

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

B. MAUREY

Rappels sur les opérateurs sommants et radonifiants

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1973-1974), exp. n° 1, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1973-1974__A2_0>

© Séminaire Maurey-Schwartz
(École Polytechnique), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - 75230 PARIS CEDEX 05

Téléphone : MÉDiciS 11-77
(633)

S E M I N A I R E M A U R E Y - S C H W A R T Z 1 9 7 3 - 1 9 7 4

RAPPELS SUR LES OPERATEURS SOMMANTS ET RADONIFIANTS

par B. MAUREY

1. OPERATEURS p -SOMMANTS ET (p,G) -SOMMANTS.

Soient E et F deux espaces de Banach, u un opérateur linéaire de E dans F , et $p \in]0, +\infty[$. Nous dirons que u est p -sommant s'il existe une constante C telle que l'on ait pour toute suite finie $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E :

$$(\sum \|u(x_i)\|^p)^{1/p} \leq C \sup_{\|\xi\|_{E'} \leq 1} (\sum |\langle x_i, \xi \rangle|^p)^{1/p}.$$

On désigne par $\pi_p(u)$ la plus petite constante C telle que la propriété ci-dessus soit réalisée.

Soit maintenant G un autre espace de Banach. Si $z \in E \otimes G$ et si $\xi \in E'$, on désignera par $\langle z, \xi \rangle$ l'élément $\tilde{Z}(\xi) \in G$, où $\tilde{Z}$ est l'application linéaire de E' dans G définie par z (si $\eta \in G'$, $\langle z, \eta \rangle$ est défini de façon analogue comme élément de E).

Soit u un opérateur linéaire de $E \otimes G$ dans F . (Pour l'instant, il est inutile de préciser une topologie sur $E \otimes G$). Nous dirons que u est (p,G) -sommant s'il existe une constante C telle que l'on ait pour toute suite finie $(z_1, \dots, z_n)$ d'éléments de $E \otimes G$:

$$(\sum \|u(z_i)\|^p)^{1/p} \leq C \sup_{\|\xi\|_{E'} \leq 1} (\sum \|\langle z_i, \xi \rangle\|_G^p)^{1/p}.$$

On désignera par $\pi_{p,G}(u)$ la plus petite constante C telle que la propriété ci-dessus soit réalisée.

D'une certaine manière, la notion d'opérateur (p,G) -sommant est comprise entre la notion d'opérateur continu (si $E = \mathbb{R}$), et la notion d'opérateur p -sommant ordinaire (si $G = \mathbb{R}$).

Notons une propriété évidente :

Proposition 1 : Soient E, F, H, K et G cinq espaces de Banach, u un opérateur linéaire continu de E dans F , $\tilde{u} = u \otimes \text{Id}_G$ opérateur de $E \otimes G$

I.2

dans $F \otimes G$, v un opérateur de $F \otimes G$ dans H , et w un opérateur linéaire continu de H dans K .

On a :

$$\pi_{p,G}(w \circ v \circ \tilde{u}) \leq \|w\| \cdot \pi_{p,G}(v) \cdot \|u\| .$$

2. THEOREME DE PIETSCH

Théorème 1 : Soient E, F, G trois espaces de Banach, u linéaire de $E \otimes G$ dans F , C une constante positive et $p \in]0, +\infty[$. Pour que l'opérateur u soit (p, G) -sommant, avec $\pi_{p,G}(u) \leq C$, il faut et il suffit qu'il existe une probabilité de Radon μ sur la boule unité B' de E' , munie de la topologie $\sigma(E', E)$, telle que l'on ait pour tout $z \in E \otimes G$:

$$\|u(z)\| \leq C \left(\int \| \langle z, \xi \rangle \|_G^p d\mu(\xi) \right)^{1/p} .$$

De plus dans le cas $p \geq 1$, on peut supposer que μ est portée par l'adhérence (pour $\sigma(E', E)$) des points extrémaux de la boule unité de E' .

Démonstration : Supposons tout d'abord qu'il existe une probabilité μ avec la propriété de l'énoncé, et soit $(z_1, \dots, z_n)$ une suite d'éléments de $E \otimes G$. On peut écrire pour chaque i :

$$\|u(z_i)\|^p \leq C^p \int \| \langle z_i, \xi \rangle \|^p d\mu(\xi) ,$$

donc :

$$\sum \|u(z_i)\|^p \leq C^p \int \sum \| \langle z_i, \xi \rangle \|^p d\mu(\xi) \leq C^p \sup_{\|\xi\| \leq 1} \sum \| \langle z_i, \xi \rangle \|^p ,$$

E'

ce qui montre que $\pi_{p,G}(u) \leq C$.

