

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. MAUREY

Nouveaux théorèmes de Nikishin (suite et fin)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 5, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974__A6_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTES POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ DE PARIS
SÉRIE MATHÉMATIQUES
N° 101

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 3 - 1 9 7 4

NOUVEAUX THÉOREMES DE NIKISHIN

(suite et fin)

par B. MAUREY

Exposé N° V

28 Novembre 1973

Nous avons donné dans l'exposé précédent la condition nécessaire et suffisante de Nikishin pour qu'un ensemble $A \subset L^0(\Omega, \mu)$ soit "presque borné dans Λ_1 ". Nous allons voir dans cet exposé qu'avec une condition supplémentaire sur A (une certaine invariance par "mixage", au sens défini plus loin), la condition de l'exposé précédent implique que A est borné dans Λ_1 . A partir de là, nous pourrions retrouver un théorème de S. Sawyer [2].

Soit $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ un espace de probabilité. Nous appellerons "mixage" de $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ la donnée d'une famille $\mathcal{M}$ d'applications $\mathcal{C}$ -mesurables de Ω dans lui-même, telle que :

$$a) \quad \forall M \in \mathcal{M}, \quad M(\mu) = \mu.$$

$$b) \quad \forall B, C \in \mathcal{C}, \quad \forall a > 1, \quad \exists M \in \mathcal{M} \quad \text{tel que :}$$

$$\mu(B \cap M^{-1}(C)) \leq a \mu(B) \mu(C).$$

(La signification intuitive est la suivante : soient C et B données. Le choix d'un $M \in \mathcal{M}$ convenable signifie que l'on a "suffisamment mélangé" les points de Ω . Alors, la proportion $\frac{\mu(B \cap M^{-1}(C))}{\mu(B)}$ des points de B dont l'image par le mélange M est dans C est $\leq a \mu(C)$.)

Un premier exemple de mixage est fourni par les translations d'un groupe compact :

Proposition 1 : Soient G un groupe compact et m sa probabilité de Haar. L'ensemble des translations à droite (ou à gauche) définit un mixage de $(G, \mathcal{G}, \chi)$ ($\mathcal{G}$: tribu borélienne de G).

Démonstration : Posons si $g \in G$ et $f \in L^0(G, \mathcal{G}, m)$: $\tau_g(h) = gh$ (resp. hg) et $(\tau_g f)(h) = f(gh)$ (resp. $f(hg)$). Dans chaque cas on a bien $\tau_g(m) = m$ pour tout $g \in G$. Soient alors B et C deux parties boréliennes de G . On a :

$$\mu(B \cap \tau_g^{-1}(C)) = \int_B (\tau_g \chi_C)(h) \, dm(h).$$

Par ailleurs, en appliquant Fubini :

$$\begin{aligned} \int \mu(B \cap \tau_g^{-1}(C)) \, dm(g) &= \int_B dm(h) \int \tau_g \chi_C(h) \, dm(g) \\ &= \int_B dm(h) \int \chi_C(g') \, dm(g') \\ &= m(B) \, m(C) . \end{aligned}$$

Par conséquent, on peut trouver pour tout $a > 1$ un élément $g \in G$ tel que $m(B \cap \tau_g^{-1}(C)) \leq a \, m(B) \, m(C)$, ce qui démontre la proposition.

Revenons au cas général. Si $\mathcal{M}$ est un mixage de $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ et si $M \in \mathcal{M}$, $f \in L^0(\Omega, \mathcal{E}, \mu, F)$ (où F est un espace de Banach quelconque) nous définirons $Mf \in L^0(\Omega, \mathcal{E}, \mu, F)$ par $(Mf)(\omega) = f(M\omega)$. Nous dirons qu'une partie $A \subset L^0(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ est mixable s'il existe un mixage $\mathcal{M}$ de $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ tel que l'on ait :

$$\forall f \in A, \quad \forall M \in \mathcal{M}, \quad \exists g \in A, \quad |Mf| \leq |g| .$$

On obtient alors l'analogue du théorème 1 de l'exposé précédent :

