Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

J. L. Krivine

Sur les espaces isomorphes à l^P

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. nº 12, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A11_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 4 - 1 9 7 5

SUR LES ESPACES ISOMORPHES A l^p

par J.L. KRIVINE

Exposé N° XII

5 Février 1975

Tous les espaces de Banach considérés dans cet article sont sur le corps des réels. On se propose de montrer le

<u>Théorème</u> 1. <u>Soient</u> p <u>un réel</u> $\geqslant 1$ <u>et</u> E <u>un espace de Banach isomorphe à</u> ℓ^p. <u>Alors</u> ℓ^p <u>est finiment représentable dans</u> E.

Rappelons qu'un espace F est dit finiment représentable dans E si pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-espace F' de F de dimension finie il existe un sous-espace E' de E et une application linéaire bijective $T : E' \longrightarrow F'$ avec $\|T\| \, \|T^{-1}\| \leqslant 1+\varepsilon$. Cette notion est intimement liée à celle d'ultrapuissance [1], comme le montre la proposition suivante ([2], [3]).

<u>Proposition</u> 1. E <u>et</u> F <u>étant des espaces de Banach</u>, F <u>est finiment représentable dans</u> E <u>si et seulement s'il est isométrique à un sous-espace d'une ultrapuissance de</u> E.

Le théorème 1 fournit une nouvelle démonstration du théorème suivant de Dvoretzky [4].

<u>Théorème</u> 2. <u>Soit</u> B <u>un espace de Banach de dimension infinie; alors</u> ℓ^2 <u>est finiment représentable dans</u> B.

En effet d'après un résultat de Tzafriri [5], [6] il existe un espace de Banach E, isomorphe à ℓ^2 qui est finiment représentable dans B. D'après le théorème 1, ℓ^2 est finiment représentable dans E donc dans B.

Soient B un espace de Banach, $x_1, \ldots, x_n \in B$. La fonction $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $\Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \|\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n\|$ <u>sera appelée le type du n-uplet</u> $(x_1, \ldots, x_n)$. Une famille $(x_i)_{i \in D}$ d'éléments de B sera dite <u>symétrique</u>, si, quels que soient $i_1, \ldots, i_n \in D$, distincts, les 2^n n-uplets $(\varepsilon_1 x_{i_1}, \ldots, \varepsilon_n x_{i_n})$ $(\varepsilon_1 = \pm 1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1)$ ont tous le même type (autrement dit $\|\lambda_1 x_{i_1} + \ldots + \lambda_n x_{i_n}\| = \||\lambda_1| x_{i_1} + \ldots + |\lambda_n| x_{i_n}\|$ pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$)

D étant un ensemble totalement ordonné, une famille $(x_i)_{i \in D}$ d'éléments de B sera dite <u>écartable</u>, si, quels que soient $i_1, i_2, \ldots, i_n, j_1, j_2, \ldots, j_n \subset D$ avec $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ et $j_1 < j_2 < \ldots < j_n$, les deux n-uplets $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, $(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})$ ont le même type.

<u>Proposition</u> 2. <u>Soient</u> B <u>un espace de Banach</u>, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ <u>une suite bornée d'éléments de</u> B, <u>et</u> $\mathcal{D}$ <u>un ultrafiltre sur</u> $\mathbb{N}$. <u>Il existe un espace de Banach</u> $B' \supset B$, <u>finiment représentable dans</u> B, <u>et une suite</u> $(y_n)_{n \geq 1}$ <u>écartable d'éléments de</u> B' <u>telle que</u>

$$\|x + \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_{k-1} y_{k-1} + \lambda_k y_k\| = \lim_{n \xrightarrow{\mathcal{D}} \infty} \|x + \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_{k-1} y_{k-1} + \lambda_k x_n\|$$

<u>pour tout</u> $x \in B$ <u>et</u> $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$.

On définit une suite croissante $B_0 \subset B_1 \subset \ldots \subset B_k \subset \ldots$ d'espaces de Banach, en posant $B_0 = B$, $B_{k+1} = B_k^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$. Soit B' le complété de $\bigcup_k B_k$. Il est immédiat, par induction sur n que B_k est finiment représentable dans B, donc B' l'est aussi.

Comme $B_k \supset B$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée d'éléments de B_k, donc définit un élément de $B_k^{\mathbb{N}}/\mathcal{D} = B_{k+1}$ qu'on désigne par y_{k+1}. Il est donc évident par définition des ultrapuissances, que l'on a

$$\|x + \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_k y_k + \lambda_{k+1} y_{k+1}\| = \lim_{n \xrightarrow{\mathcal{D}} \infty} \|x + \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_k y_k + \lambda_{k+1} x_n\|$$

(puisque $x + \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_k y_k \in B_k$).

Soient maintenant $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, $j_1 < \ldots < j_k$ des entiers ≥ 1. On montre par induction sur k que $\|x + \lambda_1 y_{i_1} + \ldots + \lambda_k y_{i_k}\| = \|x + \lambda_1 y_{j_1} + \ldots + \lambda_k y_{j_k}\|$ pour $x \in B$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Or on a

$$\|x + \lambda_1 y_{i_1} + \ldots + \lambda_k y_{i_k}\| = \lim_{n \xrightarrow{\mathcal{D}} \infty} \|x + \lambda_1 y_{i_1} + \ldots + \lambda_{k-1} y_{i_{k-1}} + \lambda_k x_n\| =$$

$\lim_{n \xrightarrow{\mathcal{D}} \infty} \|x + \lambda_1 y_{j_1} + \ldots + \lambda_{k-1} y_{j_{k-1}} + \lambda_k x_n\|$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

$= \|x + \lambda_1 y_{j_1} + \ldots + \lambda_k y_{j_k}\|$. En particulier $(y_{i_1}, \ldots, y_{i_k})$ et $(y_{j_1}, \ldots, y_{j_k})$ ont le même type. C.Q.F.D.

