Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

M. Reversat

Recouvrement d'un cercle par des intervalles

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 13, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A12_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 4 - 1 9 7 5

RECOUVREMENT D'UN CERCLE PAR DES INTERVALLES

par M. REVERSAT

Exposé N° XIII

19 Février 1975

Les problèmes considérés consistent en l'étude des éléments **x** de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ pour lesquels il existe une infinité de solutions en entiers n à l'inéquation

$$\|x - u_n\| < \varepsilon_n$$

(où $\|.\|$ **est** définie par : $\|x\| = \min_{n \in \mathbb{N}} |\dot{x} - n|$, $\dot{x}$ désignant un représentant dans $\mathbb{R}$ de $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$), (u_n) étant une suite donnée d'éléments de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et (ε_n) une suite donnée de nombres réels positifs, décroissante, telle que la série $\Sigma\varepsilon_n$ soit divergente. C'est-à-dire que si l'on désigne par I_n l'intervalle ouvert de centre u_n et de rayon ε_n, on étudie l'ensemble $\bigcap_N \bigcup_{n \geq N} I_n$. Si cet ensemble est de mesure pleine on dit que <u>la suite</u> (u_n) <u>est</u> (ε_n)<u>-eutaxique</u>. Une suite (u_n) est dite <u>eutaxique</u> si elle est (ε_n)-eutaxique pour toute suite (ε_n) décroissante de nombres réels positifs telle que la série $\Sigma\varepsilon_n$ diverge.

Ces problèmes ont d'abord été étudiés par J. Lesca ([5]). Les motivations en sont arithmétiques (l'étude des éléments de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ étant celle des parties décimales des nombres réels) et conduisent donc à l'étude de recouvrement d'un cercle par des intervalles. Des problèmes voisins furent précédemment étudiés : recouvrement d'un cercle (de longueur 1) par des intervalles (I_n), de longueurs (ε_n) ((ε_n) étant une suite décroissante de nombres réels positifs), et dont les centres sont des variables aléatoires indépendantes équidistribuées sur le cercle ([3], ch. IX). Le lemme de Borel-Cantelli montre qu'alors $I = \bigcap_N \bigcup_{n \geq N} I_n$ est presque sûrement de complémentaire négligeable et, dans le cas où $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, P. Billard a montré que le complémentaire de I est presque sûrement vide ou dénombrable ([1]). Dans les problèmes d'eutaxie, au contraire, la suite des centres des intervalles I_n est fixée, et le fait que I soit de complémentaire négligeable ne peut résulter du lemme de Borel-Cantelli.

Il fut aussi étudié la mesure de l'ensemble des éléments $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ pour lesquels l'inéquation

$$\|n\alpha - x\| < \varepsilon_n$$

a une infinité de solutions n, x étant un élément de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ fixé, (ε_n) une suite décroissante fixée de nombres réels positifs (problème métrique de Khintchine : [4], [2] ch. VIII). Cette équation admet une infinité de solutions pour presque tout ou presque aucun α selon que la série $\Sigma\varepsilon_n$ diverge ou converge. Cela implique, (ε_n) étant donnée, que $(n\alpha)$ est (ε_n)-eutaxique pour α appartenant à un ensemble de complémentaire négligeable. Comme cet ensemble dépend de la suite (ε_n), il n'en résulte pas que $(n\alpha)$ est eutaxique pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. En effet, comme l'a montré J. Lesca et comme il résulte du critère énoncé plus loin, $(n\alpha)$ est eutaxique pour presque aucun α (plus précisément : si et seulement si $\nu(\alpha) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{n\|n\alpha\|} < +\infty$).

§ 1. UNE MESURE DE REPARTITION

Il est facile de voir qu'une suite eutaxique est dense et qu'une suite dense est (ε_n)-eutaxique pour toute suite (ε_n) qui ne tend pas vers zéro. Une suite eutaxique doit donc être "bien répartie". Pour étudier la répartition des suites d'éléments de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, nous introduisons les fonctions λ ([7], [8], [9]) définies par : pour toute suite $u = (u_n)$ d'éléments de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de mesure non nulle et pour tout entier N, on désigne par $\lambda(I,n,N)$ le nombre d'entiers k tels que $0 \leq k < N$, et tels que $\left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right[\cap I$ contienne au moins un point u_n avec $1 \leq n \leq N$. Posons :

$$\lambda(I,u) = \liminf_{N\to\infty} \frac{\lambda(I,u,N)}{N\mu(I)} .$$

Remarquons que les fonctions λ sont invariantes par le "shift-endomorphism", c'est-à-dire par l'application de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ dans lui-même qui à une suite (u_n) associe la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1}$.

<u>Théorème 1</u> : <u>S'il existe un intervalle</u> I <u>(de mesure non nulle) tel que</u> $\lambda(I,u) = 0$, <u>la suite</u> u <u>n'est pas eutaxique</u>.

