

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. MAUREY

Nouveaux théorèmes de Nikishin

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 4, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974__A5_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
ENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 3 - 1 9 7 4

NOUVEAUX THEOREMES DE NIKISHIN
=====

par B. MAUREY

Cet exposé est consacré à la démonstration de résultats de E.M. Nikishin [1] et [2], sous une forme très légèrement différente de la version originale. Nous allons tout d'abord rappeler un certain nombre de conventions et de notations : si G est un espace de Banach et (Ω, μ) un espace de probabilité, $L^0(\Omega, \mu, G)$ désignera l'espace vectoriel des (classes de) fonctions μ -mesurables de Ω dans G . La topologie de $L^0(\Omega, \mu, G)$ (topologie de la convergence en probabilité) est définie par les "jauges" :

$$\alpha \in]0, 1[, \quad J_\alpha(\varphi, \mu) = J_\alpha(\varphi(\omega), d\mu(\omega)) = \inf (c \geq 0 ; \mu \{ \omega ; \|\varphi(\omega)\|_G > c \} \leq \alpha) .$$

On vérifie facilement que :

$$J_\alpha(\varphi + \psi, \mu) \leq J_{\alpha/2}(\varphi, \mu) + J_{\alpha/2}(\psi, \mu)$$

et si φ est réelle ≥ 0

$$J_\alpha(\varphi^p, \mu) = (J_\alpha(\varphi, \mu))^p .$$

Nous allons travailler avec les espaces " L^p faibles", c'est-à-dire les espaces que nous noterons $\Lambda_p(\Omega, \mu, G)$ des fonctions $\varphi \in L^0(\Omega, \mu, G)$ telles que

$$\sup_{c>0} c^p \mu \{ \omega ; \|\varphi(\omega)\|_G > c \} < \infty .$$

Nous poserons :

$$\Lambda_p(\varphi, \mu) = \sup_{c>0} (\mu \{ \|\varphi\| > c \})^{1/p} = \sup_{c>0} c^{1/p} J_\alpha(\varphi, \mu) .$$

* Cet espace est noté classiquement $L^{p, \infty}$ (espace de Lorentz) mais nous préférons simplifier la notation.

Retenons en particulier les inégalités :

$$J_{\alpha}(\varphi, \mu) \leq \alpha^{-1/p} \Lambda_p(\varphi, \mu) \leq \alpha^{-1/p} \|\varphi\|_{L^p}.$$

On peut montrer que Λ_p est p -normable pour $p < 1$, et normable pour $p > 1$ (mais Λ_1 n'est pas normable si μ n'est pas triviale |)

Nous dirons qu'une partie de $L^0(\Omega, \mu)$ est "presque bornée dans Λ_1 " si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie mesurable $\Omega_{\varepsilon} \subset \Omega$, telle que $\mu(\Omega - \Omega_{\varepsilon}) \leq \varepsilon$, et telle que les restrictions $f \chi_{\Omega_{\varepsilon}}$ des éléments f de A constituent une partie bornée de Λ_1 , c'est-à-dire :

$$\sup_{f \in A} \Lambda_1(f \chi_{\Omega_{\varepsilon}}, \mu) < \infty.$$

Le théorème fondamental qui suit donne (sous la forme de son corollaire 1) une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie A de $L^0(\Omega, \mu)$ soit "presque bornée dans Λ_1 " :

Théorème 1 : a) Soient (Ω, μ) un espace de probabilité, $\varepsilon \in]0, 1[$ et $R > 0$. Soit A une partie de $L^0(\Omega, \mu)$ telle que :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour toute suite de réels } (c_n), \text{ et toute suite } (f_n) \text{ d'éléments de } A : \\ \sum |c_n| \leq 1 \Rightarrow \mu \{ \omega ; \sup_n |c_n f_n(\omega)| > R \} \leq \varepsilon \end{array} \right.$$

$$(c'est-à-dire : J_{\varepsilon}(\sup_n |c_n f_n|, \mu) \leq R \sum |c_n|)$$

On a alors :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une partie mesurable } \Omega_{\varepsilon} \text{ de } \Omega, \text{ telle que } \mu(\Omega - \Omega_{\varepsilon}) \leq \varepsilon, \text{ et} \\ \text{telle que :} \\ \forall c > 0, \forall f \in A, \mu \{ \omega \in \Omega_{\varepsilon} ; |f(\omega)| > Rc \} \leq 1/c \end{array} \right.$$

