Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

G. Pisier

Un théorème d'extrapolation et son application aux suites sommables dans L^o

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. nº 6, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974____A7_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

SEMINAIRE MAUREY-SCHWARTZ 1973-1974

UN THEOREME D'EXTRAPOLATION ET SON APPLICATION AUX SUITES SOMMABLES DANS L^0

par G. PISIER

Exposé N° VI

5 Décembre 1973

L'exposé ci-dessous détaille les résultats de [2]. On rappelle que l'on pose, si (Ω,μ) est un espace mesuré fini, si f est une fonction mesurable sur (Ω,μ) :

$$\forall\, \alpha \in]0,1[\quad , \qquad J_\alpha(f,d\mu) = \inf \{c > 0 \mid \mu\,\{|f| > c\} \leq \alpha\} .$$

L'argument essentiel pour la suite est le théorème suivant, qui généralise un résultat bien connu dans le cas où $\mathcal{H}$ n'a qu'un seul élément. (cf. [4], exposé XVIII, proposition 2).

<u>Théorème 1</u> : Soit K un compact, $\mathcal{H}$ un ensemble convexe vaguement compact de mesures de Radon positives sur K et E une partie de C(K). Soient p et q deux nombres réels tels que $0 < p < q < \infty$. On suppose qu'il existe une constante C telle que :

$$(*) \quad \forall\, \lambda \in \mathcal{H} \ , \ \exists\, \mu \in \mathcal{H}, \ \forall\, x \in E : \left(\int |x|^q d\lambda\right)^{1/q} \leq C \left(\int |x|^p d\mu\right)^{1/p} .$$

Il existe alors une constante ρ et $\beta \in]0,1[$ tels que pour toute $\lambda \in \mathcal{H}$, il existe $\Lambda \in \mathcal{H}$ telle que :

$$\lambda \leq 2\Lambda \quad \text{et} \quad \left(\int |x|^q\, d\Lambda\right)^{1/q} \leq \rho\ J_\beta(x,d\Lambda) .$$

<u>Démonstration</u> : a) Supposons d'abord $\mathcal{H} = \{\Lambda\}$. Soit β dans $]0,1[$ tel que $1 - C\,\beta^{1/r} > 0$ avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

Si $\Lambda\,\{|x| > c\} \leq \beta$, on a :

$$\left(\int |x|^q d\Lambda\right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\{|x| > c\}} |x|^p d\Lambda\right)^{1/p} + C \left(\int_{\{|x| \leq c\}} |x|^p d\Lambda\right)^{1/p}$$

donc par l'inégalité de Hölder :

$$\left(\int |x|^q d\Lambda\right)^{1/q} \leq C\,\beta^{1/r} \left(\int |x|^q d\Lambda\right)^{1/q} + C\ c\ \Lambda\ (1)$$

par conséquent $\quad (1 - C\,\beta^{1/r}) \left(\int |x|^q\, d\Lambda\right)^{1/q} \leq C\ \Lambda\ (1)\ \ J_\beta(x,d\Lambda)$.

b) Cas général : Soit $\lambda_o \in \mathcal{H}$. On pose $\mathcal{H}_o = \frac{1}{2}(\lambda_o + \mathcal{H})$; c'est un convexe vaguement compact contenu dans $\mathcal{H}$. Soit $\lambda \in \mathcal{H}_o$, et soit $\mu \in \mathcal{H}$ telle que (*) soit réalisé. On aura :

$$\forall\, x \in E, \qquad \left(\int |x|^q d\lambda\right)^{1/q} \leq C \left(\int |x|^p d\mu\right)^{1/p} \leq C\, 2^{1/p} \left(\int |x|^p d\left(\frac{\lambda_o + \mu}{2}\right)\right)^{1/p} .$$

Par conséquent, puisque $\frac{\lambda_o + \mu}{2} \in \mathcal{H}_o$, l'hypothèse (*) est vérifiée par $\mathcal{H}_o$, à condition de remplacer C par $2^{1/p}$ C.

Posons pour $\lambda \in \mathcal{H}_o$:

$$\Gamma(\lambda) = \left\{\mu \in \mathcal{H}_o \;\middle|\; \forall\, x \in E,\ \left(\int |x|^q d\lambda\right)^{1/q} \leq 2^{1/p}\, C \left(\int |x|^p d\mu\right)^{1/p} \right\} .$$

On voit que Γ est une multiapplication de $\mathcal{H}_o$ dans lui-même, à valeurs convexes compactes non vides. De plus, Γ est s.c.s., c'est-à-dire que l'ensemble $\{(\lambda,\mu) \in \mathcal{H}_o \times \mathcal{H}_o \mid \mu \in \Gamma(\lambda)\}$ est fermé dans $\mathcal{H}_o \times \mathcal{H}_o$.