Théorème 1 : Soient $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ un espace de probabilité, A une partie mixable de $L^0(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$, $\varepsilon \in]0, 1[$ et $R \geq 0$.

a) Supposons que :

Pour toute suite $(c_n) \in l^1$, et toute suite (f_n) d'éléments de A :

$$(1) \quad J_\varepsilon \left(\sup_n |c_n f_n|, \mu \right) \leq R \sum |c_n| .$$

On en déduit :

$$(2') \quad \forall f \in A \quad \Lambda_1(f, \mu) \leq R/(1 - \varepsilon) .$$

b) Inversement, si (2') est réalisée, on a :

$$J_{\varepsilon(1-\varepsilon)} \left(\sup_n |c_n f_n|, \mu \right) \leq R \sum |c_n| ,$$

pour toute suite $(c_n) \in l^1$ et toute suite (f_n) d'éléments de A .

Démonstration : Le point b) se démontre comme le point correspondant du théorème 1, exposé IV. Le a) sera obtenu par un léger raffinement de la démonstration de ce même théorème.

Soit $K \geq 0$. Convenons de dire qu'une partie $C \in \mathcal{C}$ est un (N, K) -ensemble si $\mu(C) > 0$ et s'il existe un élément $f \in A$ tel que l'on ait presque sûrement sur C :

$$\mu(C) |f| > K .$$

On a vu dans la démonstration du théorème 1, exposé IV, les faits suivants : si on désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des familles (B_i) de (N, R) -ensembles deux à deux disjoints, cet ensemble est inductif pour l'ordre défini par l'inclusion des familles de parties. (Et si $\mathcal{E}$ est vide, on a directement $\Lambda_1(f, \mu) \leq R$ pour tout $f \in A$). Si on considère un élément maximal (B_i) , c'est nécessairement une famille dénombrable, et si on pose $B = \bigcup_i B_i$, on a $\mu(B) \leq \varepsilon$.

Soit maintenant ε_1 tel que $\varepsilon < \varepsilon_1 < 1$, et supposons qu'il existe un $(N, R/(1 - \varepsilon_1))$ ensemble, c'est-à-dire une partie $C \in \mathcal{C}$ et $f \in A$ tels que l'on ait presque sûrement sur C :

$$\mu(C) |f| > R/(1 - \varepsilon_1) .$$

Soit $\mathcal{M}$ un mixage adapté à A . On peut trouver $M \in \mathcal{M}$ tel que :

$$\mu(M^{-1}(C) \cap B) \leq \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \mu(B) \mu(C) \leq \varepsilon_1 \mu(C) .$$

On en déduit, en posant $D = M^{-1}(C) - B$:

$$\mu(D) \geq (1 - \varepsilon_1) \mu(C) > 0 .$$

D'autre part, A étant mixable, on peut trouver $g \in A$ tel que :

$$|Mf| \leq |g|.$$

On a alors presque sûrement si $\omega \in D$ (Compte tenu de $M\omega \in C$, et de toutes les relations précédentes) :

$$\mu(D) |g(\omega)| \geq (1 - \varepsilon_1) \mu(C) |Mf(\omega)| = (1 - \varepsilon_1) \mu(C) |f(M(\omega))| > R$$

ce qui prouve que D est un (N, R) -ensemble. Mais D étant disjoint de $B = \bigcup B_i$, cela contredit la maximalité de la famille (B_i) . Par conséquent, il n'existe aucun $(N, R/(1 - \varepsilon_1))$ -ensemble. On en déduit comme dans l'exposé IV :

$$\forall f \in A, \quad \Lambda_1(f, \mu) \leq R/(1 - \varepsilon_1).$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon_1 > \varepsilon$, la démonstration est achevée.

Remarque 1 : On pourrait se permettre, en perdant sur les constantes, de remplacer les conditions de mixage et de "mixable" par :

$$\forall a > a_0 \quad \mu(B \cap M^{-1}(C)) \leq a \mu(B) \mu(C) \quad \text{et} \quad |Mf| \leq K |g|$$

(nous avons pris dans la démonstration $a_0 = K = 1$).

