D. Dacunha-Castelle

Variables aléatoires échangeables et espaces d'Orlicz (suite)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1974-1975), exp. nº 11, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1974-1975____A10_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   M A U R E Y - S C H W A R T Z   1 9 7 4 - 1 9 7 5

VARIABLES ALEATOIRES ECHANGEABLES ET ESPACES D'ORLICZ
(suite)

par D. DACUNHA-CASTELLE

Exposé N° XI

29 Janvier 1975

Un R-espace est un espace de Banach réticulé tel que

1. $0 \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$ et $x \neq y \Rightarrow \|x\| < \|y\|$
2. $\| \, |x| \, \| = \|x\|$
3. Toute suite d'éléments > 0, décroissante est convergente.

Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille de R-espaces et $\mathfrak{D}$ un ultrafiltre sur I. L'ultraproduit $\prod_{i \in I} B_i/\mathfrak{D}$ est alors [1] un R-espace pour l'ordre $(f_i)_{i\in I} \geq (g_i)_{i \in I}$ si $f_i \geq g_i$ $\mathfrak{D}$ pp.

L_F désigne l'espace d'Orlicz $L_F[(0,1)]$, où $(0,1)$ est muni de la mesure de Lebesgue et F est une fonction d'Orlicz convexe modérée (voir exposé précédent).

On pose $\psi(f) = \int F(f)$ pour $f \in L_F$.

Sur $L_F^{\mathbb{N}/\mathfrak{D}}$, où $\mathfrak{D}$ est un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$, fixé une fois pour toutes (et non trivial), on pose

$$\psi((f_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \lim_{\mathfrak{D}} \psi(f_n)$$

L_F étant un R-espace, il en est de même de ses ultrapuissances.

Soit $\mathcal{A}_1 = \{(1_{A_n})_{n \in \mathbb{N}},\ A_n \text{ borélien}\}$.

Posons $P_1(f) = \lim_{\mathfrak{D}} P(A_n)$, si $f = (1_{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$.

On a alors défini une mesure additive P_1 sur l'anneau $\mathcal{A}_1$. Comme P_1 est σ-additive, alors le complété $\overline{\mathcal{A}}_1$ de $\mathcal{A}_1$ dans $L_F^{\mathbb{N}/\mathfrak{D}}$ est un σ-anneau sur lequel P_1 est σ-additive.

$(\overline{\mathcal{A}}_1, P_1)$ sera interprété comme une probabilité sur une σ-algèbre isomorphe au quotient d'une σ-algèbre de parties d'un ensemble par le σ-idéal des éléments P_1-nuls, ou simplement comme une σ-algèbre des parties d'un ensemble Ω_1.

Soit alors R_1' l'espace vectoriel des éléments étagés sur $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$.

<u>Lemme 1</u> : Le complété de R_1' est l'espace R_1 engendré par $\{(f_n)_{n \in \mathbb{N}},\ (F(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ équiintégrable$\}$.

En effet, notant g^K la variable tronquée $g\, 1_{(|g|<K)}$; si (f_n) est équi-intégrable, $\|f_n - f_n^K\| < \varepsilon$, ε fixé, K assez grand.

Fixons m, $2^{-m} \leq \varepsilon$, $A_{jn} = \{ \frac{j}{2^m} \leq f_n < \frac{j+1}{2^m} \}$ pour $|j| \leq 2^m.K$.

Si $f_{n,m} = \sum_j \frac{j}{2^m} 1_{A_{jn}}$, on a $\|f_{n,m} - f_n^K\| < \varphi(\varepsilon)$

(où φ est une fonction continue convexe, $\varphi(0) = 0$ définie à partir de $\sup_\lambda \frac{F(\lambda x)}{F(\lambda)}$, cf. [1]),

et donc

$$\|(f_n) - \sum_j \frac{j}{2^m} (1_{A_{jn}})_{n \in \mathbb{N}}\| \leq \varepsilon + \varphi(\varepsilon) \quad ,$$

d'où le lemme.