D'après un théorème de Ky-Fan [cf. [1] p. 167] il existe un point fixe $\Lambda \in \mathcal{H}_o$ tel que $\Lambda \in \Gamma(\Lambda)$, soit encore :

$$\forall\, x \in E, \qquad \left(\int |x|^q d\Lambda\right)^{1/q} \leq 2^{1/p}\, C \left(\int |x|^p d\Lambda\right)^{1/p} ;$$

puisque $\lambda_o \leq 2\Lambda$, a) permet de conclure.

Définition : Soit E un espace de Banach, F et G deux espaces quasi-normés, nous dirons qu'un opérateur u de $E \otimes G$ dans F est 0-G sommant, s'il existe une constante C, un réel α dans $]0,1[$ et une probabilité de Radon λ sur $(B_{E'}, \sigma(E',E))$ tels que :

$$\forall\, z \in E \otimes G \qquad \|u(z)\| \leq C\, J_\alpha(\| \langle z,\xi\rangle \|_G, d\lambda(\xi)) .$$

Les opérateurs 0- $\mathbb{K}$ sommants (où $\mathbb{K}$ est le corps des scalaires i.e. $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) s'identifient aux opérateurs 0-sommants. La définition précédente n'est pas la définition classique, on trouvera des définitions équivalentes dans [1], exposé 9).

Il est évident qu'un opérateur 0-G sommant est p-G sommant $\forall\, p \in]0,\infty[$.

Notations : Si K est un compact, $\mathcal{P}(K)$ désigne l'ensemble des probabilités de Radon sur K. Soit p,q tels que $0 \le p < q < \infty$, soit E un espace de Banach. nous dirons - pour abréger - que E vérifie $\Pi_p(E,.) = \Pi_q(E,.)$ si, pour tout espace quasi-normé F, tout opérateur q-sommant de E dans F est p-sommant.

Le théorème suivant est démontré dans [3]. Nous l'admettrons, on en verra une nouvelle démonstration plus tard.

Théorème 2 : Soit $0 < p < q < 2$, soit E un espace de Banach tel que $\Pi_p(E,.) = \Pi_q(E,.)$, il existe une constante C telle que, pour tout espace de Banach G, pour tout espace quasi-normé F et tout opérateur u de $E \otimes G$ dans F, on ait :

$$\pi_{p,G}(u) \le C\pi_{q,G}(u) \ .$$

[voir l'exposé I pour la définition de $\pi_{p,G}(u)$].

Le théorème 1 permet de retrouver, en l'améliorant un résultat de Maurey [corollaire 91 de [3] ou remarque 3 de [4], exposé XXI].

Théorème 3 : Soient p,q deux nombres réels tels que $0 < p < q < 2$, et E un espace de Banach tel que $\Pi_p(E,.) = \Pi_q(E,.)$. Il existe alors une constante ρ et un nombre $\beta \in]0,1[$ tels que la propriété suivante soit réalisée pour tout espace de Banach G : si u est un opérateur q-G sommant de $E \otimes G$ dans un espace quasi-normé F, u est en fait 0-G sommant ; de plus, il existe une probabilité de Radon sur la boule unité B' de E' (munie de la topologie $\sigma(E',E)$) telle que l'on ait, pout tout z dans $E \otimes G$:

$$(1) \quad \|u(z)\|_F \le 2^{1/q}\,\pi_{q,G}(u)\,\Big(\int \|<z,\xi>\|_G^q\, d\Lambda(\xi)\Big)^{1/q} \le \rho\,\pi_{q,G}(u)\, J_\beta(\|<z,\xi>\|_G, d\Lambda(\xi)).$$

Dans le cas $q \ge 1$, on peut supposer que le support de Λ est contenu dans l'adhérence (pour $\sigma(E',E)$) H de l'ensemble des points extrêmaux de B'.

Enfin, si $q = 2$, la conclusion reste vraie si $G = \mathbb{K}$.

Démonstration : La première partie de la conclusion résulte de la deuxième partie. La restriction $q < 2$ résulte de ce que le théorème 2 reste trivialement vrai pour $G = \mathbb{K}$ mais est faux en général quand $q = 2$.

