldots)$$

et on vérifie que φ est un plongement isométrique de A dans Z, dont l'image est fermée. Si π_o désigne la projection de Z sur sa coordonnée d'indice 0, on a :

$$j = \pi_o \circ \varphi .$$

Puisque $Z = (\sum_{+\infty}^{-\infty} A_{1,n})_p$, on a $Z'' = (\sum_{-\infty}^{+\infty} A''_{1,n})_p$ et on en déduit

$$j'' = \pi''_o \circ \varphi'' .$$

Il en résulte que j'' est injective, et par conséquent $j''^{-1}(A_1) = A$; on a par ailleurs, si B désigne la boule unité de A :

$$j(B) \subset e^{-\xi_o n} B_o + e^{-\xi_1 n} B_1$$

et donc

$$j''(B'') \subset e^{-\xi_o n} \overline{B}_o + e^{-\xi_1 n} B''_1$$

car $\overline{B}_o$ est $\sigma(A_1,A'_1)$ compact, donc $\sigma(A''_1,A'_1)$ compact, donc $\sigma(A''_1,A'_1)$ fermé, d'où $j''(B'') \subset A_1$, et $B'' \subset A$, et A est réflexif.

La réciproque est évidente : si l'un des $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ est réflexif, l'injection de A_o dans A_1, qui se factorise par cet espace, est faiblement compacte.

Signalons que dans le cas où A_o n'est pas inclus dans A_1 la condition nécessaire et suffisante à imposer pour que $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ soit réflexif n'est pas connue.

Dans le cas où $A_o \subset A_1$ et $p = 1$ ou $p = \infty$, on peut conjecturer que les espaces $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ ne sont jamais réflexifs, à moins que $A_o = A_1$ ne soit réflexif.

Le résultat que nous avons obtenu au théorème 1 montrer que les espaces d'interpolation occupent une place privilégiée pour l'étude de la réflexivité des espaces intermédaires : si l'on sait qu'entre A_o et A_1 se trouve un espace réflexif, on peut choisir pour cet espace un espace d'interpolation.

Nous allons maintenant montrer que, dans une certaine mesure, cette place existe encore pour l'étude des propriétés de convexité.

§ 3. PROPRIETES DE CONVEXITE

Nous allons étudier successivement l'uniforme convexité et la stricte convexité des espaces $(A_o, A_1)_{\theta,p}$, $0 < \theta < 1$, $1 < p < \infty$, et montrer que si A_o ou A_1 possède l'une de ces propriétés, ils la possèdent aussi. Rappelons qu'un espace E est dit uniformément convexe si $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, $\forall x, y \in E$, les conditions $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x - y\| \geq \varepsilon$ impliquent $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta$.

Il est dit strictement convexe si la sphère unité ne contient pas de segment : si $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|\frac{x+y}{2}\| < 1$.

Les démonstrations utilisent un lemme :

<u>Lemme</u> : Si un espace de Banach E est uniformément convexe ou strictement convexe, il en est de même de $L^p(E)$, pour $1 < p < \infty$.

La démonstration de ce lemme, dans le cas de l'uniforme convexité, se trouve dans Köthe [4] ; le cas de la stricte convexité s'obtient par une modification de la méthode de [4].

<u>Proposition 2</u> : Soient A_o, A_1 deux espaces de Banach. Si l'un des deux est uniformément convexe, les espaces $(A_o, A_1)_{\theta,p}$, $0 < \theta < 1$, $1 < p < \infty$, le sont aussi.

Plus précisément, si $L^p(A_o)$ et $L^p(A_1)$ ont pour module de convexité $\delta_p^o(\varepsilon)$, $\delta_p^1(\varepsilon)$ ($\delta = 0$ si l'espace n'est pas uniformément convexe), le module de convexité de $(A_o, A_1)_{\theta,p}$ est équivalent à

$(1-\theta)\delta_p^o(\varepsilon^{\frac{1}{1-\theta}}) + \theta\, \delta_p^1(\varepsilon^{1/\theta})$ pour ε assez petit.

<u>Démonstration</u> : Les propriétés d'uniforme convexité ne sont pas invariantes par isomorphisme, et dépendent par conséquent de la norme choisie. Les propriétés que nous avons mentionnées s'obtiennent pour les normes S_1 et S_2 ; elles utilisent en effet de façon fondamentale les formules (1). Il est assez remarquable de constater que précisément ces deux normes, sans modification, donnent le résultat ; nous y voyons une raison supplémentaire de mentionner la bonne adaptation de l'interpolation aux propriétés de convexité.