Proposition 3. Soient E un espace de Banach isomorphe à ℓ^p $(p \geqslant 1)$ et D un ensemble totalement ordonné. Il existe un espace de Banach F finiment représentable dans E et une famille $(X_i)_{i \in D}$ écartable symétrique d'éléments de F, équivalente à la base canonique de $\ell^p(D)$ c'est-à-dire

$$M^{-1}(|\lambda_1|^p + \ldots + |\lambda_n|^p)^{1/p} \leq \|\lambda_1 X_{i_1} + \ldots + \lambda_n X_{i_n}\| \leq M(|\lambda_1|^p + \ldots + |\lambda_n|^p)^{1/p}$$

si $i_1, \ldots, i_n$ sont des éléments de D, distincts (M réel $\geqslant 1$).

On a une base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E telle que $M^{-1}(|\lambda_0|^p + \ldots + |\lambda_n|^p)^{1/p} \leq \|\lambda_0 x_0 + \ldots + \lambda_n x_n\| \leq M(|\lambda_0|^p + \ldots + |\lambda_n|^p)^{1/p}$ (M étant un réel $\geqslant 1$) et $\|x_n\| = 1$. En appliquant la proposition 1, avec un ultrafiltre $\mathcal{D}$ non trivial sur $\mathbb{N}$, on trouve, dans un espace E' contenant E et finiment représentable dans E, une suite écartable $(y_n)_{n \geqslant 1}$, $\|y_n\| = 1$.

On montre, par récurrence sur k que l'on a

$$M^{-1}(|\mu_0|^p + \ldots + |\mu_\ell|^p + |\lambda_1|^p + \ldots + |\lambda_k|^p)^{1/p} \leq$$

$$\|\mu_0 x_0 + \ldots + \mu_\ell x_\ell + \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_k y_k\| \leq M(|\mu_0|^p + \ldots + |\mu_\ell|^p + |\lambda_1|^p + \ldots + |\lambda_k|^p)^{1/p}$$

En effet, d'après la proposition 1, on a

$$\|\mu_0 x_0 + \ldots + \mu_\ell x_\ell + \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_k y_k\| = \lim_{n \xrightarrow{\mathcal{D}} \infty} \|\mu_0 x_0 + \ldots + \mu_\ell x_\ell + \lambda_k x_n + \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_{k-1} y_{k-1}\|,$$

d'où le résultat d'après l'hypothèse de récurrence.
En particulier la suite $(y_n)_{n \geqslant 1}$ équivaut (avec la constante M) à la base canonique de ℓ^p.

On définit $z_k^r \in E'$ pour $k \geqslant 1$, $r \in \mathbb{N}$ en posant $z_k^0 = 0$ et

$$z_k^r = (2r)^{-1/p} \sum_{i=0}^{2r-1} (-1)^i y_{2kr+i}$$ pour $r \geqslant 1$. Dans l'espace de Banach $E'' = (E')^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$ (qui est finiment représentable dans E' donc dans E) on définit $Z_k = (z_k^r)_{r \in \mathbb{N}}$ pour $k \geqslant 1$.

Pour r fixé $\geqslant 1$, la suite d'éléments de E' : $z_1^r, z_2^r, \ldots, z_k^r, \ldots$ équivaut (avec la constante M) à la base canonique de ℓ^p (c'est immédiat d'après le fait que la suite $(y_n)_{n \geqslant 1}$ a cette propriété). Il en résulte, d'après la définition de la norme dans une ultrapuissance, que la suite $(Z_k)_{k \geqslant 1}$ équivaut aussi, avec la même constante M, à la base canonique de ℓ^p. On montre que cette suite est de plus symétrique, c'est-à-dire que

$$\|\lambda_1 Z_1 + \ldots + \lambda_{\ell-1} Z_{\ell-1} + \lambda_\ell Z_\ell + \lambda_{\ell+1} Z_{\ell+1} + \ldots + \lambda_k Z_k\| =$$

$$= \|\lambda_1 Z_1 + \ldots + \lambda_{\ell-1} Z_{\ell-1} - \lambda_\ell Z_\ell + \lambda_{\ell+1} Z_{\ell+1} + \ldots + \lambda_k Z_k\| .$$

Pour cela on pose pour $r \geqslant 1$: $\xi_\ell^r \doteq (2r)^{-1/p} \sum_{i=0}^{2r-2} (-1)^i \, y_{2kr+i}$;
$\eta_\ell^r = (2r)^{-1/p} \sum_{i=0}^{2r-2} (-1)^i \cdot y_{2kr+i+1}$.

La suite $(y_n)_{n \geqslant 1}$ étant écartable, les deux k-uplets
$(z_1^r, \ldots, z_{\ell-1}^r, \xi_\ell^r, z_{\ell+1}^r, \ldots, z_k^r)$ et $(z_1^r, \ldots, z_{\ell-1}^r, \eta_\ell^r, z_{\ell+1}^r, \ldots, z_k^r)$ ont le même type et par suite

$$\|\lambda_1 z_1^r + \ldots + \lambda_{\ell-1} z_{\ell-1}^r + \lambda_\ell \xi_\ell^r + \lambda_{\ell+1} z_{\ell+1}^r + \ldots + \lambda_k z_k^r\| =$$

$$= \|\lambda_1 z_1^r + \ldots + \lambda_{\ell-1} z_{\ell-1}^r + \lambda_\ell \eta_\ell^r + \lambda_{\ell+1} z_{\ell+1}^r + \ldots + \lambda_k z_k^r\| .$$

D'autre part $\xi_\ell^r - z_\ell^r = (2r)^{-1/p} y_{2\ell r + 2r - 1}$ et donc $\|\xi_\ell^r - z_\ell^r\| \leqslant (2r)^{-1/p}$.
De même $\|\eta_\ell^r + z_\ell^r\| \leqslant (2r)^{-1/p}$. On en déduit

$$\Big| \|\lambda_1 z_1^r + \ldots + \lambda_{\ell-1} z_{\ell-1}^r + \lambda_\ell z_\ell^r + \lambda_{\ell+1} z_{\ell+1}^r + \ldots + \lambda_k z_k^r\| - \|\lambda_1 z_1^r + \ldots + \lambda_{\ell-1} z_{\ell-1}^r -$$

$$- \lambda_\ell z_\ell^r + \lambda_{\ell+1} z_{\ell+1}^r + \ldots + \lambda_k z_k^r\| \Big| \leqslant 2.(2r)^{-1/p}$$

et on obtient le résultat annoncé quand $r \longrightarrow \infty$ suivant l'ultrafiltre $\mathcal{D}$.