(soit encore $\Lambda_1(\chi_{\Omega_\varepsilon} f, \mu) \leq R$) .

b) Inversement, si (2) est réalisée, on en déduit :

$$\sum |c_n| \leq 1 \Rightarrow \mu \{ \omega ; \sup |c_n f_n(\omega)| > R/\varepsilon \} \leq 2\varepsilon .$$

Démonstration : Montrons a). Soit $A \subset L^0(\Omega, \mu)$ vérifiant (1). Convenons de dire qu'une partie μ -mesurable $B \subset \Omega$ est un N-ensemble si $\mu(B) > 0$, et s'il existe $f \in A$ tel que :

$$\text{pour } \mu\text{-presque tout } \omega \in B, \quad \mu(B) |f(\omega)| > R .$$

Désignons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des familles (B_i) de N-ensembles deux à deux disjoints (c'est-à-dire : p.s disjoints). Supposons tout d'abord $\mathcal{E}$ non vide, et ordonnons $\mathcal{E}$ par $(B_i) \prec (C_j)$ si et seulement si la famille (B_i) est une sous-famille de la famille (C_j) . Pour cet ordre $\mathcal{E}$ est trivialement inductif.

Soit (B_i) un élément maximal de $\mathcal{E}$. Puisque μ est finie et que les B_i sont deux à deux disjoints, la famille est dénombrable et nous pouvons supposer $i \in \mathbb{N}$.

Par définition des N-ensembles, il existe pour chaque i un élément $f_i \in A$ tel que :

$$\mu(B_i) |f_i| > R \text{ sur } B_i ,$$

donc :

$$\sup_i \mu(B_i) |f_i| > R \text{ sur } B = \bigcup_i B_i .$$

Posons $c_i = \mu(B_i)$. On a $\sum |c_i| \leq 1$ puisque les B_i sont deux à deux disjoints, donc par (1) : $\mu(B) \leq \varepsilon$.

Posons $\Omega_\varepsilon = \Omega - B$, et soient $c > 0$, $f \in A$. Posons $D = \{\omega \in \Omega_\varepsilon ; |f(\omega)| > Rc\}$. On a nécessairement $\mu(D) \leq 1/c$, sinon D est un N-ensemble (sur D on aurait $|f| > Rc \geq R/\mu(D)$), disjoint de B , ce qui contredit la maximalité de (B_i) .
Donc :

$$\forall c > 0, \forall f \in A \quad \mu \{ \omega \in \Omega_\varepsilon ; |f(\omega)| > Rc \} \leq 1/c .$$

Si l'ensemble $\mathcal{E}$ est vide, il n'existe aucun N-ensemble. Soient alors $c > 0$, $f \in A$, et posons $D = \{\omega \in \Omega ; |f(\omega)| > Rc\}$. On a directement $\mu(D) \leq 1/c$, sinon D est un N-ensemble (même raisonnement que ci-dessus). La condition (2) est alors réalisée avec $\Omega_\varepsilon = \Omega$.

Démontrons b). Supposons (2) réalisée. Soient (c_n) telle que $\sum |c_n| \leq 1$ et (f_n) une suite d'éléments de A . Posons :

$$B_n = \{ \omega \in \Omega_\varepsilon ; |c_n f_n(\omega)| > R/\varepsilon \} .$$

D'après (2), on a $\mu(B_n) \leq \varepsilon |c_n|$, donc $\mu(\cup B_n) \leq \varepsilon$.

Or :

$$\{ \omega ; \sup_n |c_n f_n(\omega)| > R/\varepsilon \} \subset (\Omega - \Omega_\varepsilon) \cup (\cup B_n) ,$$

donc :

$$\mu \{ \omega ; \sup_n |c_n f_n(\omega)| > R/\varepsilon \} \leq 2\varepsilon ,$$

ce qui achève la démonstration du théorème. On obtient immédiatement à partir du théorème 1 :

Corollaire 1 : Soient (Ω, μ) un espace de probabilité, et A une partie de $L^0(\Omega, \mu)$. Pour que A soit "presque bornée dans Λ_1 ", il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe C_ε tel que :

$$\forall (c_n) \in l^1, \forall (f_n) \in A, \quad J_\varepsilon (\sup_n |c_n f_n|, \mu) \leq C_\varepsilon \sum |c_n| .$$

Remarque 1 : En utilisant le théorème du graphe fermé, on peut voir que la condition du corollaire est équivalente à la suivante :

$$\forall c_n \in l^1, \forall (f_n) \in A, \quad c_n f_n(\omega) \rightarrow 0 \quad \mu \text{ p.s.}$$