Soient E et F deux espaces de Banach, $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ un espace de probabilité et u un opérateur linéaire continu de E dans $L^0(\Omega, \mathcal{E}, \mu, F)$. Nous dirons que u est "mixable" si l'ensemble $A = \{\omega \rightarrow \|u(x)(\omega)\|_F; x \in E, \|x\| \leq 1\}$ est mixable. Donnons un exemple :

Lemme 1 : Soient $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ un espace de probabilité, F un espace de Banach, E un espace de Banach de fonctions mesurables (éventuellement à valeurs vectorielles) sur Ω , et u un opérateur linéaire continu de E dans $L^0(\Omega, \mathcal{E}, \mu, F)$.

S'il existe un mixage $\mathcal{M}$ de $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ tel que, pour tout $M \in \mathcal{M}$:

$$a) \quad x \in E \quad \Rightarrow \quad Mx \in E \quad \text{et} \quad \|Mx\| \leq \|x\|$$

$$b) \quad \|M(u(x))(\omega)\|_F \leq \|u(Mx)(\omega)\|_F \quad \text{p.s.}$$

l'opérateur u est mixable. Cela est vrai a fortiori si u commute à $\mathcal{M}$, c'est-à-dire $u(Mx) = M(u(x))$, et en particulier si $(\Omega, \mathcal{E}, \mu) = (G, \mathcal{G}, m)$ (groupe compact) et si u est un opérateur invariant par translation (à gauche ou à droite, cf. Proposition 1).

On obtient :

Corollaire : Soient E et F deux espaces de Banach, $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ un espace de probabilité et u un opérateur linéaire continu "mixable" de E dans $L^0(\Omega, \mathcal{E}, \mu, F)$. Pour que u soit continu de E dans $\Lambda_q(\Omega, \mathcal{E}, \mu, F)$ ($1 \leq q < \infty$) il faut et il suffit qu'il existe un $\varepsilon \in]0, 1[$ et K_ε tels que l'on ait pour toute suite (x_n) d'éléments de E :

$$J_\varepsilon \left(\sup_n \|u(x_n)(\omega)\|_G, d\mu(\omega) \right) \leq K_\varepsilon \left(\sum \|x_n\|^q \right)^{1/q}.$$

La démonstration est identique à celle du corollaire 2 du théorème 1, exposé IV, compte tenu de la remarque évidente qui suit : si $A \subseteq L^0(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$, et si $\alpha > 0$ est donné, A est mixable si et seulement si l'ensemble $\{f^\alpha ; f \in A\}$ est mixable (en effet $(Mf)^\alpha = M(f^\alpha)$).

Remarque 2 : Supposons que l'espace de Banach F soit muni d'une topologie σ pour laquelle la norme soit mesurable (c'est-à-dire que pour tout borélien B sur $\mathbb{R}$, $\{x \in F ; \|x\| \in B\}$ est un borélien pour σ). C'est par exemple le cas si F est un dual H' , et si σ est la topologie $\sigma(H', H)$. On définit alors l'espace $L^0(\Omega, \mathcal{E}, \mu, F_\sigma)$ comme l'espace des fonctions mesurables de Ω dans F_σ , muni de la topologie définie par les $J_\alpha(f, \mu)$, $\alpha \in]0, 1[$, dont la définition reste inchangée. (Cet espace a été introduit dans [3], lemme (XVII, 2, 1)). Le résultat du corollaire reste valable si on remplace $L^0(\Omega, \mathcal{E}, \mu, F)$ par $L^0(\Omega, \mathcal{E}, \mu, F_\sigma)$. En effet, seules interviennent les fonctions mesurables réelles $\omega \rightarrow \|u(x)(\omega)\|_F$.

 * σ vectorielle moins fine que la topologie de la norme. Cette condition est supposée réalisée implicitement dans toute la suite.