<u>Preuve</u> : Si $\lambda(I,u) = 0$, on peut alors construire par récurrence une suite d'entiers positifs (N_k) telle qu'en posant $M_s = \sum\limits_{0<t\leq s} N_t$ (et $M_0 = 0$) on ait pour tout $s \geq 0$

$$\lambda(I,T^{M_s}(u),N_{s+1}) \leq \frac{N_{s+1}}{2^{s+1}}$$

(où T^{M_s} désigne la M_s-ième itérée du "shitf-endomorphism").

Soit (ε_n) la suite définie par : $\varepsilon_n = \dfrac{1}{2N_{s+1}}$ si $M_s < n \leq M_{s+1}$. Cette suite décroît et la série $\Sigma\varepsilon_n$ diverge (car $\sum\limits_{M_s<n\leq M_{s+1}} \varepsilon_n = \frac{1}{2}$ pour tout s).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n =]u_n - \varepsilon_n , u_n + \varepsilon_n[$. On a

$$\mu(I \cap \bigcup_{M_s<n\leq M_{s+1}} I_n) \leq \lambda(I,T^{M_s}(u),N_{s+1}) \frac{3}{N_{s+1}}$$

$$\leq \frac{3}{2^{s+1}} \quad .$$

Donc $\mu(I \cap (\bigcap\limits_N \bigcup\limits_{n\geq N} I_n) = 0$. La suite (u_n) n'est pas eutaxique.

§ 2. UNE CONDITION SUFFISANTE

La réciproque du théorème 1 est fausse, cependant, si l'on pose $\chi(u) = \inf\limits_I \lambda(I,u)$ (I parcourant les intervalles de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de mesure non nulle et à extrémités rationnelles), on a le résultat :

Théorème 2 : Si $\chi(u) > 0$, la suite u est eutaxique.

Preuve : Soit (ε_n) une suite décroissante de nombres réels positifs telle que la série $\Sigma\varepsilon_n$ diverge. Soit $V_n =]u_n - \varepsilon_n , u_n + \varepsilon_n[$ et $V = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Comme les fonctions λ sont invariantes par le "shift-endomorphism", il suffit de montrer que $\mu(V) = 1$. Soit a tel que $0 < a < \chi(u)$. La démonstration se déroule en deux étapes selon que la suite (ε_n) décroît lentement ou rapidement :

Lemme 1 : S'il existe un intervalle I (de mesure non nulle et à extrémités rationnelles) tel que $\mu(I \cap V) \leq \frac{a}{4}\, \mu(I)$, alors pour toute suite (t_s) d'entiers positifs telle que $\dfrac{t_s}{t_{s-1}} > \dfrac{8}{a\mu(I)}$, il existe un entier s_o tel que $\varepsilon_{t_s} < \dfrac{1}{2t_s}$ si $s \geq s_o$.

Preuve : Soit $(t_s)_{s\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers positifs telle que $\frac{t_s}{t_{s-1}} > \frac{8}{a\mu(I)}$ et soit s_1 tel que $\lambda(I,u,t_s) > a\mu(I)t_s$ si $s \geq s_1$. Soit $s > s_1$, et supposons que $\varepsilon_{t_s} \geq \frac{1}{2t_s}$. Posons $U_s = \bigcup_{t_{s-1}<n\leq t_s} V_n$. Les intervalles $\left[\frac{k}{t_s}, \frac{k+1}{t_s}\right[$ $(k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k < t_s)$ inclus dans I et contenant au moins un point u_n avec $t_{s-1} < n \leq t_s$ sont au moins au nombre de $a\mu(I)t_s - t_{s-1} - 2$ (car il y en a au plus t_{s-1} qui contiennent un point u_n avec $1 \leq n \leq t_{s-1}$ et au plus 2 non contenus dans I et contenant un point u_n tel que $t_{s-1} < n \leq t_s$ et que $u_n \in I$). Pour chacun de ces intervalles, on a

$$\mu\left(U_s \cap \left[\frac{k}{t_s}, \frac{k+1}{t_s}\right[\right) \geq \frac{1}{2t_s} \quad , \quad \text{puisque}$$

si $t_{s-1} < n \leq t_s$, on a $\varepsilon_n \geq \varepsilon_{t_s} \geq \frac{1}{2t_s}$. Donc :

$$\mu(U_s \cap I) \geq \frac{1}{2t_s}\,(a\mu(I)t_s - t_{s-1} - 2) > \frac{a}{4}\mu(I)$$

pour s suffisamment grand, d'où la contradiction.

<u>Lemme 2</u> : <u>Pour tout intervalle</u> I <u>de</u> $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ <u>(de longueur non nulle et d'extrémités rationnelles) on a</u> :

$$\mu(I \cap V) > \frac{a}{4}\,\mu(I) \quad .$$

Preuve : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de longueur non nulle et d'extrémités rationnelles tel que $\mu(I \cap V) \leq \frac{a}{4}\,\mu(I)$. Soit (t_s) une suite d'entiers positifs tels que $\frac{t_s}{t_{s-1}} = \delta$, où δ est un entier positif, $\delta > \frac{8}{a\mu(I)}$. Soit (ε'_n) la suite définie par $\varepsilon'_n = \varepsilon_{t_s}$ si $t_{s-1} < n \leq t_s$, et pour tout s, soit $W_{t_s} = \bigcup_{n\leq t_s}]u_n - \varepsilon'_n\,,\ u_n + \varepsilon'_n[$. D'après le lemme 1, on peut supposer s suffisamment grand pour que $u_{t_s} < \frac{1}{2t_s}$.