- Soit maintenant F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (non normé) ayant une base (algébrique) équipotente à D, et soit $(X_i)_{i \in D}$ cette base. Tout $X \in F$ s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme $X = \lambda_1 X_{i_1} + \ldots + \lambda_k X_{i_k}$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. On définit une norme sur F en posant $\|X\| = \|\lambda_1 Z_1 + \ldots + \lambda_k Z_k\|$. On a alors immédiatement

$$M^{-1}(|\lambda_1|^p + \ldots + |\lambda_k|^p)^{1/p} \leqslant \|\lambda_1 X_{i_1} + \ldots + \lambda_k X_{i_k}\| \leqslant M(|\lambda_1|^p + \ldots + |\lambda_k|^p)^{1/p}.$$

D'autre part F est évidemment finiment représentable dans E" donc aussi dans E. Enfin la famille $(X_i)_{i \in D}$ est écartable et symétrique, puisque la famille $(Z_k)_{k \geqslant 1}$ l'est. C.Q.F.D

Dans la suite on prend $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{N}$ muni de l'ordre lexicographique :

$(q,n) \leq (q',n') \Longleftrightarrow q < q'$ ou $(q = q'$ et $n \leq n')$ (pour $q,q' \in \mathbb{Q}, n,n' \in \mathbb{N}$).
On obtient ainsi un espace de Banach F, finiment représentable dans E et une famille $(X_{(q,n)})_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ n \in \mathbb{N}}}$ écartable symétrique d'éléments de F, équivalente (avec la constante M) à la base canonique $e_{(q,n)}$ de $\ell^p(\mathbb{Q} \times \mathbb{N})$. On note $\varphi \longrightarrow X_\varphi$ l'application linéaire de $\ell^p(\mathbb{Q} \times \mathbb{N})$ dans F qui envoie $e_{(q,n)}$ sur $X_{(q,n)}$. On a donc $M^{-1} \|\varphi\|_p \leq \|X_\varphi\| \leq M \|\varphi\|_p$. La preuve du théorème 1 se ramène à montrer que ℓ^p est finiment représentable dans F.

Fixons un entier $\nu > 1$ et un réel δ, $0 < \delta < 1$. <u>Alors il existe deux suites croissantes</u> K_n, N_n <u>d'entiers</u> > 0, <u>tendant vers $+\infty$, telles que</u>

$$\nu^{K_n} \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n} \longrightarrow \delta \quad \underline{\text{quand } n \longrightarrow \infty}.$$

En effet, a étant un réel ≥ 0, désignons par $[a]$ sa partie entière et par $\{a\}$ sa partie fractionnaire ($\{a\} = a - [a]$). Posons $\theta = \frac{L(\nu+1)}{L\nu} - 1$. Alors θ est irrationnel (sinon $\frac{L(\nu+1)}{L\nu} = \frac{m}{n}, m,n > 0$, donc $(\nu+1)^n = \nu^m$ ce qui est impossible puisque ν et $\nu+1$ sont premiers entre eux); donc lorsque N décrit $\mathbb{N}$, $\{N\theta\}$ décrit une partie dense de l'intervalle $[0,1[$. On peut donc trouver une suite d'entiers N_n strictement croissante telle que $\{N_n\theta\} \longrightarrow \{-\frac{L\delta}{L\nu}\}$ quand $n \longrightarrow \infty$. On pose alors $K_n = [N_n\theta] - [-\frac{L\delta}{L\nu}]$; K_n est donc une suite croissante tendant vers $+\infty$. On a $N_n\theta - K_n = \{N_n\theta\} + [-\frac{L\delta}{L\nu}] \longrightarrow -\frac{L\delta}{L\nu}$ quand $n \longrightarrow \infty$.
Donc $\nu^{K_n - N_n\theta} \longrightarrow \delta$ ce qui est le résultat cherché. C.Q.F.D.

Dans la suite nous appellerons pour abréger "intervalle de $\mathbb{R}$" un intervalle $I \neq \emptyset$ de la forme $[a,b[$ (semi-ouvert à droite); sa longueur sera désignée par $\mu(I)$.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on définit $S_n \subset \mathbb{Q}$ en posant $S_n = \{k(\frac{\nu}{\nu+1})^n \; ; \; k \in \mathbb{Z}\}$.
Pour chaque intervalle I de $\mathbb{R}$ (semi-ouvert à droite), on définit dans F :

$$X_I^n(\delta,\nu) = \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\frac{n}{p}} \sum_{r \in S_n \cap I} X_{(r,n)} \quad \text{et} \quad Y_I^n(\delta,\nu) = K_n^{-\frac{1}{p}} \sum_{i=0}^{K_n - 1} X_I^{N_n + i}.$$

$\mathcal{D}$ étant un ultrafiltre non trivial sur $\mathbb{N}$, on définit $Y_I(\delta,\nu)$, dans l'espace $F' = F^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$ en posant $Y_I(\delta,\nu) = (Y_I^n(\delta,\nu))_{n \in \mathbb{N}}$ (le fait que cette définition est légitime, c'est-à-dire que $Y_I^n(\delta,\nu)$ est une suite bornée résulte du lemme 1 ci-dessous).

Les valeurs de δ et ν restant fixées pour le moment, nous écrirons pour abréger X_I^n, Y_I^n et Y_I au lieu de $X_I^n(\delta,\nu)$, $Y_I^n(\delta,\nu)$, $Y_I(\delta,\nu)$ respectivement.