① Soit $z \in E \otimes G$, on notera $\widetilde{z}$ la fonction de $C(B',G)$ définie par $\xi \to \langle \xi, z \rangle$. Soit $\lambda \in \mathcal{P}(B')$, l'opérateur u_λ de $E \otimes G$ dans $L^q(B',\lambda,G)$ défini (abusivement) par $z \to \widetilde{z}$ est trivialement q-G sommant et $\pi_{q,G}(u_\lambda) \leq 1$. L'hypothèse du théorème 3 et le théorème 2 entraînent $\pi_{p,G}(u) \leq C$.

D'après le théorème de Pietsch (théorème 1 de l'exposé 1), il existe donc $\mu \in \mathcal{P}(B_{E'})$ telle que :

$$\forall z \in E \otimes G, \quad \|u_\lambda(z)\|_{L^q(B',\lambda,G)} = \left(\int \|\widetilde{z}(\xi)\|_G^q \, d\lambda(\xi)\right)^{1/q} \leq C\left(\int \|\widetilde{z}(\xi)\|_G^p \, d\mu(\xi)\right)^{1/p} \quad ;$$

quand z est dans $E \otimes G$, la fonction $\xi \to \|\widetilde{z}(\xi)\|_G$ est continue sur B' muni de la topologie $\sigma(E',E)$, on peut donc appliquer le théorème 1 :

② Soit donc u un opérateur q-G sommant de $E \otimes G$ dans un espace quasi-normé F ; d'après le théorème de Pietsch, il existe $\lambda \in \mathcal{P}(B')$ telle que :

$$\forall z \in E \otimes G, \qquad \|u(z)\| \leq \pi_{q,G}(u) \left(\int \|\widetilde{z}(\xi)\|_G^q \, d\lambda(\xi)\right)^{1/q} ,$$

il existe donc $\Lambda \in \mathcal{P}(B')$ telle que (1) soit vérifiée avec les constantes ρ et β données par le théorème 1.

③ Dans le cas $1 < p < q$, le théorème de Pietsch et l'analogue de ① entraînent : $\forall \lambda \in \mathcal{P}(H)$, $\exists \mu \in \mathcal{P}(H)$ telle que :

$$\forall z \in E \otimes G \qquad \left(\int \|\widetilde{z}(\xi)\|_G^q \, d\lambda(\xi)\right)^{1/q} \leq C\left(\int \|\widetilde{z}(\xi)\|^p \, d\mu(\xi)\right)^{1/p}$$

on peut encore appliquer le théorème 1; on conclut comme dans ② mais on obtient de plus $\Lambda \in \mathcal{P}(H)$.

(4) Pour que la démonstration soit complète, il faut traiter le cas $q = 1$; mais d'après [4] (exposé XXII, corollaire 3), si les hypothèses du théorème sont vérifiées pour $q = 1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'elles soient vérifiées pour $p = 1 + \varepsilon$; (3) permet donc de conclure dans ce cas.

Remarque : D'après la "conjecture de Pietsch" ([4], exposé XII, corollaire 1) les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées par tout espace de Banach si $0 \leq p < q < 1$.
Le théorème de ([4], exposé XXI) donne une caractérisation des espaces de Banach qui vérifient les hypothèses du théorème 3.

Nous allons appliquer le théorème précédent pour retrouver un théorème de Grothendieck et sa version améliorée dans [4] (exposé XXII) :

Théorème 4 : Soit (Ω, μ) un espace mesuré, pour tout espace de Hilbert H :

$$\mathcal{L}(L^1(\Omega,\mu),H) = \Pi_0(L^1(\Omega,\mu),H) .$$

Démonstration : (1) Soit $\delta > 0$, on montre d'abord que

$$\mathcal{L}(L^1(\Omega,\mu),H) = \Pi_{1+\delta}(L^1(\Omega,\mu),H) ;$$

en utilisant des variables gaussiennes indépendantes, on montre qu'il existe un espace de probabilité (Ω',P) et un plongement isométrique Γ de H dans $L^1(\Omega',P)$ vérifiant :

$$\forall\, \delta > 0, \ \forall\, h \in H \qquad \|\Gamma(h)\|_{L^{(1+\delta)'}(\Omega,P)} = C_\delta \, \|h\|$$

avec $\dfrac{1}{1+\delta} + \dfrac{1}{(1+\delta)'} = 1$ et

$$\text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} : \ C_\delta = \frac{\left(\int |x|^{(1+\delta)'} d\gamma(x)\right)^{\frac{1}{(1+\delta)'}}}{\int |x| \ d\gamma(x)} \ ;$$

$$\text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} : \ C_\delta = \frac{\left[\int \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{(1+\delta)'} d\gamma(x)\ d\gamma(y)\right]^{\frac{1}{(1+\delta)'}}}{\int \sqrt{x^2+y^2}\ d\gamma(x)\ d\gamma(y)}$$

où γ est une probabilité gaussienne centrée sur $\mathbb{R}$.