Choisissons par exemple la définition S 1. Soient $u, v \in A$ avec $\|u\| = \|v\| = 1$, $\|u - v\| \geq 2\varepsilon$. Soit $\eta > 0$. On peut trouver, par définition, deux fonctions $u(t)$, $v(t)$, avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,dt = u, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)\,dt = v \quad ,$$

et

$$(5)\quad \begin{cases} \|e^{\xi_o t} u(t)\|_{L^p(A_o)} \leq 1+\eta \ , & \|e^{\xi_1 t} u(t)\|_{L^p(A_1)} \leq 1+\eta \\ \|e^{\xi_o t} v(t)\|_{L^p(A_o)} \leq 1+\eta \ , & \|e^{\xi_1 t} v(t)\|_{L^p(A_1)} \leq 1+\eta \end{cases}$$

Par ailleurs :

$$\varepsilon \leq \left\|\frac{u-v}{2}\right\| \leq \left\|e^{\xi_o t}\frac{u(t)-v(t)}{2}\right\|^{1-\theta}_{L^p(A_o)} \cdot \left\|e^{\xi_1 t}\frac{u(t)-v(t)}{2}\right\|^{\theta}_{L^p(A_1)}$$

Posons $u'(t) = \dfrac{u(t)}{1+\eta}$, $v'(t) = \dfrac{v(t)}{1+\eta}$.

On a :

$$\left\|e^{\xi_o t}\frac{u'(t)-v'(t)}{2}\right\|^{1-\theta}_{L^p(A_o)} \leq 1, \quad \left\|e^{\xi_1 t}\frac{u'(t)-v'(t)}{2}\right\|^{\theta}_{L^p(A_1)} \leq 1$$

et donc

$$(6)\quad \begin{cases} \|e^{\xi_o t}(u'(t)-v'(t))\|_{L^p(A_o)} \geq 2\left(\frac{\varepsilon}{1+\eta}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} \\ \\ \|e^{\xi_1 t}(u'(t)-v'(t))\|_{L^p(A_1)} \geq 2\left(\frac{\varepsilon}{1+\eta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \end{cases}$$

Si l'on désigne par $\delta^o_p(\varepsilon)$, $\delta^1_p(\varepsilon)$ les modules de convexité de $L^p(A_o)$, $L^p(A_1)$ respectivement, on déduit de (5) et (6)

$$\left\| e^{\xi_o t} \frac{u'(t)+v'(t)}{2} \right\|_{L^p(A_o)} \leq 1 - \delta_p^o\left(2\left(\frac{\varepsilon}{1+\eta}\right)^{\frac{1}{1-\theta}}\right)$$

$$\left\| e^{\xi_1 t} \frac{u'(t)+v'(t)}{2} \right\|_{L^p(A_1)} \leq 1 - \delta_p^1\left(2\left(\frac{\varepsilon}{1+\eta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)$$

On peut choisir η assez petit pour que $\dfrac{2}{(1+\eta)^{\frac{1}{1-\theta}}} \geq 1$, $\quad \dfrac{2}{(1+\eta)^{\frac{1}{\theta}}} \geq 1$.

On aura alors

$$\delta_p^o\left(2\left(\frac{\varepsilon}{1+\eta}\right)^{\frac{1}{1-\theta}}\right) \geq \delta_p^o\left(\varepsilon^{\frac{1}{1-\theta}}\right)$$

$$\delta_p^1\left(2\left(\frac{\varepsilon}{1+\eta}\right)^{1/\theta}\right) \geq \delta_p^1\left(\varepsilon^{1/\theta}\right)$$

Par ailleurs, on a :

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\| \leq (1+\eta)\left\| e^{\xi_o t} \frac{u'(t)+v'(t)}{2} \right\|^{1-\theta}_{L^p(A_o)} \cdot \left\| e^{\xi_1 t} \frac{u'(t)+v'(t)}{2} \right\|^{\theta}_{L^p(A_1)}$$

$$\leq (1+\eta)\left[1 - \delta_p^o\left(\varepsilon^{\frac{1}{1-\theta}}\right)\right]^{1-\theta} \cdot \left[1 - \delta_p^1\left(\varepsilon^{\frac{1}{\theta}}\right)\right]^{\theta} .$$

Comme ceci est vrai pour tout $\eta > 0$, on en déduit

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\| \leq \left[1 - \delta_p^o\left(\varepsilon^{\frac{1}{1-\theta}}\right)\right]^{1-\theta} \cdot \left[1 - \delta_p^1\left(\varepsilon^{\frac{1}{\theta}}\right)\right]^{\theta}$$

Quand $\varepsilon \to 0$, cette dernière quantité est équivalente à

$$1 - \left[(1-\theta)\,\delta_p^o\left(\varepsilon^{\frac{1}{1-\theta}}\right) + \theta\,\delta_p^1\left(\varepsilon^{\frac{1}{\theta}}\right)\right] .$$

ce qui prouve notre proposition.