Notons que, si $a < b < c$ sont des réels, on a évidemment $X^n_{[a,b[} + X^n_{[b,c[} = X^n_{[a,c[}$ donc $Y^n_{[a,b[} + Y^n_{[b,c[} = Y^n_{[a,c[}$, et par suite $Y_{[a,b[} + Y_{[b,c[} = Y_{[a,c[}$.

<u>Lemme 1.</u> $M^{-p}\left[\mu(I) - \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^n\right] \leq \|X_I^n\|^p \leq M^p\left[\mu(I) + \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^n\right]$;

$M^{-p}\left[\mu(I) - \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n}\right] \leq \|Y_I^n\|^p \leq M^p\left[\mu(I) + \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n}\right]$;

$M^{-p}\ \mu(I) \leq \|Y_I\|^p \leq M^p\,\mu(I)$.

On définit dans $\ell^p(\mathbb{Q}\times\mathbb{N})$: $\varphi_I^n = \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\frac{n}{p}} \sum_{r\in S_n\cap I} e_{(r,n)}$ et

$$\psi_I^n = K_n^{-\frac{1}{p}} \sum_{i=0}^{K_n-1} \varphi_I^{N_n+i} .$$

On a donc $X_I^n = X_{\varphi_I^n}$, $Y_I^n = X_{\psi_I^n}$ et d'après les propriétés de l'application $\varphi \longrightarrow X_\varphi$ de $\ell^p(\mathbb{Q}\times\mathbb{N})$ dans F il suffit de montrer que

$$\mu(I) - \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^n \leq \|\varphi_I^n\|_p^p \leq \mu(I) + \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^n \qquad (*)$$

et que $$\mu(I) - \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n} \leq \|\psi_I^n\|_p^p \leq \mu(I) + \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n} \qquad (**)$$

Comme S_n est une subdivision de $\mathbb{R}$ de pas $\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^n$ on a (card A désignant le cardinal de l'ensemble fini A) :

$$\left[\mathrm{card}(S_n\cap I)-1\right]\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^n \leq \mu(I) \leq \left[\mathrm{card}(S_n\cap I)+1\right]\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^n .$$

D'autre part, on a $\|\varphi_I^n\|_p^p = \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^n \mathrm{card}(S_n\cap I)$, d'où l'inégalité $(*)$

Quand n décrit $\mathbb{N}$, les φ_I^n sont deux à deux étrangers dans $\ell^p(\mathbb{Q}\times\mathbb{N})$. Il en résulte que $\|\psi_I^n\|_p^p = K_n^{-1} \sum_{i=0}^{K_n-1} \|\varphi_I^{N_n+i}\|_p^p$.

Comme on a $\left|\|\varphi_I^{N_n+i}\|_p^p - \mu(I)\right| \leq \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n+i} \leq \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n}$, pour $0\leq i\leq K_n-1$, on

en déduit $\left| \|\Psi_I^n\|_p^p - \mu(I) \right| \leq \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n}$. C. Q. F. D.

<u>Lemme 2</u>. <u>Si</u> $I_1, \ldots, I_k$ <u>sont des intervalles disjoints, on a</u> $\|\lambda_1 Y_{I_1} + \ldots + \lambda_k Y_{I_k}\| = \| |\lambda_1| Y_{I_1} + \ldots + |\lambda_k| Y_{I_k} \|$; <u>autrement dit</u> $(Y_{I_1}, \ldots, Y_{I_k})$ <u>est un k-uplet symétrique</u>.

Il suffit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|\lambda_1 Y_{I_1}^n + \ldots + \lambda_k Y_{I_k}^n\| = \| |\lambda_1| Y_{I_1}^n + \ldots + |\lambda_k| Y_{I_k}^n \|$$

ce qui résulte immédiatement de la définition de Y_I^n, et du fait que la famille $(X_i)_{i \in Q \times \mathbb{N}}$ est symétrique. C.Q.F.D.

Etant donnés $x, y \in F$, on dira que <u>x est antérieur à y</u> (ou que <u>y est postérieur à x</u>), si on a $x = c_1 X_{i_1} + \ldots + c_k X_{i_k}$, $y = d_1 X_{j_1} + \ldots + d_\ell X_{j_\ell}$, avec $i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_\ell \in Q \times \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_k, d_1, \ldots, d_\ell \in \mathbb{R}$ et $i_1 < \ldots < i_k < j_1 \ldots < j_\ell$.

On dira que x et y sont semblables si $x = c_1 X_{i_1} + \ldots + c_k X_{i_k}$ et $y = c_1 X_{j_1} + \ldots + c_k X_{j_k}$ avec $i_1 < \ldots < i_k$ et $j_1 < \ldots < j_k$ $(i, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_k \quad Q \times \mathbb{N})$. Du fait que la famille $(X_i)_{i \in Q \times \mathbb{N}}$ est écartable, on déduit immédiatement le

<u>Lemme 3. Si $x, y, u, v \in F$, x est semblable à y, u antérieur à x et y, v postérieur à x et y, alors (u,x,v) et (u,y,v) ont le même type</u>.

I, I' étant deux intevalles, $I = [a,b[$, $I' = [a',b'[$, on écrit $I < I'$ si $b < a'$ et $I \lesssim I'$ si $b \lesssim a'$. Il est clair que si $I \lesssim I'$ alors Y_I^n est antérieur à $Y_{I'}^n$.

Nous dirons que I est un δ-intervalle si l'origine de I est un réel $a = r\delta$ pour un $r \in \mathbb{Z}$. Posons alors $\alpha_n = r\, \nu^{K_n} \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n}$; quand $n \to \infty$, $\alpha_n \to a$. Désignons par $I^{(n)}$ l'intervalle d'origine α_n de même longueur que I.

<u>Lemme 4</u> <u>Si</u> I <u>est un</u> δ-<u>intervalle</u> $\|Y^n_{I^{(n)}} - Y^n_I\| \longrightarrow 0$ <u>quand</u> $n \to \infty$.
<u>Pour chaque</u> $n \in \mathbb{N}$, <u>l'origine de</u> $I^{(n)}$ <u>appartient à</u> $S_{N_n}, S_{N_n+1}, \ldots, S_{N_n+K_n}$.