Par transposition, on voit que ${}^tA$ identifie H à un quotient de $L^\infty(\Omega',P)$ et ${}^tA$ admet la factorisation

$$L^\infty(\Omega',P) \xrightarrow{j_\delta} L^{1+\delta}(\Omega',P) \xrightarrow{A_\delta} H$$

où j_δ est l'injection canonique et $\|A_\delta\| = C_\delta$.
Soit alors u un opérateur de $L^1(\Omega,\mu)$ dans H ; d'après la propriété de relèvement de $L^1(\Omega,\mu)$, $\forall\ \varepsilon > 0$ il existe $\tilde{u}_\varepsilon : L^1(\Omega,\mu) \to L^\infty(\Omega',P)$ tel que

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\| \le (1+\varepsilon)\ \|u\|$$

$$\text{et} \quad u = A_\delta \circ j_\delta \circ \tilde{u}_\varepsilon \ ;$$

d'où $\forall\ \varepsilon > 0$, $\quad \pi_{1+\delta}(u) \le \|A_\delta\|\ \pi_{1+\delta}(j_\delta)\ \|\tilde{u}_\varepsilon\| \le C_\delta\ (1+\varepsilon)\ \|u\|$,

donc, $\quad \pi_{1+\delta}(u) \le C_\delta\ \|u\|$.

2 D'après le théorème de Pietsch, tout opérateur 2-sommant u de $L^1(\Omega,\mu)$ dans un espace quasi-normé F admet la factorisation
$L^1(\Omega,\mu) \xrightarrow{u_1} H \xrightarrow{u_2} F$ où H est un Hilbert avec $\|u_1\| \le \pi_2(u_1) \le 1$ et $\|u_2\| \le \pi_2(u)$; d'après 1, on a donc :

$$\pi_{1+\delta}(u) \le \pi_{1+\delta}(u_1)\ \|u_2\| \le C_\delta\ \|u_1\|\ \|u_2\| \le C_\delta\ \pi_2(u)\ .$$

On conclut alors aisément par le théorème 3.

<u>Définition</u> : Soit E,F deux espaces de Banach, on dit que E est finiment représentable dans F (en abrégé E f.rF) si, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout sous-espace de dimension finie M de E il existe un sous-espace N de F $(1+\varepsilon)$-isomorphe à M (c'est-à-dire il existe un isomorphisme T de M sur N vérifiant $\|T\|\ \|T^{-1}\| \le 1+\varepsilon$).
Le lemme suivant est immédiat :

Lemme : Tout espace de Banach est finiment représentable dans c_o.

D'après le théorème 4, $\Pi_2(l^1,.) = \Pi_o(l^1,.)$; nous allons appliquer les résultats précédents au cas $E = l^1$; dans ce cas, l'ensemble des points extrêmaux de la boule de $E' = l^\infty$ muni de la topologie induite par $\sigma(E',E)$ s'identifie au compact $\{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit.

Corollaire 1 : Soit $p \in]0,2[$, soit H l'ensemble $\{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$; il existe une constante ρ et β dans $]0,1[$ tels que :

$$\forall\ \lambda \in \mathcal{P}(H) \quad \exists\ \Lambda \in \mathcal{P}(H) \quad \text{tel que :}$$

. $\lambda \leq 2\Lambda$

. Pour tout espace de Banach G, on a :

$$(2) \qquad \forall\ (g_n) \in G^{(\mathbb{N})},\ \left(\int \|\Sigma\, g_n\, \varepsilon_n\|^p\, d\Lambda(\varepsilon)\right)^{1/p} \leq \rho\ j_\beta(\|\Sigma\, g_n\, \varepsilon_n\|, d\Lambda(\varepsilon)).$$

Démonstration : La conclusion du théorème dans le cas $G = c_o$ résulte des théorèmes 3 et 4. Mais si G est un espace de Banach vérifiant (2), tout Banach finiment représentable dans G vérifie ainsi (2), le lemme précédent permet donc de conclure.