Nous allons maintenant passer au cas de la stricte convexité ; le calcul précédent ne s'applique pas sous cette forme, et il faut faire les hypothèses plus fortes.

<u>Proposition 3</u> : On se place dans le cadre des hypothèses de la proposition 1 : $A_o \subset A_1$, dense dans A_1, et la boule de A_o est faiblement compacte dans A_1.

Alors, si A_o ou A_1 est strictement convexe, il en est de même de $(A_o, A_1)_{\theta,p}$ pour $0<\theta<1$, $1<p<\infty$.

<u>Démonstration</u> : Nous allons utiliser la norme donnée dans la proposition 1 et ses propriétés.

Supposons que l'on puisse trouver dans $(A_o, A_1)_{\theta,p}$ deux points u,v avec $\|u\| = \|v\| = \|\frac{u+v}{2}\| = 1$.

Soient $u_o(n)$, $u_1(n)$ une meilleure représentation de u, $v_o(n)$, $v_1(n)$ une meilleure représentation de v, données par la proposition 1. On a :

$$1 = \left\|\frac{u+v}{2}\right\| \leq \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} \max\left(\left\|e^{\xi_o n}\frac{u_o(n)+v_o(n)}{2}\right\|^p_{A_o}, \left\|e^{\xi_1 n}\frac{u_1(n)+v_1(n)}{2}\right\|^p_{A_1}\right)\right]^{1/p}$$

$$\leq \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} \max\left(\frac{1}{2}\left(\|e^{\xi_o n}u_o(n)\|^p_{A_o} + \|e^{\xi_o n}v_o(n)\|^p_{A_o}\right), \frac{1}{2}\left(\|e^{\xi_1 n}u_1(n)\|^p_{A_1} + \|e^{\xi_1 n}v_1(n)\|^p_{A_1}\right)\right)\right]^{1/p}$$

Mais on sait, par la proposition 1, que pour chaque n on a

$$\|e^{\xi_o n}u_o(n)\|_{A_o} = \|e^{\xi_1 n}u_1(n)\|_{A_1}$$

$$\|e^{\xi_o n}v_o(n)\|_{A_o} = \|e^{\xi_1 n}v_1(n)\|_{A_1}$$

Les deux nombres figurant dans le max sont donc égaux, et le max est n'importe lequel d'entre eux. Mais puisque $\|u\| = \|v\| = 1$, on a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\|e^{\xi_o n}u_o(n)\|^p_{A_o} + \|e^{\xi_1 n}v_o(n)\|^p_{A_o}\right) = 1$$

et donc

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \max\left(\left\|e^{\xi_o n}\frac{u_o(n)+v_o(n)}{2}\right\|^p_{A_o}, \left\|e^{\xi_1 n}\frac{u_1(n)+v_1(n)}{2}\right\|^p_{A_1}\right) = 1$$

Il en résulte que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \left\| e^{\xi_o n} \frac{u_o(n)+v_o(n)}{2} \right\|_{A_o}^p = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\| e^{\xi_1 n} \frac{u_1(n)+v_1(n)}{2} \right\|_{A_1}^p = 1$$

Par conséquent, les suites $e^{\xi_o n} u_o(n)$, $e^{\xi_o n} v_o(n)$, $e^{\xi_o n} \frac{u_o(n)+v_o(n)}{2}$ d'une part, et $e^{\xi_1 n} u_1(n)$, $e^{\xi_1 n} v_1(n)$, $e^{\xi_1 n} \frac{u_1(n)+v_1(n)}{2}$ d'autre part, sont de norme 1 dans $\ell^p(A_o)$ et $\ell^p(A_1)$ respectivement. Ceci n'est pas possible si A_o ou A_1 est strictement convexe, car alors $\ell^p(A_o)$ ou $\ell^p(A_1)$ l'est aussi $(1 < p < \infty)$, d'après le lemme. Ceci prouve la proposition.