La deuxième partie du lemme exprime simplement le fait que $\alpha_n = r\,\nu^{K_n}\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n}$ est un multiple entier de $\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n+i}$ pour $i = 0,1,\ldots,K_n$.

On a $I = [a,b[$, $I^{(n)} = [\alpha_n, \beta_n[$ avec $\beta_n = \alpha_n + b-a$ et $\alpha_n \longrightarrow a$ quand $n \longrightarrow \infty$. Donc $Y^n_{I^{(n)}} - Y^n_I = Y^n_{J^n_1} + Y^n_{J^n_2}$ où $\mu(J^n_1) = \mu(J^n_2) = |a - \alpha_n|$.

D'après le lemme 1, on a $\|Y^n_{J^n_1}\|^p \leq M^p\left[\mu(J^n_1) + \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n}\right] = M^p\left[|a-\alpha_n| + \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n}\right]$, qui tend vers 0 quand $n \longrightarrow \infty$ puisque $a - \alpha_n \longrightarrow 0$; de même $\|Y^n_{J^n_2}\| \longrightarrow 0$

C.Q.F.D.

<u>Lemme 5</u> <u>Soient</u> $I_1 \leq \cdots \leq I_k < J_1 \leq \cdots \leq J_l$ <u>des intervalles de</u> $\mathbb{R}$, <u>et</u> I,J <u>deux</u> δ-<u>intervalles tels que</u> $I_k < I < J_1$, $I_k < J < J_1$ <u>et</u> $\mu(J) = \frac{\nu}{\nu+1}\mu(I)$.
<u>Alors les deux</u> $(k+l+1)$-<u>uplets</u> $(Y_{I_1}, \ldots, Y_{I_k}, Y_I, Y_{J_1}, \ldots, Y_{J_l})$ <u>et</u> $\left(Y_{I_1}, \ldots, Y_{I_k}, \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{1/p} Y_J, Y_{J_1}, \ldots, Y_{J_l}\right)$ <u>ont le même type</u>.

On considère $n \in \mathbb{N}$ assez grand pour que $I_k < I^{(n)} < J_1$ et $I_k < J^{(n)} < J_1$.
Comme $\mu(I^{(n)}) = \mu(I)$ et $\mu(J^{(n)}) = \mu(J)$ on a $\mu(J^{(n)}) = \frac{\nu}{\nu+1}\mu(I^{(n)})$.
Posons $Z_n = K_n^{-1/p} \sum_{i=0}^{K_n-1} X^{N_n+i+1}_{J^{(n)}}$. On a donc

$$Z_n - Y^n_{J^{(n)}} = K_n^{-1/p}\left[X^{N_n+K_n}_{J^{(n)}} - X^{N_n}_{J^{(n)}}\right]$$

D'après le lemme 1, on a $\|X^{N_n+K_n}_{J^{(n)}}\|^p \leq M^p\mu(J^{(n)}) + M^p\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{N_n+K_n}$ $\leq M^p(\mu(J) + 1)$; de même $\|X^{N_n}_{J^{(n)}}\|^p \leq M^p(\mu(J)+1)$. Comme $K_n \longrightarrow +\infty$, on voit que $\|Z_n - Y^n_{J^{(n)}}\| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$. D'après le lemme 4, $\|Z_n - Y^n_J\| \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$ et donc $Y_J = (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'autre part

(lemme 4) on a $Y_I = (Y^n_{I(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ .Il suffit donc de prouver que, pour tout n assez grand les deux $(k+l+1)$-uplets

$(Y^n_{I_1},\dots,Y^n_{I_k},Y^n_{I(n)},Y^n_{J_1},\dots,Y^n_{J_l})$ et $(Y^n_{I_1},\dots,Y^n_{I_k},(\frac{\nu+1}{\nu})^{1/p}Z_n,Y^n_{J_1},\dots,Y^n_{J_l})$

ont le même type.

On a à prouver que $\|c_1 Y^n_{I_1}+\dots+c_k Y^n_{I_k}+c\,Y^n_{I(n)}+d_1 Y^n_{J_1}+\dots+d_l Y^n_{J_l}\|$

$=\|c_1 Y^n_{I_1}+\dots+c_k Y^n_{I_k}+c\,(\frac{\nu+1}{\nu})^{1/p}Z_n+d_1 Y^n_{J_1}+\dots+d_l Y^n_{J_l}\|$ (avec

$c_1,\dots,c_k,c,d_1,\dots,d_l\in\mathbb{R}$) . Posons

$U=c_1 Y^n_{I_1}+\dots+c_k Y^n_{I_k}$, $V=d_1 Y^n_{J_1}+\dots+d_l Y^n_{J_l}$. Alors U est antérieur à $Y^n_{I(n)}$ et à $(\frac{\nu+1}{\nu})^{1/p}Z_n$, V leur est postérieur et on a à montrer que $(U,Y^n_{I(n)},V)$ et $(U,(\frac{\nu+1}{\nu})^{1/p}Z_n,V)$ ont le même type.

