

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. MAUREY

Rappels sur les opérateurs sommants et radonifiants (suite)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 2, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974___A3_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 3 - 1 9 7 4

RAPPELS SUR LES OPERATEURS SOMMANTS ET RADONIFIANTS

(suite)

par B. MAUREY

Exposé N° II

7 Novembre 1973

1. EXTENSION DE LA PROPRIÉTÉ DES OPÉRATEURS (p,G)-SOMMANTS.

Dans cet exposé nous allons esquisser l'étude des applications (p,G)-radonifiantes. Pour commencer, nous allons étendre la propriété des opérateurs (p,G)-sommants :

Proposition 1 : Soient E, G, H trois espaces de Banach, u un opérateur linéaire (p,G)-sommant de $E \hat{\otimes}_{\varepsilon} G$ dans H ($0 < p < \infty$), (Ω, μ) un espace de probabilité et $\varphi \in L^p(\Omega, \mu, E \hat{\otimes}_{\varepsilon} G)$. On a :

$$\left(\int \|u(\varphi(\omega))\|^p d\mu(\omega) \right)^{1/p} \leq \pi_{p,G}(u) \sup_{\|\xi\|_E \leq 1} \left(\int \|\langle \varphi(\omega), \xi \rangle\|^p d\mu(\omega) \right)^{1/p}.$$

Démonstration : Supposons tout d'abord φ étagée, c'est-à-dire :

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} z_i, \quad .$$

où les (A_i) sont des parties mesurables deux à deux disjointes de Ω , et les (z_i) des éléments de $E \hat{\otimes}_{\varepsilon} G$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \left(\int \|u(\varphi(\omega))\|^p d\mu(\omega) \right)^{1/p} &= \left(\sum \mu(A_i) \|u(z_i)\|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum \|u((\mu(A_i))^{1/p} z_i)\|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \pi_{p,G}(u) \sup_{\|\xi\| \leq 1} \left(\sum \|\langle (\mu(A_i))^{1/p} z_i, \xi \rangle\|^p \right)^{1/p} \\ &= \pi_{p,G}(u) \sup_{\|\xi\| \leq 1} \left(\int \|\langle \varphi(\omega), \xi \rangle\|^p d\mu(\omega) \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Supposons maintenant φ quelconque, et $p \geq 1$ pour simplifier. Soit $\alpha > 0$ quelconque, et soit φ_0 une fonction étagée telle que :

$$\|\varphi - \varphi_0\|_{L^p(\Omega, \mu, E \hat{\otimes}_{\varepsilon} G)} \leq \alpha.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
 (\int \|u(\varphi(\omega))\|^p d\mu(\omega))^{1/p} &\leq (\int \|u(\varphi_0(\omega))\|^p d\mu(\omega))^{1/p} + (\int \|u(\varphi - \varphi_0)(\omega)\|^p d\mu(\omega))^{1/p} \\
 &\leq \pi_{p,G} \sup_{\|\xi\| \leq 1} (\int \| \langle \varphi_0(\omega), \xi \rangle \|^p d\mu(\omega))^{1/p} + \|u\| \|\varphi - \varphi_0\|_{L^p} \\
 &\leq \pi_{p,G} \sup_{\|\xi\| \leq 1} [(\int \| \langle \varphi(\omega), \xi \rangle \|^p d\mu(\omega))^{1/p} + (\int \| \langle (\varphi - \varphi_0)(\omega), \xi \rangle \|^p d\mu(\omega))^{1/p}] + \alpha \|u\| \\
 &\leq \pi_{p,G} \sup_{\|\xi\| \leq 1} (\int \| \langle \varphi(\omega), \xi \rangle \|^p d\mu(\omega))^{1/p} + 2\alpha \|u\| ,
 \end{aligned}$$

d'où le résultat puisque α est arbitraire. Dans le cas $p < 1$, on adapte facilement la démonstration ci-dessus, en utilisant le fait que $L^p(\Omega, \mu, E \hat{\otimes}_\varepsilon G)$ est p -normé.

Introduisons quelques notations : soit E un espace vectoriel muni d'une norme et d'une topologie $\mathcal{C}$ pour laquelle la norme soit sci. Si μ est une probabilité sur E , de Radon pour $\mathcal{C}$, on pose si $p \in]0, +\infty[$:

$$\|\mu\|_p = (\int \|x\|^p d\mu(x))^{1/p},$$

et on dit que μ est d'ordre p si cette quantité est finie.