Remarque 1 : En choisissant des définitions de la norme pour lesquelles on a $(A_{\theta,p})' = A_{\theta,p'}$, et pour lesquelles on garde les formules (1), on aura les résultats correspondants pour la lissité. C'est le cas, par exemple, si $\theta = 1/2$, pour la définition :

$$\|u\| = \inf_{\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)=u} \left[\frac{1}{2}\left(\|e^{\xi_o t} u(t)\|^2_{L^p(A_o)} + \|e^{\xi_1 t} u(t)\|^2_{L^p(A_1)}\right]^{1/2}$$

Remarque 2 : Les propositions que nous avons démontrées dans ce paragraphe peuvent s'établir dans un cadre plus vaste, qui est celui des opérateurs uniformément convexifiants. Ce cadre a été développé dans [1].

Remarquons que les propositions que nous avons démontrées dans ce paragraphe ne sont en rien optimales : il est possible que $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ soit uniformément convexe sans que ni A_o ni A_1 ne soit même strictement convexe. C'est le cas. par exemple de L^2, interpolé entre L^1 et L^∞. Les conditions nécessaires et suffisantes à imposer sur A_o et A_1 pour que $(A_o,A_1)_{\theta,p}$ soient uniformément convexe ou strictement convexe ne sont pas connues ; nous tenterons d'aborder cette question au paragraphe 5.

Au paragraphe qui suit, nous allons examiner une autre propriété géométrique des espaces d'interpolation.

§ 5. TYPE DES ESPACES D'INTERPOLATION

Rappelons qu'un espace E est dit de type p-Rademacher ($1 \leq p \leq 2$) si l'on peut trouver une constante C telle que, pour tout n, pour tous points $x_1, \ldots, x_n$ de E, on ait

$$\int \Big\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\tau) x_i \Big\|_E d\tau \leq C \Big(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_E^P \Big)^{1/p}$$

où les $\varepsilon_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, n$, sont les variables de Rademacher. Nous renvoyons à [6] pour les conséquences de cette définition.

Proposition 4 : Si A_o est de type p_o-Rademacher, A_1 de type p_1-Rademacher $(1 \leq p_o, p_1 \leq 2)$, $(A_o, A_1)_{\theta,p}$ est de type p-Rademacher lorsque

$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_o} + \frac{\theta}{p_1}$.

Démonstration : On suppose donc qu'il existe deux constantes C_o, C_1 telles que, pour tout choix $u_1^o, \ldots, u_n^o$, $u_1^1, \ldots, u_m^1$, de vecteurs de A_o et A_1 respectivement, on ait

$$\Big(\int \Big\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\tau) u_i^o \Big\|_{A_o}^{p_o} d\tau \Big)^{1/p_o} \leq C_o \Big[\sum_{1}^{n} \|u_i^o\|_{A_o}^{p_o} \Big]^{1/p_o}$$

et

$$\Big(\int \Big\| \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i(\tau)\, u_i^1 \Big\|_{A_1}^{p_1} d\tau \Big)^{1/p_1} \leq C_1 \Big[\sum_{1}^{m} \|u_i^1\|_{A_1}^{p_1} \Big]^{1/p_2}$$

La propriété de type est invariante par isomorphisme, néanmoins il sera commode de choisir la norme S_1.

Soient $u_1, \ldots . u_n \in A = (A_o, A_1)_{\theta, p_o, p_1}$, on a, si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_i(t) = u_i \quad , \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, n \ ,$$

$$\int \Big\| \sum_{1}^{n} \varepsilon_i(\tau) u_i \Big\|_A d\tau \leq \int \Big\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\tau) u_i(t) e^{\xi_o t} \Big\|_{L^p(A_o)}^{1-\theta} \cdot \Big\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\tau) u_i(t) e^{\xi_1 t} \Big\|_{L^{p_1}(A_1)}^{\theta} d\tau$$

$$\leq \Big[\int \Big\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\tau) u_i(t) e^{\xi_o t} \Big\|_{L^{p_o}(A_o)} d\tau\Big]^{1-\theta} \cdot \Big[\int \Big\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\tau) u_i(t) e^{\xi_1 t} \Big\|_{L^{p_1}(A_1)} d\tau\Big]^{\theta}$$

d'après l'inégalité de Hölder.