D'après le lemme 3, il suffit de montrer que $Y^n_{I(n)}$ et $(\frac{\nu+1}{\nu})^{1/p}Z_n$ sont semblables. Or on a :

$$Y^n_{I(n)}=K_n^{-1/p}\sum_{i=0}^{K_n-1}(\frac{\nu}{\nu+1})^{(N_n+i)/p}\sum_{r\in I^{(n)}\cap S_{N_n+i}}X_{(r,N_n+i)}\quad\text{et}$$

$$(\frac{\nu+1}{\nu})^{1/p}Z_n=K_n^{-1/p}\sum_{i=0}^{K_n-1}(\frac{\nu}{\nu+1})^{(N_n+i)/p}\sum_{r\in J^{(n)}\cap S_{N_n+i+1}}X_{(r,N_n+i+1)}$$

Soient α_n , β_n les origines respectives de $I^{(n)}$, $J^{(n)}$ qui, d'après le lemme 4 appartiennent à S_{N_n+i} pour $i=0,1,\dots,K_n$. Comme $\mu(J^{(n)})=\frac{\nu}{\nu+1}\mu(I^{(n)})$, il en résulte qu'on a $r\in I^{(n)}\cap S_{N_n+i}$ si et seulement si $\tau(r)\in J^{(n)}\cap S_{N_n+i+1}$ où $\tau(r)=\beta_n+\frac{\nu}{\nu+1}(r-\alpha_n)$. On a donc

$$(\frac{\nu+1}{\nu})^{1/p}Z_n=K_n^{-1/p}\sum_{i=0}^{K_n-1}(\frac{\nu}{\nu+1})^{(N_n+i)/p}\sum_{r\in I^{(n)}\cap S_{N_n+i}}X_{(\tau(r),N_n+i+1)}$$

En comparant cette égalité avec l'expression de $Y^n_{I(n)}$ écrite plus haut, et en remarquant que la fonction $\tau:\Omega\longrightarrow\Omega$ respecte la relation d'ordre, on voit que $Y^n_{I(n)}$ et $(\frac{\nu+1}{\nu})^{1/p}Z_n$ sont semblables. C.Q.F.D.

Nous revenons maintenant à la notation $Y_I(\delta,\nu)$ au lieu de Y_I , parce que nous nous proposons de faire varier δ $(0<\delta<1)$ et $\nu\in\mathbb{N}$.

Soit δ_n une suite tendant vers 0, $0 < \delta_n < 1$; pour fixer les idées on prendra $\delta_n = 2^{-n}$; un δ_n - intervalle est donc un intervalle dont l'origine est un rationnel de dénominateur 2^n.

Dans l'espace $F'' = (F')^{\mathbb{N}}/\mathcal{J}$, on définit ($I$ étant un intervalle de $\mathbb{R}$) :

$$Z_I(\nu) = (Y_I(\delta_n, \nu))_{n \in \mathbb{N}} .$$

On a donc $M^{-p}\,\mu(I) \leq \|Z_I(\nu)\|^p \leq M^p\,\mu(I)$ et, si $I_1, \ldots, I_k$ sont des intervalles disjoints, $\|\lambda_1 Z_{I_1}(\nu) + \ldots + \lambda_k Z_{I_k}(\nu)\| =$ $\|\,|\lambda_1|\, Z_{I_1}(\nu) + \ldots + |\lambda_k|\, Z_{I_k}(\nu)\|$ (en effet, d'après les lemmes 1,2, ces relations sont vraies, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ pour les $Y_I(\delta_n, \nu)$).

De plus, si $a < b < c$, a,b,c étant des réels, on a

$$Z_{[a,b[}(\nu) + Z_{[b,c[}(\nu) = Z_{[a,c[}(\nu) \quad \text{(puisque, pour tout } n \in \mathbb{N},$$

$$Y_{[a,b[}(\delta_n, \nu) + Y_{[b,c[}(\delta_n, \nu) = Y_{[a,c[}(\delta_n, \nu)) .$$

<u>Lemme 6</u> <u>Soient</u> $I_1 \leq \ldots \leq I_k < J_1 \leq \ldots \leq J_l$ <u>des intervalles de</u> $\mathbb{R}$, <u>et</u> I,J <u>deux intervalles tels que</u> $I_k \leq I \leq J_1$, $I_k \leq J \leq J_1$ <u>et</u> $\mu(J) = \frac{\nu}{\nu+1}\,\mu(I)$. <u>Alors les deux</u> $(k+l+1)$-<u>uplets</u> $(Z_{I_1}(\nu), \ldots, Z_{I_k}(\nu)$, $Z_I(\nu), Z_{J_1}(\nu), \ldots, Z_{J_l}(\nu))$ <u>et</u> $(Z_{I_1}(\nu), \ldots, Z_{I_k}(\nu)$, $(\frac{\nu+1}{\nu})^{1/p} Z_J(\nu), Z_{J_1}(\nu), \ldots, Z_{J_l}(\nu))$ <u>ont le même type</u>.

On a $I = [a,b[$, $J = [c,d[$ avec $b-a = \frac{\nu+1}{\nu}(d-c)$. On définit $I_{(n)} = [a_n, b_n[$, $J_{(n)} = [c_n, d_n[$ de façon que $a < a_n < b_n < b$, $c < c_n < d_n < d$, $b_n - a_n = \frac{\nu+1}{\nu}(d_n - c_n)$, a_n et c_n étant des rationnels de dénominateur 2^n, $a_n \to a$, $b_n \to b$, $c_n \to c$, $d_n \to d$ quand $n \to \infty$. Il en résulte que $I_{(n)}$, $J_{(n)}$ sont des δ_n-intervalles, $I_k < I_{(n)} < J_1$, $I_k < J_{(n)} < J_1$ et $\mu(J_{(n)}) = \frac{\nu}{\nu+1}\,\mu(I_{(n)})$.

D'après le lemme 5, les deux $(k+l+1)$-uplets

$(Y_{I_1}(\delta_n, \nu), \ldots, Y_{I_k}(\delta_n, \nu)\, Y_{I_{(n)}}(\delta_n, \nu), Y_{J_1}(\delta_n, \nu), \ldots, Y_{J_l}(\delta_n, \nu))$ et

$(Y_{I_1}(\delta_n,\nu),\ldots,Y_{I_k}(\delta_n,\nu)\ ,\ (\frac{\nu+1}{\nu})^{1/p}\ Y_{J_{(n)}}(\delta_n,\nu),Y_{J_1}(\delta_n,\nu),\ldots,\ Y_{J_l}(\delta_n,\nu))$

ont le même type. On aura donc le résultat cherché en faisant tendre n vers l'infini suivant l'ultrafiltre $\mathcal{D}$, si l'on montre que

$$Z_I(\nu) = (Y_{I_{(n)}}(\delta_n,\nu))_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad Z_J(\nu) = (Y_{J_{(n)}}(\delta_n,\nu)_{n\in\mathbb{N}}$$

Or on a $Y_I(\delta_n,\nu) - Y_{I_{(n)}}(\delta_n,\nu) = Y_{[a,a_n[}(\delta_n,\nu) + Y_{[b_n,b[}(\delta_n,\nu)$.