Supposons maintenant que E et G soient deux espaces de Banach, et λ une probabilité G -cylindrique sur $E \otimes G$. Nous poserons :

$$\|\lambda\|_{p,G}^* = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|\xi(\lambda)\|_p.$$

(Si λ est représentée par une fonction aléatoire linéaire $u : E' \rightarrow L^0(\Omega, \mu, G)$, $\xi(\lambda)$ est la probabilité de Radon sur G égale à $u(\xi)(\mu)$.) Nous dirons que λ est de type (p, G) si $\|\lambda\|_{p,G}^*$ est fini.

Lemme 1 : Soient E et G deux espaces de Banach, et λ une probabilité G -cylindrique sur $E \otimes G$. Si λ est représentée par une fonction aléatoire linéaire u de E' dans $L^0(\Omega, \mu, G)$, λ est de type p si et seulement si u opère continûment de E' dans $L^p(\Omega, \mu, G)$, et :

$$\|\lambda\|_{p,G}^* = \|u\|_p = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|u(\xi)\|_{L^p(\Omega, \mu, G)}.$$

Démonstration : A peu près évidente, puisque $\xi(\lambda) = u(\xi)(\mu)$. On a en effet :

$$\begin{aligned} \|\xi(\lambda)\|_p &= \left(\int \|x\|^p d(\xi(\lambda))(x) \right)^{1/p} = \left(\int \|x\|^p d(u(\xi)(\mu)) \right)^{1/p} \\ &= \left(\int \|u(\xi)(\omega)\|^p d\mu(\omega) \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

par définition d'une mesure image.

Proposition 2 : Soient E , G , H trois espaces de Banach, u un opérateur linéaire (p,G) -sommant de $E \hat{\otimes}_\varepsilon G$ dans H , $0 < p < \infty$, et μ une probabilité

de Radon d'ordre p sur $E \hat{\otimes}_\varepsilon G$. On a :

$$\|u(\mu)\|_p \leq \pi_{p,G}(u) \|\mu\|_{p,G}^*.$$

($\|\mu\|_{p,G}^*$ est le type de la probabilité G -cylindrique définie par μ , cf. exposé I §3).

Démonstration : Il suffit de poser $\Omega = E \hat{\otimes}_\varepsilon G$, de prendre pour φ l'application identique de Ω dans $E \hat{\otimes}_\varepsilon G$, et d'appliquer la proposition 1.

2. TOPOLOGIES ETROITES ET CYLINDRIQUES.

Rappelons la notion de convergence étroite : soit E un evt.

On définit sur $\mathcal{P}(E)$ (ensemble des probabilités de Radon sur E) la topologie

étroite comme la moins fine qui rend continues les applications $\mu \rightarrow \mu(f)$, pour toutes les fonctions continues bornées sur G . Nous admettrons le résultat suivant, ([1], exposé 1, Proposition 4).

Proposition 3 : Soient E un espace vectoriel, muni d'une norme et d'une topologie d'evt $\mathcal{C}$ pour laquelle les boules fermées soient compactes, et $p \in]0, +\infty[$. L'ensemble des probabilités μ sur E , de Radon pour $\mathcal{C}$, telles que $\|\mu\|_p \leq 1$, est compact pour la topologie étroite (relative à $\mathcal{C}$).

Lemme 2 : Soient E et G deux espaces de Banach, E de dimension finie, Ω un espace compact muni d'une probabilité de Radon μ , et (u_j) un filtre d'opérateurs linéaires de E' dans $L^0(\Omega, \mu, G)$ (ce dernier espace étant muni de la topologie de la convergence en probabilité), convergeant simplement vers un opérateur linéaire u . Si λ_j et λ représentent les probabilités de Radon sur $E \otimes G$ déterminées par u_j et u respectivement, le filtre (λ_j) converge étroitement vers λ .

Démonstration : Soient $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ une base de E' , $(x_1, \dots, x_n)$ la base duale dans E . Posons :

$$\varphi_j(\omega) = \sum_k x_k \otimes u_j(\xi_k)(\omega) \quad ; \quad \varphi(\omega) = \sum_k x_k \otimes u(\xi_k)(\omega) .$$

Quand j tend vers l'infini dans le filtre, chaque $u_j(\xi_k)$ tend vers $u(\xi_k)$ en probabilité, donc puisque les sommes sont finies, φ_j tend vers φ dans $L^0(\Omega, \mu, E \hat{\otimes}_\varepsilon G)$. On sait alors que $\varphi_j(\mu)$ tend étroitement vers $\varphi(\mu)$ d'après [2], proposition (VI,1,1). Mais $\varphi_j(\mu) = \lambda_j$, $\varphi(\mu) = \lambda$, ce qui achève la démonstration.