Théorème 2 : Soient E un espace de Banach, F un espace de Banach muni d'une topologie σ pour laquelle la norme est mesurable, $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ un espace de probabilité et $q \in]0, 2]$. Si E est de type q-Rademacher, tout opérateur linéaire continu mixable de E dans $L^0(\Omega, \mathcal{E}, \mu, F_\sigma)$ est en fait continu de E dans $\Lambda_q(\Omega, \mathcal{E}, \mu, F_\sigma)$.

La démonstration est identique à celle du théorème 2 de l'exposé IV : on y a vu en effet que les conditions de l'énoncé ci-dessus impliquent que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe K_ε telle que l'on ait pour toute suite (x_n) d'éléments de E :

$$J_\varepsilon \left(\sup_n \|u(x_n)(\omega)\|_F, d\mu(\omega) \right) \leq K_\varepsilon \left(\sum \|x_n\|^q \right)^{1/q}.$$

Il suffit alors d'appliquer le corollaire du théorème 1 et la remarque 2.

Corollaire : Soient G un groupe compact, m sa probabilité de Haar et $q \in [1, 2]$. Tout opérateur linéaire continu u, invariant par translation (à gauche ou à droite) de $L^q(G, \mathcal{G}, m)$ dans $L^0(G, \mathcal{G}, m)$ (ou plus généralement dans $L^0(G, \mathcal{G}, m, F_\sigma)$) est de type faible (q, q) c'est-à-dire continu de L^q dans Λ^q .

Démonstration : L^q est de type q-Rademacher (exposé III) et u est mixable d'après le lemme 1.

Théorème de Sawyer [1], [2]. Soit $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ un espace de probabilité, et soit (T_n) une suite d'opérateurs linéaires continus de $L^q(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ dans $L^0(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$, $1 \leq q < \infty$, telle que :

$$a) \quad \forall f \in L^q \quad \text{p.s.} \quad \sup_n |T_n(f)(\omega)| < \infty.$$

b) Il existe un mixage $\mathcal{M}$ de $(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ tel que :

$$\forall M \in \mathcal{M}, \quad M \left(\sup_n |T_n f| \right) \leq \sup_n |T_n(Mf)|.$$

Il existe alors une constante K telle que :

$$\forall f \in L^q \quad \Lambda_r \left(\sup_n |T_n(f)|, \mu \right) \leq K \|f\|,$$

en posant $r = \inf(q, 2)$.

Démonstration : Définissons un opérateur linéaire u de $L^q(\Omega, \mathcal{E}, \mu)$ dans $L^0(\Omega, \mathcal{E}, \mu, \sigma(l^\infty, l^1))$ par :

$$u(f)(\omega) = (T_n(f)(\omega))_n.$$

Cet opérateur est continu d'après le théorème du graphe fermé.

(On utilise le lemme (XVII, 2, 1) de [3]).

D'autre part, l'hypothèse b) se traduit par :

$$\|M(u(x))(\omega)\|_{l^\infty} \leq \|u(Mx)(\omega)\|_{l^\infty},$$

donc u est mixable d'après le lemme 1 (puisque $f \rightarrow Mf$ est une isométrie de L^q pour chaque $M \in \mathcal{M}$). Pour finir, il suffit de rappeler que L^q , $1 \leq q < \infty$, est de type r -Rademacher, $r = \inf(q, 2)$, et d'appliquer le théorème 2.

Si on suppose dans l'énoncé du théorème de Sawyer que les opérateurs (T_n) sont positifs, on peut remplacer $r = \inf(q, 2)$ par q dans le résultat : c'est le théorème de Sawyer dans le cas positif. Nous allons voir comment retrouver ce résultat. Nous considérerons des espaces de Banach E vérifiant :

- (*) E est ordonné, et $0 < x < y \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$.
- (**) $\forall x, y \in E$, $\sup(x, y)$ existe et $\|\sup(x, y)\| = \max(\|x\|, \|y\|)$ (où $\sup(x, -x) = 0$).

Si F est ordonné, on ordonne $L^0(\Omega, \mathcal{E}, \mu, F)$ ou $L^0(\Omega, \mathcal{E}, \mu, F_\sigma)$ de façon évidente.