Donc $\|Y_I(\delta_n,\nu) - Y_{I_{(n)}}(\delta_n,\nu)\| \leq \|Y_{[a,a_n[}(\delta_n,\nu)\| + \|Y_{[b_n,b[}(\delta_n,\nu)\|$

$\leq M(a_n-a)^{1/p} + M(b-b_n)^{1/p}$ (lemme 1) quantité qui tend vers 0 quand $n \longrightarrow \infty$. On a donc $Z_I(\nu) = (Y_I(\delta_n,\nu))_{n\in\mathbb{N}} = (Y_{I_{(n)}}(\delta_n,\nu))_{n\in\mathbb{N}}$; de même pour $Z_J(\nu)$. C.Q.F.D.

Dans l'espace $F''' = (F'')^{\mathbb{N}}/\mathcal{D}$ on définit (I étant un intervalle) :

$\mathcal{U}_I = (Z_I(\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$ (en fait $Z_I(\nu)$ n'est défini que pour $\nu \geq 2$; poser par exemple $Z_I(\nu) = 0$ pour $\nu = 0,1$) .

On a donc $M^{-p}\ \mu(I) \leq \|\mathcal{U}_I\|^p \leq M^p\ \mu(I)$, et, si $I_1,\ldots,I_k$ sont des intervalles disjoints, $\|\lambda_1\ \mathcal{U}_{I_1} + \ldots + \lambda_k\ \mathcal{U}_{I_k}\| = \|\,|\lambda_1|\,\mathcal{U}_{I_1} + \ldots + |\lambda_k|\,\mathcal{U}_{I_k}\|$

(car ces relations sont vraies pour $Z_I(\nu)$, pour chaque $\nu \geq 2$) .

De plus, si $a<b<c$, a,b,c étant réels, on a $\mathcal{U}_{[a,b[} + \mathcal{U}_{[b,c[} = \mathcal{U}_{[a,c[}$

(puisque, pour $\nu \geq 2$, on a $Z_{[a,b[}(\nu) + Z_{[b,c[}(\nu) = Z_{[a,c[}(\nu)$) .

<u>Lemme 7</u> <u>Soient $I_1 \leq \cdots \leq I_k < J_1 \leq \cdots \leq J_l$ des intervalles de $\mathbb{R}$, et I,J deux intervalles tels que $I_k \leq I \leq J_1$, $I_k \leq J \leq J_1$ et $\mu(J) = \sigma\,\mu(I)$ (σ réel >0) . Alors les deux (k+l+1)-uplets</u>

$$(\mathcal{U}_{I_1},\ldots,\mathcal{U}_{I_k},\mathcal{U}_I,\mathcal{U}_{J_1},\ldots,\mathcal{U}_{J_l}) \quad \text{et} \quad (\mathcal{U}_{I_1},\ldots,\mathcal{U}_{I_k},\sigma^{-1/p}\mathcal{U}_J,\mathcal{U}_{J_1},\ldots,\mathcal{U}_{J_l})$$

<u>ont le même type.</u>

On peut supposer $0<\sigma\leq 1$ en échangeant au besoin les rôles des deux intervalles I,J . Pour chaque $\nu \geq 2$ on définit l'entier $k_\nu \geq 1$ tel que

$$(\frac{\nu}{\nu+1})^{k_\nu-1} \geq \sigma > (\frac{\nu}{\nu+1})^{k_\nu} \quad . \text{ Alors } (\frac{\nu}{\nu+1})^{k_\nu} \longrightarrow \sigma \text{ quand}$$

$\nu \longrightarrow \infty$ (puisque $\sigma\,\frac{\nu}{\nu+1} \leq (\frac{\nu}{\nu+1})^{k_\nu} < \sigma$) .

On a $J = [c,d[$, avec $d-c = \sigma\,\mu(I)$. On définit pour $\nu \geq 2$ un intervalle $J_{(\nu)} = [c,d_\nu[$ avec $d_\nu - c = (\frac{\nu}{\nu+1})^{k_\nu}\,\mu(I)$. Donc $d_\nu < d$. On a donc $I_k \leq J_{(\nu)} \leq J_1$, et d'après le lemme 6 (appliqué k_ν fois) les deux (k+1+1)-uplets $(Z_{I_1}(\nu),\dots,Z_{I_k}(\nu)\ ,\ Z_I(\nu),\ Z_{J_1}(\nu),\dots,Z_{J_l}(\nu))$ et

$$(Z_{I_1}(\nu),\dots,Z_{I_k}(\nu)\ ,\ (\frac{\nu+1}{\nu})^{k_\nu/p}\ Z_{J_{(\nu)}}(\nu)\ ,\ Z_{J_1}(\nu)\ ,\dots,\ Z_{J_l}(\nu))$$ ont le

même type. On obtiendra donc le résultat cherché en faisant tendre ν vers l'infini suivant l'ultrafiltre $\mathcal{D}$, à condition de montrer que

$$\sigma^{-1/p}\ \mathcal{U}_J = ((\frac{\nu+1}{\nu})^{k_\nu/p}\ Z_{J_{(\nu)}}(\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$$. Comme $(\frac{\nu+1}{\nu})^{k_\nu/p} \longrightarrow \sigma^{-1/p}$

quand $\nu \longrightarrow \infty$, il suffit de montrer que $\mathcal{U}_J = (Z_{J_{(\nu)}}(\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$.