Sur R_1', on a

$$\begin{aligned}\psi(\Sigma \lambda_j (1_{A_{jn}})_{n\in\mathbb{N}}) &= \Sigma F(\lambda_j) \lim_n P(A_{jn}) \\ &= \Sigma F(\lambda_j)\, P_1((A_{jn})_{n\in\mathbb{N}}) \\ &= \Sigma F(\lambda_j)\, P_1(A_j)\end{aligned}$$

si $(A_{jn})_{n\in\mathbb{N}} = A_j$. Donc $R_1 = L_F(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$.

Soit S_1 l'ensemble des éléments étrangers à R_1.

<u>Lemme 2</u> : On a

$$\begin{aligned}L_F^{\mathbb{N}/\mathcal{D}} &= R_1 \oplus S \\ &= L_F(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1) \oplus S\end{aligned}$$

En effet, soit $x = y+z$, $y \in R_1$, $0 < y < x$, et $\psi(y)$ maximal parmi toutes les valeurs obtenues dans de telles décompositions. Supposons $z = y' + z'$ avec $0 < y' \leq z'$ et $y' \in R_1$. D'après la propriété 1. des R-espaces, on aurait $\psi(y+y') > \psi(y)$ ce qui est impossible. Donc z est étranger aux éléments ≥ 0 de R_1 donc à R_1 d'où le lemme.

<u>Lemme 3</u> : Soit $(f_1) = (f_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, f_k = (f_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ des éléments de $L_F(\Omega_1, \mathcal{A}_1 P_1)$. Soit π_n , π les lois (sur $\mathbb{R}^k$) de $(f_1^n, \dots, f_k^n)$ et $(f_1, \dots, f_k)$. Alors $\pi = \lim_{\mathcal{D}} \pi_i$ (pour la convergence étroite).

En effet, soit $\mathcal{T}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel réticulé de fonctions réelles sur $\mathbb{R}^k$, engendré par les fonctions $1, x_1, \dots, x_k$; si $\tau(x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{T}$, on a $\tau(f_1, \dots, f_k) = (\tau(f_1^n, \dots, f_k^n))_{n \in \mathbb{N}}$, parce que l'ultraproduit est compatible avec les opérations de treillis et d'espace vectoriel et que $1_\Omega = (1_{\Omega_n})_{n \in \mathbb{N}}$.
Il en résulte que si $F \circ \tau$ est intégrable, on a

$$\int F(\tau(f_1, \dots, f_k))dP_1 = \lim_{\mathfrak{D}} \int F(\tau(f_1^n, \dots, f_k^n))\, dP$$

Or le sous-espace $\mathcal{T}_b$ de $\mathcal{T}$, formé des fonctions bornées de $\mathcal{T}$ est dense dans $C(\mathbb{R}^k \cup \{\infty\})$ (ou $\mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$ est le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^k$), puisque c'est un sous-espace réticulé séparant les points.
En considérant des fonctions bornées ψ de la forme $F^{-1} \circ \varphi$, φ bornée, on obtient le lemme 3.
Soit B_o un R-espace (ou simplement un Banach) et $B_1, \dots, B_k \dots$ les ultra-puissances successives de B_o, $B_1 = B_o^{\mathbb{N}/\mathfrak{D}}, \dots, B_k = B_{k-1}^{\mathbb{N}/\mathfrak{D}} \dots$.
Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de B, ne contenant aucune sous-suite convergente.
Si $x \in E_{k-1}$, on note $J_{k-1,k}(x)$ l'image de x dans l'injection canonique $E_{k-1} \to E_k$, $J_{k-1,k}(x) = ((x_n))_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n = x$ pour tout n.

On note $J_{h,k}$ l'injection canonique $B_h \to B_k$, $J_{h,k} = J_{k-1,k} \circ \dots \circ J_{h,h+1}$, $h = 0,1 \dots k = 0,1 \dots h \leqq k$ (les $J_{h,k}$ sont des isométries de R-espaces).

<u>Définition</u> : La suite $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $e_k = (J_{0,k-1} f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'appelle suite d'<u>indiscernables</u> construite au-dessus de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On peut considérer $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ comme une suite de $\prod_{k \in \mathbb{N}} B_k/\mathfrak{D}$.