Soient E et G deux espaces de Banach. Désignons par $\check{\mathcal{P}}_G(E \otimes G)$ l'ensemble des probabilités G -cylindriques sur $E \otimes G$. Nous définirons la topologie G -cylindrique sur $\check{\mathcal{P}}_G(E \otimes G)$ comme la moins fine rendant continues les projections $\lambda \rightarrow \tilde{\pi}_N(\lambda)$ de $\check{\mathcal{P}}_G(E \otimes G)$ dans $\mathcal{P}(E/N \otimes G)$, pour

tous les sous-espaces fermés de codimension finie N . (Chaque $\mathcal{P}(E/N \otimes G)$ étant muni de la topologie étroite).

Proposition 4 : Soient E et G deux espaces de Banach, Ω un espace compact muni d'une probabilité de Radon μ , et (u_j) un filtre d'opérateurs linéaires de E' dans $L^0(\Omega, \mu, G)$, convergeant simplement vers un opérateur linéaire u . Si λ_j et λ représentent les probabilités G -cylindriques sur $E \otimes G$ déterminées par u_j et u respectivement, le filtre (λ_j) converge G -cylindriquement vers λ .

Démonstration : Soit N un sous-espace fermé de codimension finie de E . Les projections $\tilde{\pi}_N(\lambda_j)$ sur $E/N \otimes G$ sont représentées par les fonctions aléatoires linéaires :

$$N^0 \rightarrow E' \xrightarrow{u_j} L^0(\Omega, \mu, G),$$

où N^0 est de dimension finie. Il suffit donc d'appliquer le lemme 2.

3. RADONIFICATION.

Dans l'exposé 1, nous avons vu que si α est une norme (pas nécessairement une norme tensorielle) sur $E \otimes G$, une probabilité de Radon μ sur $E \hat{\otimes}_{\alpha} G$ définit une probabilité G -cylindrique sur $E \otimes G$ dès que α vérifie la condition :

$$(*) \quad E \otimes_{\alpha} G \rightarrow \mathcal{L}(E', G) \text{ est continue,}$$

et que deux probabilités de Radon sur $E \hat{\otimes}_{\alpha} G$ qui définissent la même probabilité G -cylindrique sur $E \otimes G$ coïncident dès que α vérifie la condition :

$$(**) \quad \text{Le prolongement } E \hat{\otimes}_{\alpha} G \rightarrow \mathcal{L}(E', G) \text{ est injectif .}$$

Si α est une norme sur $E \otimes G$, nous désignerons par $E/N \otimes G$ l'espace $q\alpha$ $E/N \otimes G$ muni de la norme quotient de $E \hat{\otimes}_{\alpha} G$. Nous envisagerons la condition suivante sur α :

$$(***) \quad \forall x \in E \hat{\otimes}_{\alpha} G, \quad \|x\|_{\alpha} = \sup_N \|\tilde{\pi}_N(x)\|_{q\alpha}.$$

Les exemples usuels tels que $C(K, G)$, $L^p(\Omega, \mu, G)$, $l^p(G)$, $c_0(G)$, vérifient les conditions (*), (**) et (***).

Rappelons l'hypothèse d'approximation métrique : on dit qu'un espace de Banach E vérifie l'hypothèse d'approximation métrique si l'identité de E est limite simple d'un filtre d'opérateurs de rang fini (π_j) , tel que $\|\pi_j\| \leq 1$. Si un dual E' vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, on peut supposer les opérateurs π_j continus pour $\sigma(E', E)$ (Ce fait a été établi par S. Simmons).

Soit u un opérateur linéaire de E dans F , tel que $\tilde{u} = u \otimes \text{Id}$ soit (p, G) -sommant de $E \otimes G$ dans $F \hat{\otimes}_{\alpha} G$, α vérifiant (*) et (**). Le premier problème qui se pose est de savoir si l'image $\tilde{u}(\lambda)$ d'une probabilité G -cylindrique λ de type (p, G) sur $E \otimes G$ "est de Radon" sur $F \hat{\otimes}_{\alpha} G$, au sens expliqué dans l'exposé 1, § 3. Le second problème est d'étendre l'inégalité de la proposition 2 aux probabilités G -cylindriques. Nous commençons par ce second problème :

Théorème 1 : Soient u un opérateur linéaire de E dans F , tel que $\tilde{u} = u \otimes \text{Id}$ soit (p, G) -sommant de $E \otimes G$ dans $F \hat{\otimes}_{\alpha} G$, α vérifiant les conditions (*), (**) et (***).