Corollaire 2 : Il existe une constante ρ et β dans $]0,1[$ tels que, pour tout α dans $]0,1[$, pour tout espace de probabilité (Ω,P), pour toute suite (X_n) de variables aléatoires sur (Ω,P) à valeurs dans un espace de Banach G, on ait l'inégalité :

$$\forall\ (c_n) \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})},\ J_\alpha(\|\Sigma c_n X_n(\omega)\|_G, dP(\omega)) \leq \rho \sup |c_n| \sup_{\varepsilon_n = \pm 1} J_{\alpha\beta/2}(\|\Sigma \varepsilon_n X_n(\omega)\|_G, dP(\omega)).$$

Démonstration : Nous pouvons évidemment supposer qu'il n'y a qu'un nombre fini de variables X_n non nulles. Supposons que $\sup |c_n| \leq 1$, on peut écrire

$$(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = \sum_k \alpha_k\, \varepsilon^k \quad \text{où} \quad \alpha_k \geq 0 \quad \sum_k \alpha_k = 1$$

$$\text{et} \qquad \varepsilon^k = (\varepsilon_n^k)_{n \in \mathbb{N}} \in \{-1,+1\}^{\mathbb{N}}.$$

Soit $\lambda \in \mathcal{P}(H)$ définie par $\lambda = \sum_k \alpha_k \delta_{\varepsilon^k}$; on a par convexité, pour tout ω dans Ω :

$$\|\sum_n c_n X_n(\omega)\|_G \leq \sum_k \alpha_k \|\sum_n \varepsilon_n^k X_n(\omega)\|_G = \int \|\sum \varepsilon_n X_n(\omega)\|_G \, d\lambda(\varepsilon) \ ;$$

d'après le corollaire précédent (appliqué à $p=1$), il existe $\Lambda \in \mathcal{P}(H)$ telle que :

$$\forall\, \omega \in \Omega, \quad \|\sum c_n X_n(\omega)\| \leq \rho \ J_\beta \,(\|\sum \varepsilon_n X_n(\omega)\|, d\Lambda(\varepsilon)) \ ;$$

d'où :

$$J_\alpha(\|\sum c_n X_n(\omega)\|, dP(\omega)) \leq \rho \ J_\alpha \,[J_\beta(\|\sum \varepsilon_n X_n(\omega)\|, d\Lambda(\varepsilon), dP(\omega)] \ ;$$

d'après "l'inégalité de Fubini" ([5], exposé XXIV, §2), on a :

$$J_\alpha(\|\sum c_n X_n(\omega)\|, dP(\omega)) \leq \rho \ J_{\alpha\beta/2}[J_{\alpha\beta/2}(\|\sum \varepsilon_n X_n(\omega)\|, dP(\omega)), d\Lambda(\varepsilon)]$$

$$\leq \rho \sup_{\varepsilon_n = \pm 1} J_{\alpha\beta/2}(\|\sum \varepsilon_n X_n(\omega)\|, dP(\omega)),$$

d'où le résultat par homogénéité.
La version "sans constante" du corollaire précédent est alors immédiate:

<u>Corollaire 3</u> : Soient (Ω, P) un espace de probabilité, G un espace de Banach et (X_n) une suite sommable dans $L^0(\Omega,P,G)$ (i.e. $\sum \varepsilon_n X_n$ converge dans $L^0(\Omega,\mu,G)$ pour tout $(\varepsilon_n) \in \{-1,+1\}^{\mathbb{N}}$). Pour toute suite bornée de scalaires (c_n) la série $\sum c_n X_n$ est convergente dans $L^0(\Omega,\mu,G)$.

<u>Remarque</u> : Si (X_n) est une suite de variables <u>scalaires</u> telles que

$$(3) \qquad \forall\, \alpha \in]0,1[, \quad \sup_n \ \sup_{\varepsilon_i = \pm 1} \ J_\alpha(\,|\sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i X_i(\omega)|, dP(\omega)) < \infty \,.$$

Le corollaire 2 montre que $\sum c_n X_n$ converge dans $L^0(\Omega,P)$ pour toute suite de scalaires (c_n) tendant vers 0.

On sait (cf. [6]) qu'une telle suite est en fait sommable. Compte tenu de ce résultat, le corollaire 2 montre donc que la condition (3) suffit à entraîner que la série $\sum_n c_n X_n$ converge dans $L^0(\Omega,P)$ pour toute suite bornée de scalaires (c_n).

*
* *
*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R.E. EDWARDS : Functional Analysis (Holt, Rinehart, Winston).

[2] B. MAUREY et G. PISIER : Un théorème d'extrapolation et ses conséquences. C. R. A. S. t. 277 (1973), Série A, p.39.

[3] B. MAUREY : Théorème de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans un espace L^p. A paraître dans Astérisque.

[4] Séminaire Maurey-Schwartz 1972/1973.

[5] Séminaire Laurent Schwartz 1969/1970.

[6] L. SCHWARTZ : C. R. A. S. t. 268 (1969), p. 704-706 - série A.

****