Soient (Ω, μ) un espace de probabilité, E et G deux espaces normés, u un opérateur linéaire de E dans $L^0(\Omega, \mu, G)$. Nous dirons que u est "presque continu de E dans $\Lambda_q(\Omega, \mu, G)$ ", $0 < q < \infty$, si l'image $u(B)$ de la boule unité de E est "presque bornée dans $\Lambda_q(\Omega, \mu, G)$ ", c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\Omega_\varepsilon \subseteq \Omega$, $\mu(\Omega - \Omega_\varepsilon) \leq \varepsilon$, et :

$$\sup_{\|x\|_E \leq 1} \Lambda_q(\chi_{\Omega_\varepsilon} u(x), \mu) < \infty.$$

Corollaire 2 : Soient E et G deux espaces de Banach, (Ω, μ) un espace de probabilité, u un opérateur linéaire de E dans $L^0(\Omega, \mu, G)$ et $q \in]0, +\infty[$. Pour que u soit "presque continu de E dans $\Lambda_q(\Omega, \mu, G)$ " il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe C_ε tel que l'on ait pour toute suite (x_n) de vecteurs de E :

$$J_\varepsilon \left(\sup_n \|u(x_n)(\omega)\|_G, d\mu(\omega) \right) \leq C_\varepsilon \left(\sum \|x_n\|^q \right)^{1/q}.$$

(En d'autres termes, l'opérateur $\tilde{u}$ qui associe à $(x_n) \in l^q(E)$ la suite $(u(x_n)(\omega))$ est continu de $l^q(E)$ dans $L^0(\Omega, \mu, c_0(G))$) $\diamond$.

Démonstration : Considérons l'ensemble

$$A = \{ \|u(x)(\omega)\|^q; x \in E, \|x\| \leq 1 \}.$$

$\diamond$ $c_0(G)$ est l'espace des suites $(y_n) \in G$, telles que $\lim_n \|y_n\| = 0$, normé par $\sup_n \|y_n\|$.

Si $g_n \in A$, $g_n = \|u(x_n)(\omega)\|^q$, et $c_n \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} J_\varepsilon \left(\sup_n |c_n g_n|, \mu \right) &= J_\varepsilon \left(\sup_n |c_n| \|u(x_n)\|^q, \mu \right) \\ &= \left(J_\varepsilon \left(\sup_n \|u(|c_n|^{1/q} x_n)\|, \mu \right) \right)^q \\ &\leq c_\varepsilon^q \sum |c_n|, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure en se ramenant au corollaire 1.

Théorème 2 : Soit E un espace normé de type q -Rademacher, $0 < q \leq 2$. Pour tout espace de Banach G et tout espace de probabilité (Ω, μ) , tout opérateur linéaire continu de E dans $L^0(\Omega, \mu, G)$ est "presque continu de E dans $\Lambda_q(\Omega, \mu, G)$."

La démonstration utilisera le lemme :

Lemme : Soient G un espace de Banach, $(x_1, \dots, x_n) \in G$, $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la suite des variables de Rademacher :

$$\forall \alpha < \frac{1}{2}, \quad \sup_i \|x_i\| \leq J_\alpha \left(\sum x_i \varepsilon_i(t), dt \right). \quad \blacklozenge$$

Démontrons maintenant le théorème 2. Rappelons l'inégalité de Fubini :

$$J_\alpha \left(J_\beta(f(x, y), d\mu(x)), d\nu(y) \right) \leq J_\gamma \left(J_\delta(f(x, y), d\nu(y)), d\mu(x) \right),$$

lorsque $\gamma + \delta \leq \alpha\beta$ ([4], proposition (XXIV, 2,4)).

Soit $\varepsilon > 0$ donné, et choisissons γ et δ tels que $\gamma + \delta \leq \varepsilon/3$. On aura puisque u est continu :

$$\forall x \in E, \quad J_\delta(u(x), \mu) \leq K_\delta \|x\|,$$

◊ Démonstration du lemme : page 9.