Inversement supposons $\pi_{p,G}(u) \leq C$. Désignons par K la boule unité de E' si $p \in]0,1[$, l'adhérence des points extremaux pour $\sigma(E',E)$ pour $p \geq 1$. L'espace K est compact pour la topologie $\sigma(E',E)$. Pour chaque suite finie $z = (z_1, \dots, z_n)$ d'éléments de $E \otimes G$, définissons une fonction F_z sur K par :

$$F_z(\xi) = C^p \sum \| \langle z_i, \xi \rangle \|^p - \sum \| u(z_i) \|^p.$$

On vérifie que chaque fonction F_z est continue sur K (car $z_k \in E \otimes G$ définit une application linéaire continue de $\sigma(E',E)$ dans G). Quand z varie, les F_z constituent un cône convexe $\mathcal{C}$. Remarquons que chaque fonction F_z a un maximum ≥ 0 sur K (pour $p \in]0,1[$ cela résulte simplement de la définition de $\pi_{p,G}$. Pour $p \geq 1$, il faut remarquer que l'on a par raison de convexité :

$$\sup_{\|\xi\| \leq 1} \left(\sum \| \langle z_i, \xi \rangle \|^p \right)^{1/p} = \sup_{\xi \text{ extrémal}} \left(\sum \| \langle z_i, \xi \rangle \|^p \right)^{1/p}$$

On a donc $\mathcal{C} \cap \Omega = \emptyset$, où Ω est le cône ouvert convexe des fonctions continues < 0 sur K . D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une mesure de Radon μ sur K , telle que :

$$\mu(f) \geq 0 \text{ si } f \in \mathcal{C} ; \quad \mu(f) < 0 \text{ si } f \in \Omega.$$

On voit donc que μ est une mesure positive non nulle, que l'on peut supposer de masse 1. On obtient le résultat voulu en écrivant que $\mu(F_z) \geq 0$, où z est une suite dans $E \otimes G$ réduite à un seul élément.

Corollaire 1 : Si u est (p,G) -sommant de $E \otimes G$ dans F , u se prolonge en opérateur continu de $E \hat{\otimes}_\varepsilon G$ dans F , et l'inégalité des opérateurs

(p,G) -sommants reste vraie pour les suites $(z_1, \dots, z_n)$ d'éléments de $E \hat{\otimes}_\varepsilon G$.

[Rappelons que :

$$\|z\|_\varepsilon = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \| \langle z, \xi \rangle \|_G = \sup_{\|\eta\| \leq 1} \| \langle z, \eta \rangle \|_E]$$

I.4

Démonstration : Considérons la mesure μ fournie par le théorème 1. Considérons l'opérateur $j : z \rightarrow \{\tilde{z} : \xi \rightarrow \langle z, \xi \rangle\}$ de $E \otimes G$ dans $L^p(K, \mu, G)$ (où K est comme dans la démonstration du théorème). Désignons par S l'image $j(E \otimes G)$, munie de la norme induite par $L^p(K, \mu, G)$. D'après la propriété de μ , on a un diagramme aux flèches continues :

$$\begin{array}{ccccc} & & L^p(K, \mu, G) & & \\ & & \downarrow U & \searrow v & \\ E \otimes G & \xrightarrow{\varepsilon} & S & \xrightarrow{\quad} & F \end{array}$$

(où v est défini par $v(j(z)) = u(z)$, ce qui a un sens d'après la propriété de μ).

En passant au complété, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} & & L^p(K, \mu, G) & & \\ & & \downarrow U & & \\ E \hat{\otimes}_{\varepsilon} G & \xrightarrow{\quad} & \bar{S} & \xrightarrow{\quad} & F \end{array},$$

ce qui signifie que l'inégalité $\|u(z)\| \leq \left(\int \|\langle z, \xi \rangle\|^p d\mu(\xi) \right)^{1/p}$ reste vraie si $z \in E \hat{\otimes}_{\varepsilon} G$, d'où l'on déduit facilement le corollaire 1.

L'argument précédent démontre pratiquement le résultat que voici :

Corollaire 2 : Soit u un opérateur linéaire de $E \otimes G$ dans F . Pour que u soit (p, G) -sommant, il faut et il suffit qu'il existe un espace compact K , une application continue j de E dans $C(K)$, et une probabilité μ sur K tels que u admette la factorisation :

$$\begin{array}{ccccc} & & C(K, G) & \xrightarrow{\quad} & L^p(K, \mu, G) \\ & \nearrow j & & & \downarrow U \\ E \otimes G & \xrightarrow{\quad} & S & \xrightarrow{\quad} & F \end{array}$$

où $\mathcal{J} = j \otimes \text{Id}_G$, où S est un sous-espace fermé de $L^p(K, \mu, G)$, et où toutes les flèches sont continues.