On suppose que E' vérifie l'hypothèse d'approximation métrique. Si λ est une probabilité G -cylindrique de type (p, G) sur $E \otimes G$, dont l'image $\tilde{u}(\lambda)$ est de Radon sur $F \hat{\otimes}_{\alpha} G$, on a :

$$\|\tilde{u}(\lambda)\|_p \leq \pi_{p, G}(\tilde{u}) \|\lambda\|_{p, G}^*.$$

Démonstration : Représentons λ par une fonction aléatoire linéaire $v : E' \rightarrow L^p(\Omega, \mu, G)$. Soit (π_j) un filtre d'opérateurs de rang fini, continu pour $\sigma(E', E)$, $\|\pi_j\| \leq 1$, convergeant simplement vers l'identité de E' . Posons $v_j = v \circ \pi_j$. L'opérateur v_j représente une probabilité G -cylindrique λ_j sur $E \otimes G$, qui est en fait de Radon sur $E \otimes G$, d'après les conditions sur π_j . On a :

$$\|\lambda_j\|_{p,G}^* = \|v_j\| \leq \|v\| = \|\lambda\|_{p,G}^*,$$

et le filtre (λ_j) converge G -cylindriquement vers λ . Soit N un sous-espace fermé de codimension finies de F , $\tilde{\pi}_N$ la projection de $F \hat{\otimes}_{\alpha} G$ sur $F/N \otimes G$.

Le filtre $\tilde{\pi}_N(\tilde{u}(\lambda_j))$ converge G -cylindriquement vers $\tilde{\pi}_N(\tilde{u}(\lambda))$, donc étroitement puisque F/N est de dimension finie. On vérifie facilement que $v \rightarrow \|v\|_p$ est sci pour la topologie étroite, donc :

$$\begin{aligned} \|\tilde{\pi}_N(\tilde{u}(\lambda))\|_p &\leq \liminf \|\tilde{\pi}_N(\tilde{u}(\lambda_j))\|_p \\ &\leq \pi_{p,G}(\tilde{u}) \liminf \|\lambda_j\|_{p,G}^* \\ &\leq \pi_{p,G}(\tilde{u}) \|\lambda\|_{p,G}^* \end{aligned}$$

d'après la proposition 2.

Maintenant, d'après (***), $\|x\|_{\alpha}$ est le sup filtrant des $\|\tilde{\pi}_N(x)\|_{q\alpha}$, donc puisque $\tilde{u}(\lambda)$ est supposée être une mesure de Radon sur $F \hat{\otimes}_{\alpha} G$:

$$\|\tilde{u}(\lambda)\|_p = \sup_N \|\tilde{\pi}_N(\tilde{u}(\lambda))\|_p,$$

ce qui achève la démonstration.

Le problème de savoir quand $\tilde{u}(\lambda)$ sera effectivement de Radon semble un peu délicat. Nous nous contenterons d'un cas très particulier.

Théorème 2 : Supposons $1 < p < \infty$, et G réflexif. Soit u un opérateur linéaire

de E dans F , tel que $\tilde{u} = u \otimes \text{Id}$ soit (p, G) -sommant de $E \otimes G$ dans $F \hat{\otimes}_{\alpha} G$, α vérifiant (*) et (**). Pour toute probabilité G -cylindrique λ de type (p, G) sur $E \otimes G$, l'image $\tilde{u}(\lambda)$ est de Radon sur $F \hat{\otimes}_{\alpha} G$,
et :

$$\|\tilde{u}(\lambda)\|_p \leq \pi_{p, G}(u) \|\lambda\|_{p, G}^* .$$

Démonstration : Nous utiliserons la factorisation de Pietsch de l'opérateur $\tilde{u}$:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C(K) \otimes G & \xrightarrow{i_2} & L^p(K, \mu, G) \\
 \tilde{u}_1 = i_1 \otimes \text{Id} \nearrow & & & & \\
 E \otimes G & & & & \\
 \searrow & & & & \\
 & & \overline{S \otimes G} & \xrightarrow{u_1} & F \hat{\otimes}_{\alpha} G
 \end{array}$$

U

où $\|i_1\| \leq 1$, $\|u_1\| \leq \pi_{p, G}(\tilde{u})$, où μ est une probabilité de Radon sur un espace compact K , et où S désigne l'image de E dans $L^p(K, \mu)$ (par i_1 suivi de l'application canonique $C(K) \rightarrow L^p(K, \mu)$).