Mais on sait que

$$\int \Big\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\tau) u_i(t) e^{\xi_o t} \Big\|_{L^{p_o}(A_o)} d\tau \leq \Big[\iint_{-\infty}^{+\infty} \| \varepsilon_i(\tau) u_i(t) e^{\xi_o t} \|_{A_o}^{p_o} dt d\tau\Big]^{1/p_o}$$

$$= \Big(\iint_{-\infty}^{+\infty} \Big\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\tau) u_i(t) e^{\xi_o t} \Big\|_{A_o}^{p_o} d\tau dt\Big)^{1/p_o} \leq C_o \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} \| e^{\xi_o t} u_i(t) \|_{A_o}^{p_o} dt\Big)^{1/p_o}$$

$$\leq C_o \Big(\sum_{i=1}^{n} \| e^{\xi_o t} u_i(t) \|_{L^{p_o}(A_o)}^{p_o} \Big)^{1/p_o} \quad \text{car } A_o \text{ est de type } p_o .$$

On trouve de la même façon :

$$\int \Big\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\tau) u_i(t) e^{\xi_1 t} \Big\|_{L^{p_1}(A_1)} d\tau \leq C_1 \Big(\sum_{i=1}^{n} \| e^{\xi_1 t} u_i(t) \|_{L^{p_1}(A_1)}^{p_1} \Big)^{1/p_1}$$

et donc, en posant $C = C_o^{1-\theta} . C_1^{\theta}$,

$$\int \Big\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\tau) u_i \Big\|_A d\tau \leq C \| e^{\xi_o t} (u_i(t)) \|_{L^{p_o}(\ell^{p_o}(A_o))}^{1-\theta} . \| e^{\xi_1 t} (u_i(t)) \|_{L^{p_1}(\ell^{p_1}(A_1))}^{\theta}$$

Mais on sait que

$$\| (u_i) \|_{(\ell^{p_o}(A_o), \ell^{p_1}(A_1))_{\theta, p_o, p_1}} = \inf \| e^{\xi_o t} u_i(t) \|_{L^{p_o}(\ell^{p_o}(A_o))}^{1-\theta} . \| e^{\xi_1 t} (u_i(t)) \|_{L^{p_1}(\ell^{p_1}(A_1))}^{\theta}$$

l'infimum étant pris sur toutes les fonctions $u_i(t)$ telles que , pour tout $i = 1, \dots, n$, on ait $\int_{-\infty}^{+\infty} u_i(t) = u_i$. On a donc

$$\int \Big\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\tau) u_i \Big\|_A d\tau \leq C \| (u_i) \|_{(\ell^{p_o}(A_o), \ell^{p_1}(A_1))_{\theta, p_o, p_1}}$$

et un théorème de Lions-Peetre [5] dit que

$$(\ell^{p_o}(A_o),\ell^{p_1}(A_1))_{\theta,p_o,\theta_1} = \ell^{p}((A_o,A_1)_{\theta,p_o,p_1})$$

si $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_o} + \frac{\theta}{p_1}$. On obtient :

$$\int \|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\tau)u_i\|_A d\tau \leq C\|(u_i)\|_{\ell^p(A)} = C\left[\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_A^p\right]^{1/p}$$

ce qui constitue le résultat annoncé.

Ce résultat est le meilleur possible, comme le prouve le cas des espaces L^p. On peut se demander si un résultat analogue à celui de la proposition 4 est vrai pour le cotype des espaces d'interpolation (nous renvoyons à [6] pour la définition). Cette question est ouverte.

Nous allons, pour terminer, nous livrer à quelques considérations sur les conditions à imposer pour assurer la super-réflexivité des espaces d'interpolation.

§ 5. CARRES DANS L'ESPACE D'INTERPOLATION

Rappelons que l'on dit qu'un espace de Banach E possède un carré si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver u, v $\in$ E, avec

$$\|u\| = \|v\| = 1, \ \|\frac{u \pm v}{2}\| \geq 1 - \varepsilon.$$

Nous avons vu dans [2] un théorème de James selon lequel un espace qui ne possède pas de carrés est super-réflexif.

Il est donc licite, au vu de ce résultat, de se demander dans quel cas les espaces d'interpolation possèdent des carrés. Nous allons seulement étudier le cas où $A_{\theta,p}$ possède un carré isométrique : on peut trouver u, v avec $\|u\| = \|v\| = \|\frac{u \pm v}{2}\| = 1$. Nous allons voir que le carré de A est la somme de carrés de A_o et A_1.