Evaluons $\mu(I \cap (W_{t_s} \smallsetminus W_{t_{s-1}}))$: les intervalles $\left[\frac{k}{t_s}, \frac{(k+1)}{t_s}\right[$ rencontrant $I \cap W_{t_{s-1}}$ sont au plus au nombre de $(\frac{a}{4}\mu(I)t_s + 2t_{s-1})$ puisque $\mu(I \cap W_{t_{s-1}}) \leq \frac{a}{4}\mu(I)$ et que $W_{t_{s-1}}$ possède au plus t_{s-1} composantes connexes.

D'autre part, ceux contenus dans I et contenant un point u_n avec $t_{s-1} < n \leq t_s$ sont au moins au nombre de $(a\mu(I)t_s - t_{s-1} - 2)$. Donc :

$$\mu(I \cap (W_{t_s} - W_{t_{s-1}})) \geq (\frac{3a}{4}\mu(I)t_s - 3t_{s-1} - 2)\varepsilon_{t_s} \geq \frac{3a}{16}\mu(I)\, t_s\, \varepsilon_{t_s} ,$$

ce qui est contradictoire avec le lemme suivant :

<u>Lemme 3</u> : <u>La série $\sum_s t_s \varepsilon_{t_s}$ diverge</u>.

<u>Preuve</u> :

$$t_s \varepsilon_{t_s} = \frac{t_s}{t_{s+1} - t_s}(t_{s+1} - t_s)\varepsilon_{t_s} \geq \frac{t_s}{t_{s+1} - t_s} \sum_{n=t_s+1}^{t_{s+1}} \varepsilon_n$$

$$= \frac{1}{\delta - 1} \sum_{n=t_s+1}^{t_{s+1}} \varepsilon_n .$$

Donc $\sum_s t_s \varepsilon_{t_s} \geq \frac{1}{\delta-1} \sum_{n \geq t_1} \varepsilon_n$.

<u>Fin de la démonstration du théorème 2</u> : Le lemme 2 prouve que V est de densité positive en tout point de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et par suite, d'après un théorème de Lebesgue, que V est de complémentaire négligeable.

§ 3. <u>QUELQUES EXEMPLES</u>

Le critère précédant permet de montrer qu'il existe "beaucoup" de suites eutaxiques :

<u>Corollaire 1</u> : <u>Presque toute suite d'éléments de</u> $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ <u>(relativement à la mesure de Haar de</u> $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$) <u>est eutaxique</u>.

On peut en effet montrer que, relativement à la mesure de Haar de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$, on a pour presque toute suite u $\chi(u) \geq t$, où t est le nombre de l'intervalle $]0,1[$ tel que $t^t(e(1-t))^{1-t} = 1$ ([8], [9]) .

Comme exemples de suites eutaxiques, on a :

Corollaire 2 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. La suite $(n\alpha)$ est eutaxique si et seulement si le nombre $M(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\|n\alpha\|}$ est fini (c'est-à-dire pour presque aucun α).

On a en effet ([7], [8], [9]) $\frac{1}{1+M(\alpha)} \leq \chi(u) \leq 2\sqrt{\frac{2}{M(\alpha)}}$. Ce corollaire résulte donc des théorèmes 1 et 2.

Les méthodes du chapitre 3 de [6] et le théorème 1 permettent aussi de montrer :

Corollaire 3 : Soit (a_n) une suite croissante de nombres réels positifs telle que la série $\Sigma \frac{a_n}{a_{n+1}}$ soit convergente. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(a_n x)$ est eutaxique (modulo 1).

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Billard : Série de Fourier aléatoirement bornées, continues, uniformément convergentes, Ann. Sc. E.N.S., 82, (1965), 131-179.

[2] J.W.S. Cassels : An introduction to diophantine approximation, Cambridge tracts in Math., No 45,(1965).

[3] J.P. Kahane : Some random series of functions, Heath Mathematical Monographs, Lexington, Mass. (1968).

[4] A. Khintchine : Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, Math. Z., 24 (1926), 706-714.

[5] J. Lesca : Approximations diophantiennes à une dimension, thèse sc. math, Grenoble (1968).

[6] B. de Mathan : Approximations diophantiennes dans un corps local, Bull. Soc. Math. France, mémoire 21, (1970).

[7] B. de Mathan : Un critère de non-eutaxie, Note aux C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, A (1971), p. 433-436.

[8] M. Reversat : Un critère d'eutaxie, Note aux C. R. Acad. Sc. Paris, t. 277, A (1973), p. 405-407.

[9] M. Reversat : Approximations diophantiennes par les éléments de certaines suites, thèse 3ème cycle, Bordeaux (1973).