<u>Définition</u> : Un terme de degré k d'un R-espace est une expression $\tau(1, f_1, \dots, f_k)$ où $\tau(1, x_1, \dots, x_k)$ est un élément de l'espace vectoriel réticulé (sur $\mathbb{R}$) engendré par les k-variables $x_1, \dots, x_k$.

<u>Définition</u> : On dit qu'une suite d'éléments $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'un R-espace (resp. d'un Banach) est écartable au-dessus d'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si pour tout k,

tout h, tout terme τ de degré k+h (resp. toute combinaison linéaire de k+h éléments), tout $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, on a

$$\| \tau(e_1,\dots,e_k, f_1,\dots,f_h) \| = \| \tau(e_{n_1},\dots,e_{n_k},f_1,\dots,f_h) \|$$

$$(\text{resp. } \|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_k e_k + \mu_1 f_1 + \dots + \mu f_h\| = \|\lambda_1 e_{n_1} + \dots + \lambda_k e_{n_k} + \mu_1 f_1 + \dots + \mu_h f_h\|)$$

On notera x tout élément $J_{h,k}(x)$ quelque soit h et k, il n'y a pas de confusion possible .

<u>Lemme 4</u> : La suite d'indiscernables $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ construite au-dessus de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est formée d'éléments distincts, et est écartable au-dessus de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

<u>Démonstration</u> : On note donc f_n par $J_{o,k}(f_n)$, par exemple,

$$\| \tau(e_{n_1},f_1,.f_h) \|_{B_{n_1}} = \| \tau(e_1,f_1,.f_h) \|_{B_1}$$

En effet, les 2 quantités sont respectivement :

$$\lim_{n,\mathfrak{D}} \| J_{o,n_1} \tau(f_n,f_1,\dots,f_h) \|_{B_{n_1}} = \lim_{n,\mathfrak{D}} \| \tau(f_n,f_1,\dots,f_h) \|_{B_o}$$

$$\text{et} \quad \lim_{n,\mathfrak{D}} \| J_{0,1}\ \tau(f_n,f_1,\dots,f_h) \|_{B_1} = \lim_{n,\mathfrak{D}} \| \tau(f_n,f_1,\dots,f_h) \|_{B_o}$$

Montrons alors par récurrence sur k que pour tout τ, tout h, on a

$$\| \tau(e_{n_1},\dots,e_{n_k},f_1,\dots,f_h) \|_{B_{n_k}} = \| \tau(e_1,\dots,e_k,f_1,\dots,f_h) \|_{B_k}$$

quels que soient $n_1 < \dots < n_k$.

$$\| \tau(e_{n_1},\dots e_{n_k},f_1,\dots,f_h) \|_{B_{n_k}} = \lim_{\mathfrak{D}} \| \tau(e_{n_1},\dots,e_{n_{k-1}},f_n,f_1,\dots,f_h) \|_{B_{n_k-1}}$$

(par définition et parce que J_{n_k-1,n_k} est une isométrie)

$$= \lim_{\mathfrak{D}} \| \tau(e_1, \dots, e_{k-1}, f_n, f_1, \dots, f_h) \|_{B_{k-1}}$$

(par hypothèse de récurrence)

$$= \| \tau(e_1, \dots, e_{k-1}, e_k, f_1, \dots, f_h) \|_{B_k}$$

par définition (on utilise à chaque étape la compatibilité de l'ultra-puissance et de la structure de R-espace).

Enfin $$\|e_i - e_j\| = \|e_1 - e_2\| \quad \text{si } i < j$$

$$= \lim_{m,\mathfrak{D}} \lim_{m,\mathfrak{D}} \|f_n - f_m\|_{B_o}$$

$\neq 0$ puisque $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne contient pas de sous-suite convergente.

Passons maintenant au cas des espaces d'Orlicz. On a de plus

<u>Lemme 5</u> : La suite $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est ψ-écartable au-dessus de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire

$$\psi(\tau(e_{n_1}, \dots, e_{n_k}, f_1, \dots, f_h)) = \psi(\tau(e_1, \dots, e_k, f_1, \dots, f_h))$$

pour tous τ, k, h, $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, où $\psi(f_n)_{n \in \mathbb{N}} = \lim_{\mathfrak{D}} \psi(f_n)$ permet de définir ψ sur tous les espaces B_k, si $B_o = L_F$. La démonstration de ce lemme est la même que celle du précédent, ψ remplaçant $\| \ \|$.
(C'est une propriété plus forte dans le cas des Orlicz que l'écartabilité pour la norme).