et puisque E est de type q-Rademacher :

$$J_Y (\sum x_i \varepsilon_i(t), dt) \leq K_Y (\sum \|x_i\|^q)^{1/q},$$

pour toute suite (x_i) dans E. Pour montrer que u est "presque continu de E dans $\Lambda_q(\Omega, \mu, G)$ ", nous utiliserons le corollaire 2 du théorème 1 : soit (x_i) une suite (dont un nombre fini d'éléments seulement sont non nuls) dans E. On a en utilisant le lemme :

$$\begin{aligned} J_\varepsilon (\sup_i \|u(x_i)(\omega)\|_G, d\mu(\omega)) &\leq J_\varepsilon (J_{1/3} (\sum_i u(x_i)(\omega) \varepsilon_i(t), dt), d\mu(\omega)) \\ &\leq J_Y (J_\delta (u(\sum_i x_i \varepsilon_i(t))(\omega), d\mu(\omega)), dt) \\ &\leq K_\delta J_Y (\|\sum_i x_i \varepsilon_i(t)\|, dt) \\ &\leq K_\delta K_Y (\sum \|x_i\|^q)^{1/q}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque 2 : Lorsque $q=2$ et $G=\mathbf{R}$, nous avons vu dans ([3], exposé XII, proposition 6) un résultat plus fort : si E est de type 2-Rademacher (ou de type 2-stable : les deux notions coïncident d'après l'exposé III) tout opérateur linéaire continu u de E dans un espace $L^0(\Omega, \mu)$ est "presque continu de E dans $L^2(\Omega, \mu)$ ", au lieu de Λ_2 . Cela n'est plus vrai lorsque G est un espace de Banach quelconque. Soit en effet (f_n) une suite de variables aléatoires 1-stable sur un espace de probabilité (Ω, μ) , et posons $g_n = \sqrt{|f_n|}$.

On vérifie facilement que si $\sum |c_n|^2 < \infty$, $c_n g_n \rightarrow 0$ presque sûrement. On peut alors définir un opérateur $u : l^2 \rightarrow L^0(\Omega, \mu, c_o)$ par $u(c_n) = (c_n g_n(\omega))$.

L'espace l^2 est de type 2, mais cet opérateur n'est pas "presque continu de l^2 dans $L^2(\Omega, \mu, c_0)$ ". Si cela était, on aurait d'après ([3], exposés X-XI, XII), pour toute suite $(x_n) \in l^2$:

$$\sum \|x_n\|^2 < \infty \Rightarrow \text{p.s.}, \sum \|u(x_n)(\omega)\|_{c_0}^2 < \infty.$$

Prenons $x_n = c_n e_n$ (e_n : même vecteur de la base canonique). On devrait avoir :

$$\sum c_n^2 < \infty \Rightarrow \text{p.s.}, \sum |c_n g_n|^2 < \infty,$$

soit encore :

$$\sum |c_n| < \infty \Rightarrow \sum |c_n f_n| < \infty$$

presque sûrement.

Or cela est faux. On sait que :

$\sum |c_n f_n| < \infty$ p.s si et seulement si $\sum |c_n| (\log \frac{1}{|c_n|} + 1) < \infty$, ([4], proposition (XXVI, 2, 4)), ce qui n'est pas impliqué par $\sum |c_n| < \infty$.

Corollaire : Soient E et G deux espaces de Banach. Tout opérateur linéaire continu de E dans un espace $L^0(\Omega, \mu, G)$ est "presque continu de E dans $\Lambda_1(\Omega, \mu, G)$ ".

Démonstration : Tout Banach est de type 1-Rademacher |

*
*
*

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] E. NIKISHIN : Resonance theorems and superlinear operators, Transl. of Uspekhi. Mat. Nauk, Vol XXV, n°6, Nov. Déc. 1970.
- [2] E.M. NIKISHIN : Izvestia. Akad. Nauk. S.S.S.R., tome 36, n°4, 1972.
- [3] Séminaire Maurey-Schwartz 1972/1973.
- [4] Séminaire Laurent Schwartz 1969/1970.

Démontrons le lemme : soit $\beta = 2\alpha < 1$. On aura :

$$\begin{aligned}
 2 \|x_i\|^2 &= J_\beta (2x_i \varepsilon_i(t), dt) \\
 &= J_\beta [(x_i \varepsilon_i(t) + \sum_{j \neq i} x_j \varepsilon_j(t) + (x_i \varepsilon_i(t) - \sum_{j \neq i} x_j \varepsilon_j(t))), dt] \\
 &\leq J_\alpha (x_i \varepsilon_i(t) + \sum_{j \neq i} x_j \varepsilon_j(t), dt) + J_\alpha (x_i \varepsilon_i(t) - \sum_{j \neq i} x_j \varepsilon_j(t), dt) \\
 &= 2 J_\alpha (\sum x_j \varepsilon_j(t), dt),
 \end{aligned}$$

puisque la suite est symétrique.