Nous laissons la vérification complète au lecteur.

Proposition 2 : Soient E, F, G trois espaces de Banach, u un opérateur p -sommant de E dans F . L'opérateur $\tilde{u} = u \otimes \text{Id}_G$ est (p, G) -sommant de $E \otimes G$ dans $F \hat{\otimes}_\varepsilon G$.

Démonstration : Puisque u est p -sommant, il existe d'après le théorème 1 une constante C et une probabilité de Radon μ sur la boule unité de E' telles que :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq C \left(\int |\langle x, \xi \rangle|^p d\mu(\xi) \right)^{1/p}.$$

Soit $z \in E \otimes G$. Notons que

$$\langle \tilde{u}(z), \eta \rangle = u(\langle z, \eta \rangle) \quad \text{si } \eta \in G'.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}(z)\|_\varepsilon &= \sup_{\|\eta\|_{G'} \leq 1} \|\langle \tilde{u}(z), \eta \rangle\|_F = \sup_{\|\eta\|_{G'} \leq 1} \|u(\langle z, \eta \rangle)\|_F \\ &\leq C \sup_{\|\eta\|_{G'} \leq 1} \left(\int |\langle \langle z, \eta \rangle, \xi \rangle|^p d\mu(\xi) \right)^{1/p} \\ &\leq C \left(\int \sup_{\|\eta\|_{G'} \leq 1} |\langle \langle z, \xi \rangle, \eta \rangle|^p d\mu(\xi) \right)^{1/p} \\ &= C \cdot \left(\int \|\langle z, \xi \rangle\|_G^p d\mu(\xi) \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

3. PROBABILITES CYLINDRIQUES ET G-CYLINDRIQUES.

Soit E un espace de Banach. Une probabilité cylindrique λ sur E est la donnée d'un système projectif de probabilités de Radon (λ_N) sur les quotients de dimension finie E/N .

De façon plus précise, si N est un sous-espace fermé de E , notons π_N la projection de E sur E/N . Si M est un autre sous-espace fermé de E , tel que $N \subset M$, notons $\pi_{M,N}$ la projection de E/N sur E/M . Dire que le système (λ_N) est projectif signifie que l'on a, lorsque N et M sont deux sous-espaces fermés de codimension finie, tels que $N \subset M$:

$$\pi_{M,N}(\lambda_N) = \lambda_M$$

Si maintenant G est un autre espace de Banach, on appellera probabilité G -cylindrique sur $E \otimes G$ la donnée d'un système projectif de probabilités de Radon (λ_N) sur les espaces $E/N \otimes G$, où N décrit l'ensemble des sous-espaces fermés de codimension finie de E . Dire que le système est projectif signifie :

$$N \subset M \quad \tilde{\pi}_{M,N}(\lambda_N) = \lambda_M, \quad \text{où} \quad \tilde{\pi}_{M,N} = \pi_{M,N} \otimes \text{Id}_G.$$

Si F est un autre espace de Banach, u un opérateur linéaire continu de E dans F , $\tilde{u} = u \otimes \text{Id}_G$, on définit l'image $\tilde{u}(\lambda)$ de la façon suivante : si N est un sous-espace fermé de codimension finie de F , on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ E/u^{-1}(N) & \xrightarrow{u_N} & F/N \end{array}$$

On pose

$$(\tilde{u}(\lambda))_N = \tilde{u}_N (\lambda_{u^{-1}(N)}) \quad \text{où} \quad \tilde{u}_N = u_N \otimes \text{Id}.$$

Un moyen de construction de probabilités G-cylindriques peut être décrit de la façon suivante : soient Ω un espace compact, μ une probabilité de Radon sur Ω , E et G deux espaces de Banach et u un opérateur linéaire continu de E' dans $L^0(\Omega, \mu, G)$, qui est l'espace vectoriel des (classes de) fonctions μ -mesurables Lusin de Ω dans G .

Supposons d'abord E' de dimension finie. On voit alors aisément qu'il existe une application mesurable $\varphi_{E'}$ de Ω dans $E \otimes G$, telle que :

$$\forall \xi \in E' \quad , \quad u(\xi) = \langle \varphi_{E'}, \xi \rangle .$$

(Pour construire $\varphi_{E'}$, soit (ξ_i) une base de E' et (x_i) la base duale dans E . Il suffit de prendre : $\varphi_{E'}(\omega) = \sum x_i \otimes u(\xi_i)(\omega)$.)