Considérons les ultrapuissances B_k de $L_F(\Omega, \mathcal{O}, P) = B_o$.
On a vu que $B_1 = R_1 \oplus S_1$, $R_1 = L_F(\Omega_1, \mathcal{O}_1, P_1)$.
On a de même $R_1^{\mathbb{N}/\mathfrak{D}} = L_F(\Omega_2, \mathcal{O}_2, P_2) \oplus S_2'$

$$= R_2 \oplus S_2' .$$

Posant $S_2 = S_2' \oplus S_1^{\mathbb{N}/\mathfrak{D}}$, on a $\quad B_2 = R_2 \oplus S_2$.

On voit par induction que $B_k = R_k \oplus S_k$ où
$$R_k = L_F(\Omega_k, \mathcal{A}_k, P_k)$$
$$R_{k-1}^{\mathbb{N}/\mathcal{D}} = R_k \oplus S'_k$$
$$S_k = S'_k \oplus S_{k-1}^{\mathbb{N}/\mathcal{D}}$$

De plus, il s'agit d'une <u>ψ-somme directe</u>, c'est-à-dire si $x \in B_k$, $x = y+z$, $y \in R_k$, $z \in S_k$, alors $\psi(x) = \psi(y) + \psi(z)$.

<u>Lemme 6</u> : On a $J_{h,k}(R_h) \subset R_k$ pour tout h, k, et en particulier $(\mathcal{A}_{k-1}, P_{k-1})$ est une sous σ-algèbre mesurée de $(\mathcal{A}_k, P_k)$. Ce lemme est immédiat et montre en particulier que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équiintégrable sur $(\mathcal{A}, P)$ $(J_{o,k}(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est équiintégrable sur $(\mathcal{A}_k, P_k)$.

On note $(\mathcal{A}_\infty, P_\infty) = \underset{n}{V} (\mathcal{A}_n, P_n)$. Nous aurons besoin du lemme général suivant sur les R-espaces.

<u>Lemme 7</u> : Soient $(g_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (g_n^\ell)_{n \in \mathbb{N}}$ ℓ suites d'un R-espace B_o, et soient $(e_k^1)_{k \in \mathbb{N}} \dots (e_k^\ell)_{k \in \mathbb{N}}$ les indiscernables construits respectivement au-dessus de ces suites. Soit $u_n = \tau(g_n^1, \dots, g_n^\ell)$ un terme de B_o, alors la suite $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ des indiscernables construits au-dessus de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donnée par $t_k = \tau(e_k^1, \dots, e_k^\ell)$, $k \in \mathbb{N}$.

<u>Démonstration</u> : $J_{o,k}$ est une isométrie de R-espace, donc

$$\tau(J_{ok}(g_n^1), \dots, J_{ok}(g_n^\ell)) = J_{ok}(\tau(g_n^1, \dots, g_n^\ell))$$

On a alors en revenant aux espaces d'Orlicz

$$e_1 = r_1 + s_1 \quad , \quad r_1 \in R_1 \ , \ s_1 \in S_1$$

d'où une décomposition (non unique) de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} = (g_n)_{n \in \mathbb{N}} + (h_n)_{n \in \mathbb{N}}$$
$$(g_n)_{n \in \mathbb{N}} = r_1 \quad , \quad (h_n)_{n \in \mathbb{N}} = s_1$$

$(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ désignant les indiscernables au-dessus de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a, d'après le lemme 7, $e_k = r_k+s_k$ et

Lemme 8 : 1. $r_i \cap s_j = 0 \qquad i,j \in \mathbb{N}$

2. $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires échangeables dans $(\mathcal{O}_\infty, P_\infty)$

3. $s_i \cap s_j = 0$, $i \neq j$, et les (s_i) engendrent dans $\prod_{k\in\mathbb{N}} B_k/\mathcal{D}$ un espace d'Orlicz ℓ_f.