Théorème 2 bis : Soient E et F deux espaces de Banach vérifiant (*) et (**), F étant muni d'une topologie σ pour laquelle la norme est mesurable, $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ un espace de probabilité et $q \in [1, +\infty[$. On suppose qu'il existe une constante C telle que l'on ait pour toute suite finie (x_i) d'éléments de E :

$$\|\sup x_i\| \leq C (\sum \|x_i\|^q)^{1/q}.$$

Dans ce cas, tout opérateur linéaire continu, positif et mixable de E dans $L^0(\Omega, \mathcal{C}, \mu, F_\sigma)$ est en fait continu de E dans $\Lambda_q(\Omega, \mathcal{C}, \mu, F_\sigma)$.

Démonstration : Soient $(x_1, \dots, x_n) \in E$. On a, puisque u est positif :

$$p.s : \quad \sup |u(x_i)(\omega)| \leq u(\sup |x_i|)(\omega).$$

Donc, en utilisant (*), (**), l'hypothèse sur E et la continuité de u :

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\sup \|u(x_n)(\omega)\|, d\mu(\omega)) &= J_\varepsilon(\sup \| |u(x_n)(\omega)| \|, d\mu(\omega)) \\ &\leq J_\varepsilon(\|\sup |u(x_n)(\omega)| \|, d\mu(\omega)) \\ &\leq J_\varepsilon(\|u(\sup |x_i|)(\omega)\|, d\mu(\omega)) \\ &\leq K_\varepsilon \|\sup |x_i| \| \\ &\leq C K_\varepsilon (\sum \|x_i\|^q)^{1/q}. \end{aligned}$$

Les techniques précédentes semblent échouer lorsque la mesure est infinie. Nous allons cependant étudier un cas très particulier où la méthode peut s'étendre.

Posons si $f \in L^0(\mathbb{R}^n, \lambda, F)$, λ désignant la mesure de Lebesgue

$$f_\alpha(t) = \alpha^n f(\alpha t) \quad (\alpha > 0).$$

La propriété essentielle de cette transformation est la suivante :

$$\lambda \{t ; \|f(t)\| > c\} = \alpha^n \lambda \{t ; \|f_\alpha(t)\| > \alpha^n c\},$$

ce qui implique :

$$\Lambda_1(f, \mu) = \Lambda_1(f_\alpha, \mu) \quad ; \quad \|f\|_{L^1} = \|f_\alpha\|_{L^1} .$$

Proposition 2 : Soient E et F deux espaces de Banach, u un opérateur linéaire continu de $L^1(\mathbb{R}^n, \lambda, E)$ dans $L^0(\mathbb{R}^n, \lambda, F)$, invariant par translation, et tel que :

$$\forall \alpha > 0, \quad \forall f, \text{ p.s. } : \|u(f_\alpha)(\omega)\| \geq \|(u(f))_\alpha(\omega)\| .$$

Dans ce cas, l'opérateur u est continu de $L^1(\mathbb{R}^n, \lambda, E)$ dans $\Lambda_1(\mathbb{R}^n, \lambda, F)$.

Démonstration : Considérons l'opérateur v de $L^1(\mathbb{R}^n, \lambda, E)$ dans $L^0([- \frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \lambda, F)$ défini par :

$$v(f) = \chi_{[- \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \cdot u(f) .$$

D'après le corollaire du théorème 2, exposé IV, il existe pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ une partie mesurable $A_\varepsilon \subset [- \frac{1}{2}, + \frac{1}{2}]$ telle que $\lambda \{ |t| \leq \frac{1}{2} ; t \notin A_\varepsilon \} \leq \varepsilon$ et une constante K_ε telle que :

$$\forall c > 0 \quad \lambda \{ t ; \|\chi_{A_\varepsilon} u(f)(t)\| > c \} \leq \frac{K_\varepsilon}{c} , \text{ lorsque } \|f\| \leq 1 .$$

Cela s'écrit encore, en utilisant la fonction J définie sur $\mathbb{R}$ par $J(t) = 0$ pour $|t| \leq 1$, $J(t) = 1$ pour $|t| > 1$:

$$\int_{|t| \leq \frac{1}{2}} \chi_{A_\varepsilon}(t) J\left(\frac{\|u(f)(t)\|}{c}\right) dt \leq \frac{K_\varepsilon}{c} .$$