Soit λ une probabilité G -cylindrique de type (p, G) sur $E \otimes G$, et $\tilde{\lambda} = \tilde{u}_1(\lambda)$. Puisque $M(K)$ vérifie l'hypothèse d'approximation métrique, $\tilde{\lambda}$ est limite G -cylindrique d'un filtre (λ_j) de probabilités de Radon sur $C(K) \otimes G$, tel que

$$\|\lambda_j\|_{p, G}^* \leq \|\tilde{\lambda}\|_{p, G}^* \leq \|\lambda\|_{p, G}^* .$$

D'après la proposition 2, et compte tenu de ce que $\pi_{p, G}(i_2) \leq 1$:

$$\|i_2(\lambda_j)\|_p \leq \|\lambda_j\|_{p, G}^* \leq \|\lambda\|_{p, G}^* .$$

Puisque $p > 1$ et G réflexif, l'espace $L^p(K, \mu, G)$ est réflexif, donc ses boules fermées sont faiblement compactes. D'après la proposition 3,

le filtre $(i_2(\lambda_j))$ est contenu dans un compact de l'ensemble des probabilités de Radon pour la topologie faible, pour la convergence étroite faible. Le filtre $(i_2(\lambda_j))$ admet donc un point adhérent ν , mesure de Radon pour la topologie faible, et telle que :

$$\|\nu\|_p \leq \|\lambda\|_{p,G}^* .$$

Par ailleurs, $(i_2(\lambda_j))$ converge G-cylindriquement vers $i_2(\tilde{\lambda})$, et la topologie étroite faible et la topologie G-cylindrique ont une borne inférieure séparée sur $\mathcal{P}(L^p(K, \mu, G))$, à savoir la topologie la moins fine rendant continues les projections dans $\mathcal{P}(L^p/N \otimes G)$, muni de la topologie étroite faible. Par conséquent $i_2(\tilde{\lambda}) = \nu$. D'autre part, d'après un théorème de Phillips, [2], proposition (XI, 2, 3), ν est en fait une probabilité de Radon sur $L^p(K, \mu, G)$ muni de la topologie de la norme.

Nous allons montrer pour finir que ν est portée par $\overline{S \otimes G}$. Pour cela considérons sur $L^p(K, \mu, G)$ la topologie localement convexe dont un système fondamental de voisinages de zéro est fourni par les :

$$V = \{ \varphi \in L^p(K, \mu, G) ; \quad \| \langle f_i, \varphi \rangle \|_G \leq \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad f_1, \dots, f_n \in L^{p'} \}.$$

Cette topologie est comprise entre la topologie faible de $L^p(K, \mu, G)$ et la topologie de la norme, ce qui permet de prendre l'adhérence de $S \otimes G$ pour cette topologie.

Si ν n'est pas portée par $\overline{S \otimes G}$, soit φ_0 un point du support de ν , tel que $\varphi_0 \notin \overline{S \otimes G}$. On pourra trouver $\varepsilon > 0$, et $(f_1, \dots, f_n) \in L^{p'}$ tels que :

$$(1) \quad \forall \varphi \in S \otimes G \quad \sup_i \| \langle f_i, \varphi_0 - \varphi \rangle \|_G \geq \varepsilon .$$

Considérons le sous-espace fermé de codimension finie N de $L^p(K, \mu)$ défini par les équations $\langle f_i, g \rangle = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Considérons la projection $\tilde{\pi}_N$ de $L^p(K, \mu, G)$ sur $L^p/N \otimes G$. Puisque

$\psi = i_2(\tilde{\lambda}) = i_2 \circ i_1(\lambda)$, l'image $\tilde{\pi}_N(\psi)$ est portée par $\overline{\tilde{\pi}_N(S \otimes G)}$. D'autre part, $\tilde{\pi}_N(\varphi_0)$ appartient au support de $\tilde{\pi}_N(\psi)$, mais n'appartient pas à $\overline{\tilde{\pi}_N(S \otimes G)}$ en vertu de (1), d'où une contradiction qui prouve que $\psi = i_2(\tilde{\lambda})$ est portée par $\overline{S \otimes G}$.

Maintenant $\tilde{u}(\lambda) = u_1(\psi)$ est de Radon sur $F \hat{\otimes}_{\alpha} G$, et :

$$\|\tilde{u}(\lambda)\|_p \leq \|u_1\| \|\psi\|_p \leq \pi_{p,G}(\tilde{u}) \|\lambda\|_{p,G}^*,$$

ce qui achève la démonstration.

*
*
*

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] Séminaire Maurey-Schwartz 1972-1973.
- [2] Séminaire L. Schwartz 1969-1970.