Or on a $Z_J(\nu) - Z_{J_{(\nu)}}(\nu) = Z_{[d_\nu,d[}(\nu)$ donc $\|Z_J(\nu) - Z_{J_{(\nu)}}(\nu)\| \leq M(d-d_\nu)^{1/p}$ qui tend vers 0 quand $\nu \longrightarrow \infty$. On a donc $\mathcal{U}_J = (Z_J(\nu))_{\nu\in\mathbb{N}} = (Z_{J_{(\nu)}}(\nu))_{\nu\in\mathbb{N}}$

C.Q.F.D.

<u>Lemme 8</u> <u>Soient</u> $I_1 \leq I_2 \leq \dots \leq I_k$; $J_1 \leq J_2 \leq \dots \leq J_k$ <u>des intervalles de</u> $\mathbb{R}$ <u>avec</u> $\mu(J_i) = \sigma_i\,\mu(I_i)$ $(i = 1,\dots,k)$, $\sigma_i > 0$. <u>Alors les deux k-uplets</u> $(\mathcal{U}_{I_1},\dots,\mathcal{U}_{I_k})$ <u>et</u> $(\sigma_1^{-1/p}\,\mathcal{U}_{J_1},\dots,\sigma_k^{-1/p}\,\mathcal{U}_{J_k})$ <u>ont le même type.</u>

Supposons d'abord $I_k \leq J_1$. On a alors $I_{i-1} \leq I_i \leq J_{i+1}$, $I_{i-1} \leq J_i \leq J_{i+1}$, et donc, d'après le lemme 7, les deux k-uplets

$$(\mathcal{U}_{I_1},\dots,\mathcal{U}_{I_{i-1}},\ \mathcal{U}_{I_i}\ ,\ \sigma_{i+1}^{-1/p}\,\mathcal{U}_{J_{i+1}}\ ,\dots,\ \sigma_k^{-1/p}\,\mathcal{U}_{J_k})$$

et $(\mathcal{U}_{I_1},\dots,\mathcal{U}_{I_{i-1}}\ ,\ \sigma_i^{-1/p}\,\mathcal{U}_{J_i}\ ,\ \sigma_{i+1}^{-1/p}\,\mathcal{U}_{J_{i+1}}\ ,\dots,\ \sigma_k^{-1/p}\,\mathcal{U}_{J_k})$ ont

le même type; ce qui donne le résultat cherché en appliquant ainsi k fois le lemme 7.

Dans le cas général, on prend des intervalles $I'_1 \leq \dots \leq I'_k$ de mêmes longueurs respectives que $I_1,\dots,I_k$, tels que $I'_k \leq I_1$ et $I'_k \leq J_1$. D'après ce qu'on

vient de montrer, $(u_{I'_1}, \ldots, u_{I'_k})$ a d'une part le même type que $(u_{I_1}, \ldots, u_{I_k})$, d'autre part le même type que

$$(\sigma_1^{-1/p} u_{J_1}, \ldots, \sigma_k^{-1/p} u_{J_k}) \quad . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

<u>Lemme 9</u> <u>Soient</u> $I_1, \ldots, I_k$ <u>des intervalles de</u> $\mathbb{R}$ <u>deux à deux disjoints.</u> <u>Alors</u> $\| \lambda_1 u_{I_1} + \ldots + \lambda_k u_{I_k} \| = C(|\lambda_1|^p \mu(I_1) + \ldots + |\lambda_k|^p \mu(I_k))^{1/p}$ <u>avec</u> $C = \| u_{[0,1[} \|$, <u>donc</u> $M^{-1} \leq C \leq M$.

Comme on a vu que $\| \lambda_1 u_{I_1} + \ldots + \lambda_k u_{I_k} \| = \| |\lambda_1| u_{I_1} + \ldots + |\lambda_k| u_{I_k} \|$, on peut supposer $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$.

On définit les réels $a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ de façon que $a_i - a_{i-1} = \lambda_i^p \mu(I_i)$ pour $i = 1, \ldots, k$ et on pose $J_i = [a_{i-1}, a_i[$ $(1 \leq i \leq k)$. D'après le lemme 8, $(u_{J_1}, \ldots, u_{J_k})$ a le même type que $(\lambda_1 u_{I_1}, \ldots, \lambda_k u_{I_k})$ et par suite

$$\| \lambda_1 u_{I_1} + \ldots + \lambda_k u_{I_k} \| = \| u_{J_1} + \ldots + u_{J_k} \| \quad .$$

Mais on a $u_{J_1} + \ldots + u_{J_k} = u_{[0,a_k[}$. D'après le lemme 8, $u_{[0,a_k[}$ et $a_k^{1/p} u_{[0,1[}$ ont le même type, c'est-à-dire la même norme.

Finalement, on a $\| \lambda_1 u_{I_1} + \ldots + \lambda_k u_{I_k} \| = a_k^{1/p} \| u_{[0,1[} \|$

$$= \| u_{[0,1[} \| (|\lambda_1|^p \mu(I_1) + \ldots + |\lambda_k|^p \mu(I_k))^{1/p} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Le lemme 9 montre que le sous-espace fermé de F''' engendré par les u_I, pour tous les intervalles I de $\mathbb{R}$, est isométrique à $L^p(\mathbb{R})$. Comme F''' est finiment représentable dans F, on voit que $L^p(\mathbb{R})$ l'est aussi, ce qui achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Dacunha-Castelle et J.L. Krivine. Application des ultraproduits à l'étude des espaces de Banach - Studia Math. 41 (1972) p. 315-334.

[2] J. Stern. Some applications of model theory in Banach space theory. à paraître aux Annals of Math. Logic.

[3] Séminaire Maurey-Schwartz - Ecole Polytechnique - Paris - 1973-74 Exposé n°24.

[4] A. Dvoretzky. Somme results on convex bodies and Banach spaces. Proc. Symp. on linear spaces, Jerusalem 1961.

[5] L. Tzafriri. On spaces with unconditional bases, à paraître, Israel J. of Math.

[6] Séminaire Maurey-Schwartz. Ecole Polytechnique - Paris - 1973-74 Exposé n° 19.