L'opérateur u étant invariant par translation, on aura aussi :

$$\int_{|t| \leq \frac{1}{2}} \chi_{A_\varepsilon}(t-s) J\left(\frac{\|u(f)(t)\|}{c}\right) dt \leq \frac{K_\varepsilon}{c} .$$

On obtient en intégrant lorsque $s \in [-1, +1]$:

$$\int_{|t| \leq \frac{1}{2}} \left(\int_{-1}^{+1} \chi_{A_\varepsilon}(t-s) ds \right) J\left(\frac{\|u(f)(t)\|}{c}\right) dt \leq 2 \frac{K_\varepsilon}{c} .$$

Or :

$$\int_{-1}^{+1} \chi_{A_\varepsilon}(t-s) ds = \lambda \{ A_\varepsilon \cap [t-1, t+1] \} \geq \lambda(A_\varepsilon) \geq (1-\varepsilon)$$

$$(\text{car } |t| \leq \frac{1}{2})$$

d'où :

$$\int_{|t| \leq \frac{1}{2}} J\left(\frac{\|u(f)(t)\|}{c}\right) dt \leq 2 \frac{K_\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{1}{c} ,$$

c'est-à-dire :

$$\lambda \left\{ |t| \leq \frac{1}{2} ; \|u(f)(t)\| > c \right\} \leq \frac{\|f\| K'_\varepsilon}{c} .$$

Soit alors c tel que $0 < c < \infty$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \lambda, E)$ et $m \in \mathbb{N}$. On aura en utilisant l'hypothèse sur u :

$$\begin{aligned} \lambda \left\{ |t| \leq \frac{m}{2} ; \|u(f)(t)\| > c \right\} &\leq m^n \lambda \left\{ |t| \leq \frac{1}{2} ; \|u(f_m)(t)\| > m^n c \right\} \\ &\leq m^n \frac{K'_\varepsilon \|f_m\|}{m^n c} = \frac{K'_\varepsilon \|f\|}{c} , \end{aligned}$$

et on achève la démonstration en faisant tendre m vers l'infini.

Remarque 3 : La situation de la proposition 2 est celle que l'on rencontre dans deux cas importants : si u est un opérateur de convolution sur $\mathbb{R}^n$, défini par un noyau $K(x)$ homogène de degré $-n$ (intégrales singulières), u vérifie les hypothèses de la proposition 2. Mais pratiquement il ne semble pas beaucoup plus simple de montrer que u opère continument de L^1 dans L^0 plutôt que de montrer directement qu'il opère de L^1 dans Λ_1 . Un autre cas est celui de la fonction maximale de Hardy-Littlewood, sur $\mathbb{R}$:

$$f^*(x) = \sup_{\alpha < x < \beta} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt .$$

On peut considérer $f \rightarrow f^*$ comme la donnée d'un opérateur linéaire de L^1 dans $L^0(\mathbb{R}, \lambda, \sigma(L^\infty(\mathbb{R}^2), L^1(\mathbb{R}^2)))$ en posant :

$u(f)(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ définie par :

$$(\alpha, \beta) \rightarrow \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \quad \text{si } \alpha < x < \beta, \quad 0 \text{ sinon} .$$

Ici encore, l'opérateur u vérifie les hypothèses de la proposition 2.

Ce qui précède ne nous permet pas de répondre à la question suivante, suggérée par le corollaire du théorème 2 : un opérateur linéaire continu invariant par translation de $L^1(\mathbb{R}^n, \lambda)$ dans $L^0(\mathbb{R}^n, \lambda)$ est-il automatiquement continu de L^1 dans Λ_1 ?

*
* *
*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. GARSIA : Topics in almost everywhere convergence (Lectures in advanced mathematics).
- [2] S. SAWYER : Maximal inequalities of weak type, Ann. Math. 84 p.157-173, (1966).
- [3] Séminaire L. SCHWARTZ 1969/1970.