Supposons maintenant E quelconque, et soit N un sous-espace fermé de codimension finie de E . Le dual de E/N s'identifie au polaire N^0 de N dans E' . Considérons l'application φ_{N^0} de Ω dans $E/N \otimes G$, correspondant à la restriction de u à N^0 . Nous pouvons définir une probabilité G-cylindrique à partir de u , en posant :

$$\lambda_N = \varphi_{N^0}(\mu) .$$

On vérifie aisément les relations de compatibilité.

Inversement, on peut montrer que toute probabilité G-cylindrique s'obtient par ce procédé :

Théorème 2 : Soient E et G deux espaces de Banach. Pour toute probabilité G-cylindrique λ sur $E \otimes G$, il existe un espace compact Ω , une probabilité de Radon μ sur Ω et un opérateur linéaire u de E' dans $L^0(\Omega, \mu, G)$ tels que λ s'obtienne à partir de u par le procédé décrit ci-dessus.

La démonstration de ce théorème est identique à celle de la proposition (VI,3,1) de [1].

Il suffit d'y remplacer $\check{\mathbb{R}}$ par $\check{G}$ (compactifiés de Stone-Čech).

Supposons maintenant donnée sur le produit tensoriel $E \otimes G$ une norme α (pas nécessairement une norme tensorielle au sens de Grothendieck), telle que :

$$(*) \quad \forall z \in E \otimes G, \quad \forall \xi \in E' \quad \| \langle z, \xi \rangle \|_G \leq \alpha(z) \|\xi\|,$$

c'est-à-dire que l'injection de $E \otimes G$ dans $\mathcal{L}(E', G)$ est continue

et de norme ≤ 1 , et se prolonge en une application continue (non nécessairement injective) de norme ≤ 1 , de $E \hat{\otimes}_{\alpha} G$ dans $\mathcal{L}(E', G)$.

Nous noterons encore $\langle z, \xi \rangle$, si $z \in E \hat{\otimes}_{\alpha} G$, et $\xi \in E'$.

Soit μ une probabilité de Radon sur $E \hat{\otimes}_{\alpha} G$. Elle définit

de façon évidente une probabilité G -cylindrique sur $E \otimes G$: si N est un sous-espace fermé de codimension finie de E , l'application $\tilde{\pi}_N$ de $E \otimes G$ sur $E/N \otimes G$ se prolonge à $E \hat{\otimes}_{\alpha} G$. Il suffit de définir un système projectif $\tilde{\mu} = (\mu_N)$ par $\mu_N = \tilde{\pi}_N(\mu)$.

Inversement, nous dirons qu'une probabilité G -cylindrique λ sur $E \otimes G$ "est de Radon" sur $E \hat{\otimes}_{\alpha} G$ s'il existe une probabilité de Radon μ sur $E \hat{\otimes}_{\alpha} G$ telle que $\tilde{\mu} = \lambda$. Cela toutefois ne sera raisonnable

que si une telle μ est unique lorsqu'elle existe. D'après le théorème de Prokhorov ([1], exposé I), il suffit pour cela que les applications $\tilde{\pi}_N$ séparent les points de $E \hat{\otimes}_{\alpha} G$, ce qui est vrai si et seulement si

les applications $z \rightarrow \langle z, \xi \rangle$ séparent les points de $E \hat{\otimes}_{\alpha} G$, soit encore :

(**) L'application de $E \hat{\otimes}_{\alpha} G$ dans $\mathcal{L}(E', G)$ est injective.

Dans le cas où α est la norme π de Grothendieck, et $G = E'$, nous retrouvons exactement l'hypothèse d'approximation |

Dans l'exposé suivant, nous considérerons le problème des applications G -radonifiantes : on se donne E, F, G trois espaces de Banach, u un opérateur linéaire continu de E dans F , α une norme sur $F \otimes G$ vérifiant (*) et (**), $\tilde{u} = u \otimes \text{Id}_G$ l'opérateur de $E \otimes G$ dans $F \hat{\otimes}_\alpha G$. Etant donnée une probabilité G -cylindrique λ sur $E \otimes G$, nous chercherons à savoir si son image $\tilde{u}(\lambda)$ "est de Radon" sur $F \hat{\otimes}_\alpha G$.

*
* *
*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Séminaire L. SCHWARTZ 1969-1970.