Démonstration : 1) Si $i = j$, $\|r_i \cap s_i\| = \|r_1 \cap s_1\|$, (écartabilité et lemme)

$$= 0$$

Si $i < j$, $\|r_i \cap s_j\| = \lim_n \lim_m \|g_n \cap h_m\|$

Or $\lim_m \|g_n \cap h_m\| = 0$ car $(h_m)_{m\in\mathbb{N}} \in S_1$

on a $\lim_m \|g \cap h_m\| = 0$ pour tout $g \in L_F$.

Si $i > j$,
$$\|r_i \cap s_j\| = \|r_2 \cap s_1\| = \lim_n \|g_n \cap s_1\| = 0 \text{ car } (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R_1 .$$

2) Les variables $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont d'après le lemme des indiscernables au sens des variables aléatoires puisque $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équiintégrable. 2) résulte alors de l'exposé précédent.

3) On a $\lim \|h_{n_o} \cap h_n\| = 0$ puisque $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_1$.

On a
$$\psi(\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2) = \lim \psi(\lambda_1 s_1 + \lambda_2 h_n)$$

et $s_1 \cap h_n = 0$ puisque $J_{o,1}(h_n) \in R_1$

donc $\psi(\lambda_1 s_1+\lambda_2 h_n) = \psi(\lambda_1 s_1) + \psi(\lambda_2 h_n)$

Le même argument montre par induction que $\psi(\lambda_1 s_1+\dots+\lambda_k s_k) = \psi(\lambda_1 s_1)+\dots+\psi(\lambda_k s_k)$.

Mais les variables (s_k) sont ψ-écartables.

Donc $\psi(\lambda s_i)$ est indépendant de i et vaut $f(\lambda)$. La convexité de ψ implique celle de f. f est donc une fonction d'Orlicz tempérée parce que ψ est tempérée, d'où 3.

Nous sommes alors en mesure d'énoncer un certain nombre de résultats.

Proposition 1 : $\Sigma\, c_i e_i$ converge dans $\prod B_k/\mathcal{D}$ si et seulement si $\Sigma\, c_i r_i$ et $\Sigma\, c_i s_i$ convergent.

Proposition 2 : Si E est un sous-espace de dimension infinie d'un espace L_F, alors il existe un espace du type $\ell_f \cap [Y_n]_F$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de variables échangeables et signe-invariantes (entendu au sens topologique des suites $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent dans ℓ_f et $[Y_n]_F$) qui se représente finiment dans E.

Proposition 2 bis : Si la boule unité E_o de E est telle que $\{F(\xi), \xi \in E_o\}$ est équiintégrable alors il existe un espace $[Y_n]_F$ qui se représente finiment dans E.

Si la boule unité E_o de E n'est pas équiintégrable, il existe un espace d'Orlicz ℓ_f qui se représente dans E, avec $f(\lambda)$ de la forme $\int_0^\infty F(\lambda x)\, dH(x)$.

Théorème 1 : Si B est un espace à base symétrique qui est isomorphe à un à un sous-espace de L_F, alors B est isomorphe à un espace du type $[Y_n]_F \cap \ell_f$ au sens de la proposition 2.

Démonstration : a) Le théorème 1 est évident si on remarque que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant la base symétrique d'un espace de Banach, alors

$$\left\|\sum_1^N \lambda_k f_k\right\| = \left\|\sum_1^N \lambda_k \ell_k\right\| ,$$

$(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant les indiscernables construits sur $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) On sait que $B^{\mathbb{N}/\mathcal{D}}$ est finiment représentable dans B. Donc $\prod_{k \in \mathbb{N}} B_k/\mathcal{D}$ est finiment représentable dans B_o.

La seule chose à montrer est que les indiscernables peuvent être construits signe-invariants. Donc, au lieu de prendre les indiscernables sur une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on prend la suite $e'_n = (e_n - e_{n-1})$ qui donne les propositions 2 et 2 bis quand on la décompose en r_k et s_k.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Dacunha-Castelle et Krivine : Application des ultraproduits à l'étude des espaces et des algèbres de Banach. Studia Math. t41 1972 p. 315-334.
